J. FRENKEL

LEHRBUCH DER ELEKTRODYNAMIK

ERSTER BAND

5th St. NEW YORK

TB $5.50

LEHRBUCH DER ELEKTRODYNAMIK

VON

DR. J. FRENKEL
PROFESSOR FÜR THEORETISCHE PHYSIK
AM POLYTECHNISCHEN INSTITUT
IN LENINGRAD

ERSTER BAND

ALLGEMEINE MECHANIK DER ELEKTRIZITÄT

MIT 39 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

DEM ANDENKEN AN MEINEN BRUDER

SERGIUS

(21. SEPTEMBER 1900—7. APRIL 1920)

DER MEIN ERSTER SCHÜLER
UND HELFER GEWESEN IST

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch der Elektrodynamik bietet sowohl hinsichtlich der Einteilung des Stoffes als auch der Darstellungsweise einige Besonderheiten, auf die ich hier kurz hinweisen möchte.

Was die Einteilung des Stoffes betrifft, so habe ich sie nach dem Beispiel der theoretischen Mechanik durchgeführt. In der theoretischen Mechanik werden zunächst die allgemeinen Gesetze der Wechselwirkung und Bewegung von materiellen Teilchen oder „Punkten" untersucht, die später auf bestimmte spezielle Systeme, welche die verschiedenen materiellen Körper idealisieren — nämlich starre Körper, elastische Körper, Flüssigkeiten und Gase — angewandt werden. — Dementsprechend betrachte ich in diesem ersten Bande nur die allgemeinen Gesetze der Wechselwirkung und der Bewegung von *elektrisch geladenen* materiellen Teilchen, die auch vielfach als Punkte behandelt werden, wobei alle Wechselwirkungen zwischen ihnen auf ihre Ladung zurückgeführt werden.

Diese Teilchen (oder „elektrische Massenpunkte") nenne ich *Elektronen*, ohne dabei auf die Betrachtung der von ihnen herrührenden Erscheinungen in materiellen Körpern einzugehen.

Die elektromagnetischen (und optischen) Eigenschaften der materiellen Körper sollen erst im zweiten Bande untersucht werden, und zwar von einem makroskopischen Gesichtspunkte aus.

Es sei bemerkt, daß man auch hier, in Analogie zur Mechanik, die Körper in „elektrisch flüssige" mit frei bewegten Ladungen (Leiter) und elektrisch oder magnetisch „elastische" mit gebundenen Ladungen einteilen kann.

Ich hoffe, die mikroskopische Elektrodynamik der einfachsten materiellen Systeme — Atome und Moleküle — in einem dritten Bande behandeln zu können, falls es gelingt, die nötige quantentheoretische Umgestaltung der klassischen Elektrodynamik durchzuführen.

In dem vorliegenden ersten Bande werden zunächst Erscheinungen, die von der Zeit unabhängig sind, betrachtet. Dabei beginne ich die Elektrostatik nicht mit isolierten elektrischen Ladungen, sondern mit den einfachsten *neutralen* Systemen, d. h. mit Dipolen. Die Magnetostatik wird nicht auf Grund fiktiver magnetischer Pole, sondern auf Grund der etwas idealisierten stationären elektrischen Ströme aufgebaut. Dabei benutze ich zur Aufstellung der Grundeigenschaften der elektrischen und magnetischen Felder und ihrer Wirkung auf elektrische

Dipole bzw. Ströme (oder ihre Elemente) als Leitfaden das *Energieprinzip*. Durch Kombination dieses Prinzips mit dem *Äquivalenzprinzip* zwischen elektrischen Dipolen und Strömen (hinsichtlich ihrer Wechselwirkung untereinander) ergeben sich die allgemeinen Differentialgleichungen für das zeitlich konstante elektromagnetische Feld und speziell die Gesetze von *Coulomb* und *Biot-Savart*.

Im zweiten Abschnitt werden die erhaltenen Gesetze auf beliebige von der Zeit abhängige Erscheinungen verallgemeinert, und zwar mittels des *Prinzips der Relativität der Geschwindigkeit* (in ganz enger Fassung) und des *Prinzips der Erhaltung der Elektrizität*. Die gewonnenen *Maxwell-Lorentz*schen Gleichungen werden dann auf die Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in den wichtigsten Fällen angewandt. Bei der Untersuchung des elektromagnetischen Feldes eines Oszillators werden die Grundzüge der elektromagnetischen Lichttheorie dargelegt.

Ferner werden die Begriffe der Energie, Bewegungsgröße usw. für beliebige Felder aufgestellt und die klassische Theorie der Trägheitskraft (d. h. die elektromagnetische Theorie der Masse) und der Strahlungsdämpfung, ebenso wie die Theorie der Translations- und Rotationsbewegung eines räumlich ausgedehnten Elektrons entwickelt. Zum Schluß werden diese klassischen Vorstellungen kritisch betrachtet.

Der dritte Abschnitt ist der Begründung der speziellen Relativitätstheorie und ihrer Anwendung auf elektromagnetische Wirkungen (Felder) und die Bewegungsgleichungen der Elektronen gewidmet. Hier sind die von der Zeit abhängigen Vorgänge als statische Erscheinungen in der vierdimensionalen Welt aufgefaßt. Auf die allgemeine Relativitätstheorie gehen wir in diesem Buche nicht ein, da sie sich mehr mit den Gravitationswirkungen als mit den elektrischen Wirkungen beschäftigt.

Einleitungsweise habe ich eine kurze Darstellung der Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung gegeben. Der Leser wird dort den ganzen mathematischen Apparat finden, welcher im folgenden gebraucht wird. Bei der Behandlung der Tensoren und der koordinatenmäßigen Darstellung von Vektorgrößen und Operationen habe ich mich der Einfachheit halber auf rechtwinklige Koordinatensysteme beschränkt. Sie werden aber auch fast nur im dritten Abschnitt gebraucht.

Diese kurze Übersicht über den Inhalt des Buches soll nun vervollständigt werden durch den Hinweis auf die Dinge, die in ihm fehlen. *Von der historischen Entwicklung der Elektrizitätslehre ist hier ganz abgesehen.* Ich glaube nämlich, daß der geschichtliche und der logische Gesichtspunkt keineswegs durcheinander gebracht werden dürfen, jedenfalls dann nicht, wenn das betreffende Wissenschaftsgebiet sich zu einem geschlossenen logischen System entwickelt hat — wie dies bei der klassischen Mechanik und klassischen Elektrodynamik der Fall ist. Ich habe die moderne Elektrizitätslehre auf eine möglichst einfache

und systematische Weise darzustellen versucht, ohne jede Rücksicht auf ihre Entwicklungsgeschichte. Diesen Gegenstand möchte ich gerne anderen überlassen.

Speziell habe ich vollkommen die Äthertheorie — in allen ihren Gestalten — ignoriert. Der Äther hat zweifellos eine sehr wichtige und fruchtbare Rolle als Arbeitshypothese in der Entwicklung der Elektrodynamik gespielt. Erstens — seit *Huyghens* — als Grundlage der Theorie der optischen Erscheinungen; dann — seit *Faraday* und *Maxwell* — als Brücke zwischen Optik und Elektromagnetismus. Noch später hat man versucht, den Äther für alle physikalischen Erscheinungen verantwortlich zu machen. Es ist aber jetzt an der Zeit, einzusehen, daß der Äther seine historische Rolle ausgespielt hat und daß er nur in der Geschichte der Physik das Recht auf einen Ehrenplatz hat. Seine Einführung — auch nur als Hilfsbegriff — in die Darstellung der modernen Elektrizitätslehre kann den Gegenstand gar nicht klarer machen, sondern im Gegenteil nur trüben und mit einer Anzahl von Scheinproblemen belasten, wie es z. B. alle diejenigen Probleme sind, welche sich auf die Bewegung der Erde „im Äther" beziehen.

Wegen der von vornherein „ahistorischen" Behandlung der Elektrizitätslehre habe ich in diesem Buche jegliche Hinweise auf die Literatur — sowohl Lehrbücher, wie Abhandlungen — unterlassen, und vielleicht manche — für die Entwicklung der Elektrodynamik sehr wichtige — Namen unerwähnt gelassen.

Ich möchte zum Schluß Herrn Prof. *M. Born* für die Durchsicht des Manuskriptes meinen herzlichen Dank aussprechen. Ferner bin ich den Herren Prof. *P. Ehrenfest*, *V. Bursian*, *G. Krutkow* und besonders Herrn cand. *W. Elsasser* für technische Hilfe besten Dank schuldig.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, zu erwähnen, daß mir die Möglichkeit im Ausland zu arbeiten durch ein Stipendium des International Education Board geschaffen wurde.

Besonders möchte ich auch der Verlagsbuchhandlung *Julius Springer* für ihre Sorgfalt und Großzügigkeit in jeder Hinsicht danken.

Göttingen, im September 1926.

J. Frenkel.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung.

Seite

A. Addition, innere und äußere Multiplikation von Vektoren 1
B. Differentialoperationen der Vektorrechnung 7
C. Koordinatentransformation und Tensoren 24

Erster Abschnitt.

Die von der Zeit unabhängigen elektromagnetischen Wirkungen.

Erstes Kapitel. Elektrostatische Wirkungen und Energieprinzip.

§ 1. Elektrische Dipole 37
§ 2. Das Moment eines elektrischen Dipols 39
§ 3. Systeme von elementaren Dipolen 40
§ 4. Die Statik eines elementaren Dipols; die elektrische Feldstärke . . . 42
§ 5. Der wirbelfreie Charakter des elektrischen Feldes und seine Wirkung auf einzelne Ladungen (Pole) 44
§ 6. Die Zurückführung der Dipolwirkungen auf einzelne Pole 46

Zweites Kapitel. Elektrokinetische (magnetische) Wirkungen und Energieprinzip.

§ 1. Elektrische Ströme 47
§ 2. Stationäre elektrische Ströme 49
§ 3. Das magnetische Moment eines linearen Stroms 51
§ 4. Systeme von elementaren Strömen; nichtelementare Ströme . . . 53
§ 5. Die Statik der elektrischen Ströme; das magnetische Feld 55
§ 6. Die Wirkung des magnetischen Feldes auf einzelne Stromelemente und bewegte Ladungen 58

Drittes Kapitel. Die Struktur der elektrischen und magnetischen Felder in Verbindung mit dem Äquivalenzprinzip.

§ 1. Die Äquivalenz von elementaren Dipolen und Strömen 60
§ 2. Die Grundgleichungen des elektrischen und magnetischen Feldes im leeren Raum 62
§ 3. Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes für singuläre Punkte 65
§ 4. Beziehung zwischen den Konstanten C_1 und C_2. Nichtelementare Ströme und Doppelschichten; nichtelementare Dipole und Solenoide 67
§ 5. Bestimmung des elektrischen Feldes aus der Ladungsverteilung . . 73
§ 6. Bestimmung des magnetischen Feldes aus der Stromverteilung . . 77
§ 7. Die graphische Darstellung des elektrischen und magnetischen Feldes 80
§ 8. Die Felder und die Wechselwirkungen von elementaren Dipolen und Strömen 84
§ 9. Das skalare Potential eines nicht elementaren linearen Stromes . . 88
§ 10. Elektrische und magnetische Polarisation und Polarisationspotentiale 89

Seite

Viertes Kapitel. Darstellung willkürlicher Systeme durch Multipole; Potentialtheorie.

§ 1. Definition eines Multipols 93
§ 2. Das Feld und die Energie von Multipolen 95
§ 3. Darstellung beliebiger elektrischer Systeme durch Multipole 98
§ 4. Harmonisch konjugierte Systeme; elektrisches Potential innerhalb einer Kugel 104
§ 5. Äquivalente Flächenladung 108
§ 6. Die *Green*sche Funktion 112
§ 7. Äquivalente Flächenströme 116
§ 8. Induzierte elektrische und magnetische Momente 119

Zweiter Abschnitt.

Die von der Zeit abhängigen elektromagnetischen Wirkungen.

Fünftes Kapitel. Die allgemeinen Gesetze des elektromagnetischen Feldes.

§ 1. Die elektromagnetische Induktion in einem zeitlich konstanten Feld 123
§ 2. Die elektromagnetische Induktion in einem zeitlich veränderlichen magnetischen Feld; das Relativitätsprinzip 126
§ 3. Die *Maxwell-Lorentz*schen Grundgleichungen für zeitlich wechselnde elektromagnetische Felder 129
§ 4. Die Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale . 132
§ 5. Integration der vorhergehenden Differentialgleichungen; retardierte Potentiale 135
§ 6. Das elektromagnetische Feld eines elementaren schwingenden Dipols (Oszillators) 142
§ 7. Elektromagnetische Wellen und das Wesen des Lichtes 146
§ 8. Übergang von kugelförmigen zu ebenen Wellen 149
§ 9. Das *Huyghens*sche Prinzip 154
§ 10. Das elektromagnetische Feld von Oszillatoren (Multipolen) höherer Ordnung 158
§ 11. Äquivalente magnetische Systeme; magnetischer Oszillator 163

Sechstes Kapitel. Das elektromagnetische Feld bewegter Punktladungen (Elektronen).

§ 1. Die elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung . . 166
§ 2. Die elektrische und magnetische Feldstärke 169
§ 3. Spezielle Betrachtung der geradlinig-gleichförmigen Bewegung . . . 173
§ 4. Elektronen als Punktsingularitäten im Raumzeitkontinuum; neue Ableitung der elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung 177
§ 5. Formale Zurückführung der retardierten Fernwirkungen auf momentane 183

Siebentes Kapitel. Energie und Bewegungsgröße bei zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Erscheinungen; Dynamik der Elektronen.

§ 1. Die elektrische Energie eines Systems ruhender Ladungen 186
§ 2. Die magnetische Energie von elektrischen Strömen 194
§ 3. Die elektromagnetische Theorie der Masse 199
§ 4. Elektromagnetische Energie und Strahlung 204
§ 5. Transformation der elektrischen und magnetischen Kräfte; elektromagnetische Bewegungsgröße 212
§ 6. Die Translationsbewegung eines *Lorentz*schen Elektrons 220

Seite

§ 7. Die Rotationsbewegung eines kugelförmigen Elektrons 229
§ 8. Kombination der Rotations- und Translationsbewegung 235
§ 9. Die Magnetonen 241
§ 10. Kritische Betrachtung der Theorie der ausgedehnten Elektronen . . 246

Dritter Abschnitt.

Die Relativitätstheorie.

Achtes Kapitel. Begründung der Relativitätstheorie.

§ 1. Raum-zeitliche Symmetrie der elektromagnetischen Gleichungen . . 251
§ 2. Die *Lorentz*transformation 258
§ 3. Das *Einstein*sche Relativitätsprinzip 267
§ 4. Graphische Darstellung der Bewegung und neue Ableitung der *Lorentz*-transformation 273
§ 5. Die räumlichen und zeitlichen Abstände in der Relativitätstheorie . 279

Neuntes Kapitel. Anwendung der Relativitätstheorie auf die elektromagnetischen Erscheinungen.

§ 1. Transformation von Vektoren 286
§ 2. Transformation von Sechservektoren 290
§ 3. Transformation des Energietensors; Kraft und Drehkraft 297
§ 4. Anwendung der relativistischen Transformationsformeln auf die geradlinig-gleichförmige Bewegung von Elektronen und Oszillatoren . . . 300
§ 5. Das elektromagnetische Feld eines beliebig bewegten Oszillators . . 307
§ 6. Zurückführung der elektromagnetischen Grundgleichungen auf ein Variationsprinzip 312

Zehntes Kapitel. Die relativistische Mechanik.

§ 1. Die elementare Theorie der Translationsbewegung 317
§ 2. Variationstheorie der Translationsbewegung eines Elektrons in einem gegebenen elektromagnetischen Feld 322
§ 3. Dreidimensionale Form des Variationsprinzips 327
§ 4. Die Wirkungsfunktion und die *Hamilton-Jacobi*sche Differentialgleichung. 330
§ 5. Einfachste Beispiele der Bewegung eines freien Elektrons 337
§ 6. Systeme von Elektronen; Virialsatz und Massendefekt 343
§ 7. Umlaufsbewegung eines Elektrons 348
§ 8. Rotationsbewegung; Bewegungsgleichungen des magnetischen Elektrons. 353

Namen- und Sachverzeichnis 363

Einleitung.

Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung.

A. Addition, innere und äußere Multiplikation von Vektoren.

§ 1.

Die verschiedenen physikalischen Größen werden gewöhnlich in zwei Klassen eingeteilt, nämlich in die *Skalare* und die *Vektoren*. Erstere sind vollständig durch die Angabe ihres *Zahlenwertes* bestimmt; um die anderen vollständig anzugeben, muß außer ihrem zahlenmäßigen Betrage auch noch ihre *Richtung* im Raume angegeben werden. Als typische Skalare betrachtet man die Zeit, die Masse eines Körpers usw.; als typische Vektoren — die Geschwindigkeit, die Kraft usw. Wir werden später sehen, daß die Vektoren einen Spezialfall von Größen allgemeinerer Art bilden, der sogenannten *Tensoren*.

Wir werden die Vektorgrößen gewöhnlich mit deutschen Buchstaben bezeichnen, und ihren Betrag — durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben, oder auch, indem wir das Vektorsymbol zwischen zwei vertikale Striche einschließen; so soll z. B. $|\mathfrak{A}| = A$ den Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$ bedeuten.

Die einfachste Vektorgröße, die auch zur anschaulichen Darstellung aller anderen Größen dieser Art dient, ist eine geradlinige Strecke, die von einem Punkte O zu einem anderen P gezogen wird und als die Verrückung eines materiellen Punktes aufgefaßt werden kann.

Die Verrückung OP kann ersetzt werden durch eine Reihe von anderen Verrückungen OA, AB, BC, CP, die eine gebrochene Linie bilden und die *Komponenten* von OP heißen. Bei zwei Komponenten OA und AP kann man den Vektor OP als die Diagonale eines Parallelogrammes betrachten, dessen Seiten mit OA bzw. AP gleich und gleichgerichtet sind.

Die Ersetzung eines Vektors durch eine Anzahl Komponenten (die offenbar auf unendlich viele verschiedene Weisen geschehen kann) heißt *geometrische Zerlegung*. Die zur Zerlegung umgekehrte Operation,

welche in der Ersetzung einer Anzahl willkürlicher Strecken (Vektoren) $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_n$ durch eine einzige Strecke $\mathfrak{F}$, für die sie die Rolle der Komponenten spielen, besteht, heißt *geometrische Addition* und wird symbolisch durch die Gleichung

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n = \sum_k \mathfrak{F}_k \qquad (1)$$

bezeichnet; dabei heißt der Vektor $\mathfrak{F}$ die geometrische Summe von $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ usw. Es ist leicht zu beweisen, daß die geometrische Summe von der Reihenfolge der einzelnen Summanden (d. h. Komponenten) unabhängig ist und daß ferner eine beliebige Anzahl der Summanden bei der Addition durch ihre geometrische Summe ersetzt werden kann. Die geometrische Addition genügt also, ebenso wie die gewöhnliche (algebraische), dem *kommutativen* und *assoziativen* Gesetz.

Ein Vektor, der einem anderen $\mathfrak{B}$ gleich und entgegengerichtet ist, wird durch $-\mathfrak{B}$ bezeichnet. Die geometrische Summe $\mathfrak{A} + (-\mathfrak{B})$ wird einfach in der Gestalt $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ geschrieben und heißt die geometrische *Differenz* der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

§ 2.

Wenn man durch die Endpunkte einer Strecke OP zwei zu einer Geraden MN senkrechte Ebenen zieht, so schneiden sie aus dieser Geraden eine Strecke $O_1 P_1$ aus, die die *Projektion* von OP auf MN heißt. Dabei wird diese Projektion als eine gewöhnliche (skalare) Größe betrachtet — *positiv*, wenn die Richtung $O_1 P_1$ mit der positiven Richtung der Geraden MN zusammenfällt, und negativ im entgegengesetzten Falle.

Bezeichnet man die Projektion eines Vektors $\mathfrak{A}$ auf einen anderen $\mathfrak{B}$ (oder eine zum $\mathfrak{B}$ gleichgerichtete Gerade) durch A_B, so ist nach der obigen Definition:

$$A_B = A \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Das Produkt $A_B \cdot B = A\,B \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = AB_A$ heißt *inneres* (oder „skalares") Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und wird durch das Symbol $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ oder einfach $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bezeichnet. Es ist leicht einzusehen, daß die Projektion der geometrischen Summe zweier oder mehrerer Strecken (z. B. OQ und QP, Abb. 1) auf irgendeine Gerade gleich ist der algebraischen Summe der Projektionen der einzelnen Summanden, d. h. $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})_C = A_C + B_C$. Multipliziert man diese Gleichung mit C, so erhält man nach der Definition des inneren Produktes die Formel

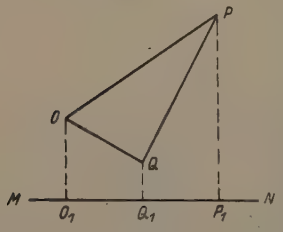

Abb. 1.

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}. \qquad (2)$$

Diese Formel, welche das *distributive* Gesetz ausspricht, läßt sich offenbar auf eine beliebige Anzahl der Summanden in jedem Faktor verallgemeinern:

$$(\sum_p \mathfrak{A}_p)(\sum_q \mathfrak{B}_q) = \sum_p \sum_q \mathfrak{A}_p \mathfrak{B}_q. \qquad (2a)$$

§ 3.

Die durch eine ebene geschlossene Linie σ begrenzte (ebene) Fläche kann man, sofern nur ihre Orientierung und ihr Flächeninhalt S in Betracht gezogen werden, als eine Vektorgröße auffassen und durch eine zu ihrer Ebene senkrechte Strecke $\mathfrak{S}$ von einer zu S proportionalen Länge darstellen. Die dabei entstehende Zweideutigkeit in der Richtung von $\mathfrak{S}$ wird dadurch vermieden, daß man auf der Begrenzungskurve σ einen bestimmten *Umlaufssinn* vorgibt und die Richtung der darstellenden Strecke zu diesem Umlaufs- (oder Umdrehungs-) sinn *eindeutig* — im Sinne der gewöhnlichen *rechtsgängigen* Schraube — zuordnet.

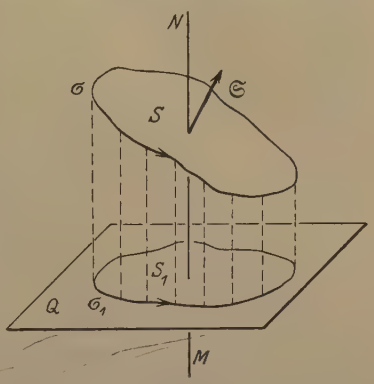

Abb. 2.

Zieht man durch alle Punkte der Begrenzungskurve die zu einer bestimmten Ebene Q senkrechten Geraden, so bekommt man auf dieser Ebene eine Kurve σ_1, die als *Projektion* von σ auf Q bezeichnet wird; dementsprechend heißt die durch σ_1 auf Q begrenzte Fläche S_1 die *Projektion* von S auf Q. Diese Projektion wird als eine gewöhnliche (skalare) Größe betrachtet, deren Vorzeichen man dadurch bestimmt, daß man auf der Ebene Q einen bestimmten Umlaufssinn als positiv wählt. Fällt dieser Umlaufssinn mit dem Umlaufssinn auf σ_1 zusammen, so ist S_1 positiv; im entgegengesetzten Falle ist sie negativ. Wie leicht einzusehen, ist S_1 numerisch gleich dem Produkte der projizierten Fläche S mit dem Kosinus des Winkels α zwischen der sie enthaltenden Ebene und der Ebene Q. Indem man die letztere oder besser den auf ihr gewählten Umlaufssinn durch die dazu senkrechte nach der Rechtsschraubenregel gerichtete Gerade MN darstellt (Abb. 2), kann man die Projektion der Fläche S auf Q mit der Projektion der S darstellenden Strecke $\mathfrak{S}$ auf MN identifizieren.

Besteht die „Begrenzungskurve" σ aus lauter geradlinigen Strecken, so kann man die betrachtete ebene Fläche S durch eine Anzahl anderer ebener Flächen $S_1, S_2, \ldots$ ersetzen, die eine von σ begrenzte Polyederfläche bilden. Der Umlaufssinn auf den „Kurven" — in unserem Falle Polygonen — $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, welche die Flächen $S_1, S_2 \ldots$ begrenzen, soll

dabei in der Art gewählt werden, daß jede Kante, die zwei verschiedenen Polygonen angehört, in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird, während der Umlaufssinn auf den Kanten des ursprünglichen „äußeren" Polygons σ unverändert bleibt (Abb. 3). Unter diesen Umständen kann man offenbar behaupten, daß die algebraische Summe der Projektionen der „Komponentenflächen" $S_1, S_2, \ldots$ auf irgendeine Ebene Q immer gleich der entsprechenden Projektion von S bleiben wird. Daraus folgt, daß für jede Art der „Zerlegung" von S in Komponentenflächen (oder von σ in Komponentenkurven) die geometrische Summe der Vektoren $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ denselben Wert $\mathfrak{S}$ behalten muß. In diesem Sinne werden wir die verschiedenen durch σ begrenzten Polyederflächen als einander *äquivalent* bezeichnen.

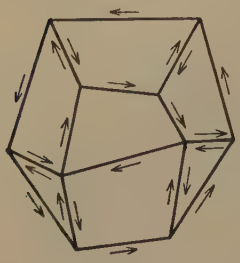

Abb. 3.

Eine Polyederfläche kann offenbar auch durch eine *nichtebene* Polygonkurve begrenzt werden. Solange aber der Umlaufssinn auf dieser „Kurve" (σ) gegeben ist und der Umlaufssinn auf den einzelnen Komponentenpolygonen (σ_i) nach der oben erwähnten Regel festgestellt ist, wird die geometrische Summe der Komponentenflächen (oder des sie darstellenden Vektoren) $\mathfrak{S}_i$ für alle durch dieselbe Polygonkurve σ begrenzten Polyederflächen denselben Wert $\mathfrak{S}$ haben[1]). Dieser Vektor $\mathfrak{S}$, dessen Betrag und Richtung durch die Gestalt und den Umlaufssinn des Polygons σ eindeutig bestimmt ist, wollen wir als *geometrisches Moment* von σ bezeichnen. Diese Definition des geometrischen Moments läßt sich leicht auf beliebige geschlossene Kurven verallgemeinern, indem eine solche Kurve als Grenzfall eines Polygons mit unendlich kleinen Kanten betrachtet wird. — Für ebene Kurven ist der Betrag des Momentes gleich dem Flächeninhalte und seine Richtung dem Umlaufssinn nach der oben definierten Rechtsschraubenregel zugeordnet.

§ 4.

Die einfachste ebene Figur ist ein Dreieck oder ein Parallelogramm (das sich in zwei gleiche Dreiecke zerlegen läßt). Das geometrische Moment eines Parallelogramms, dessen Seiten durch die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ definiert sind, heißt das *äußere Produkt* (oder „Vektorprodukt") dieser Vektoren und wird durch das Symbol $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ bezeichnet. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Strecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von demselben Punkt aus gezogen sind, und daß die Umlaufung des Parallelogramms von diesem Punkte aus in der Richtung von $\mathfrak{A}$ beginnt und in der zu $\mathfrak{B}$ entgegengesetzten Richtung endet. Die Umkehrung des Umlaufssinnes ent-

[1]) Dies ergibt sich sofort aus der Betrachtung der Projektionen von σ und σ_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ auf irgendeine Ebene.

spricht also der Umkehrung der Reihenfolge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Daraus folgt die Gleichung

$$\mathfrak{B}\times\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\,.$$

Der Betrag des äußeren Produktes ist selbstverständlich von der Reihenfolge beider Vektoren unabhängig, und, wie leicht einzusehen, gleich $AB \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Obwohl das kommutative Gesetz für die äußere Multiplikation — im Gegensatz zur inneren — nicht gilt, ist das distributive Gesetz in beiden Fällen gültig. Stellen wir uns nämlich zwei durch die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmte Parallelogramme vor, derart, daß sie eine Seite ($\mathfrak{C}$) gemeinsam haben und erweitern die so bestehende Figur (Abb. 4, wo $OP = O'P' = \mathfrak{A}$, $PQ = P'Q' = \mathfrak{B}$ und $OO' = PP' = QQ' = \mathfrak{C}$ bedeuten) durch die Dreiecke OQP und $O'P'Q'$ mit entgegengesetzten Umlaufsrichtungen und Momenten, so bekommen wir das Parallelogramm $OQQ'O'$, dessen Moment offenbar gleich der geometrischen Summe der Momente von $OPP'O'$ und $PQQ'P'$ sein muß. Da andrerseits $OQ = OP + PQ = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist, so folgt

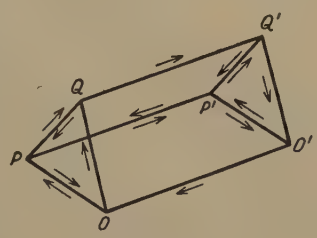

Abb. 4.

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\times\mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\times\mathfrak{C}. \tag{3}$$

Diese Gleichung läßt sich wie die entsprechende Gleichung für die innere Multiplikation auf eine beliebige Anzahl von Summanden verallgemeinern:

$$\left(\sum_p \mathfrak{A}_p\right) \times \left(\sum_q \mathfrak{B}_q\right) = \sum_p \sum_q \mathfrak{A}_p \mathfrak{B}_q. \tag{3a}$$

§ 5.

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drei nichtkoplanare (d. h. nicht in derselben Ebene liegende) Strecken, so bedeutet das doppelte Produkt $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})$ das Volumen eines Parallelepipeds, dessen Seiten diesen Strecken gleich und gleichgerichtet sind (mit dem Vorzeichen + oder —). Dies folgt daraus, daß das äußere Produkt $\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$ seinem Betrage nach gleich ist dem Flächeninhalt des Parallelogramms ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$), welches als Grundfläche des Parallelepipeds ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) aufgefaßt werden kann, während seine Richtung senkrecht zu dieser Fläche steht. Indem verschiedene Flächen zu Grundflächen des Parallelepipeds gewählt werden, ergeben sich für dasselbe Volumen die Ausdrücke $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})$, und zwar mit denselben Vorzeichen wie $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})$ wenn die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *zyklisch* vertauscht werden. Es gilt also für beliebige Vektoren:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\times\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}). \tag{4}$$

Das doppelte äußere Produkt $\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})$ stellt einen Vektor dar, welcher in der Ebene $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ senkrecht zu $\mathfrak{A}$ gerichtet ist. Er kann deshalb in der Form $\beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{C}$ ausgedrückt werden, wobei β und γ zwei skalare Koeffizienten sind, zwischen denen die Beziehung $\beta(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \gamma(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = 0$ bestehen muß. Setzen wir dementsprechend $\beta = \alpha\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\gamma = -\alpha\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wo α einen neuen skalaren Koeffizienten bedeutet, so wird

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \alpha \{(\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}\}.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß $\alpha = 1$ ist, unabhängig von der Größe und Richtung der Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so daß

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} \tag{5}$$

ist. Von dem Beweis der obigen Behauptung sehen wir hier ab, da die Identität (5) unten auf eine andere Weise aufgestellt wird. Aus (5) folgt

$$\mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) + \mathfrak{B} \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) + \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = 0, \tag{5a}$$

wobei die einzelnen Summanden durch zyklische Vertauschung der Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auseinander hervorgehen.

Durch Anwendung von (4) und (5) ergibt sich ferner

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\,(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{C}\,(\mathfrak{D} \times (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})] = \mathfrak{C}\,\{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{D})\},$$

d. h.

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\,(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\,(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{D}). \tag{6}$$

§ 6.

Zum Schluß wollen wir noch die Koordinatendarstellung der Vektorgrößen und -operationen kurz betrachten.

Stellen wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem vor, dessen Achsen OX_1, OX_2, OX_3 in der Richtung von drei Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ gezogen sind. Diese Vektoren sollen nebst den Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \tag{7}$$

noch den Bedingungen

$$\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{e}_3 \times \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3, \tag{7a}$$

welche den „Rechtsschraubencharakter" des Koordinatensystems aussprechen, genügen.

Es sei $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor OP eines Punktes P in bezug auf den Koordinatenursprung O. Seine *Komponenten* längs der Koordinatenachsen — d. h. die *Koordinaten* x_1, x_2, x_3 des Punktes P — sind durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{e}_1 x_1 + \mathfrak{e}_2 x_2 + \mathfrak{e}_3 x_3 \tag{8}$$

definiert. Bilden wir andererseits die *Projektion* von $\mathfrak{r}$ auf irgendeine Achse (X_i) so ergibt sich nach (2), wegen (7) und (8)

$$r_i = \mathfrak{r}\mathfrak{e}_i = x_i.$$

Es fallen also im betrachteten Falle die Komponenten des Radiusvektors mit seinen Projektionen auf die Achsen zusammen. Dasselbe muß offenbar für alle anderen Vektoren gelten, so daß die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$, statt der Gleichung (8), durch die Gleichungen

$$A_i = \mathfrak{A}\mathfrak{e}_i \tag{8a}$$

definiert werden können.

Die Komponenten einer geometrischen Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \cdots$ sind offenbar gleich der algebraischen Summe der entsprechenden Komponenten der einzelnen Summanden.

Setzen wir in den Produkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{A} = \sum_i A_i \mathfrak{e}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \sum_k B_k \mathfrak{e}_k$$

so ergibt sich nach (7)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \sum_i A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \tag{9}$$

Speziell für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \tag{9a}$$

Ferner $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = \sum_i \sum_k A_i B_k (\mathfrak{e}_i \times \mathfrak{e}_k) = \sum_i \sum_{<k} (A_i B_k - A_k B_i)(\mathfrak{e}_i \times \mathfrak{e}_k)$

d. h. nach (7a)

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = \mathfrak{e}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathfrak{e}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathfrak{e}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) \tag{10}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})_1 &= A_2 B_3 - A_3 B_2, \quad (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3, \\ (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})_3 &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Mittels dieser Formeln kann man leicht die Identitäten (4) und (5) aufstellen. Im Falle von (5) z. B. hat man nach (10a):

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})]_1 &= A_2 (\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})_3 - A_3 (\mathfrak{B}\times\mathfrak{C})_2 \\ &= A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) \\ &= B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 C_3) \\ &= B_1 (\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - C_1 (\mathfrak{A}\mathfrak{B}), \end{aligned}$$

was mit (5) übereinstimmt.

B. Differentialoperationen der Vektorrechnung.

§ 7.

Die Vektoren kann man ebenso wie die Skalare als (nach Betrag und Richtung) *veränderliche* Größen auffassen, und zwar als *unabhängige* Veränderliche — Argumente — oder als *abhängige* — Funktionen.

Dabei können die folgenden vier Fälle auftreten: 1. eine skalare Funktion vom skalaren Argument $\alpha(t)$, 2. eine vektorielle Funktion vom skalaren Argument $\mathfrak{A}(t)$, 3. eine skalare Funktion vom vektoriellen Argument $\varphi(\mathfrak{r})$ und 4. eine vektorielle Funktion vom vektoriellen Argument $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$.

Der Anschaulichkeit halber werden wir von vornherein t als die Zeit und $\mathfrak{r}$ als den Radiusvektor verschiedener Raumpunkte (bezogen auf einen „festen" Punkt O) betrachten. Es sind also $\alpha(t)$, $\mathfrak{A}(t)$ Funktionen der Zeit und $\varphi(\mathfrak{r})$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ — Funktionen des Ortes, wobei der „Ort" durch Angabe von $\mathfrak{r}$ definiert wird.

Eine skalare Funktion des Ortes $\varphi(\mathfrak{r})$ kann man sich durch die Konstruktion einer Schar von Flächen

$$\varphi = c = \text{konst}$$

für äquidistante Werte von c veranschaulichen. Die zu diesen Flächen orthogonalen Kurven ergeben dabei in jedem Punkte die Richtung des raschesten Anwachsens von φ.

Die vektoriellen Funktionen des Ortes $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ bezeichnet man gewöhnlich als „Vektorfelder", und veranschaulicht sie durch Konstruktion einer Schar von Linien („Stromlinien", wenn $\mathfrak{F}$ eine Geschwindigkeit, „Kraftlinien", wenn $\mathfrak{F}$ eine Kraft bedeutet), die durch jeden Punkt in der Richtung des zu diesem Punkt gehörigen Vektors $\mathfrak{F}$ gehen, und deren „Dichte" (Anzahl von Linien pro Einheit einer dazu senkrechten Fläche) dem Betrage von $\mathfrak{F}$ proportional ist[1]).

§ 8.

Der gewöhnlichen *Ableitung* einer skalaren Funktion vom skalaren Argumente $\frac{d\alpha}{dt}$ entspricht im Falle einer Vektorfunktion desselben Arguments $\mathfrak{A}(t)$ die „vektorielle Ableitung" $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$, welche als Limes des Vektors

$$\frac{\mathfrak{A}(t+\Delta t) - \mathfrak{A}(t)}{\Delta t}$$

für $\Delta t \to 0$ definiert ist.

Im Falle einer skalaren Funktion vom Vektorargument $\mathfrak{r}$ kann die entsprechende Differentialoperation folgendermaßen definiert werden.

Stellen wir uns eine geschlossene Fläche S vor, die den betrachteten Punkt P ($OP = \mathfrak{r}$) enthält.

Es sei durch jeden Punkt von S ein Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ in Richtung der *äußeren* Normale gezogen. Teilen wir S in unendlich kleine Elemente dS und bilden das Produkt $\mathfrak{n}\varphi dS$, wo $\mathfrak{n}$ und φ sich auf zwei beliebige Punkte von dS beziehen, so wird die geometrische Summe der

[1]) Wenn eine Fläche S zu F nicht senkrecht, sondern schief steht, so wird die Anzahl der diese Fläche schneidenden Linien, auf die Flächeneinheit bezogen, durch die *Projektion* von F auf die Normale zu S gemessen.

unendlich kleinen Vektoren $\mathfrak{n}\varphi dS$ im Limes $dS \to 0$ eine von der Wahl der erwähnten Punkte unabhängige Vektorgröße, die man durch

$$\oint \mathfrak{n}\varphi dS$$

bezeichnet und das *Flächenintegral* der Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ nennt[1]). Diese Funktion werden wir im ganzen in Betracht kommenden Volum als *stetig* voraussetzen[2]).

Dividiert man das Flächenintegral von φ durch das von der Fläche S eingeschlossene Volum V und zieht S zusammen auf den (immer innerhalb bleibenden) Punkt P, so ergibt sich im Limes $S \to 0$ eine von der Gestalt von S oder seiner Änderung beim Grenzübergang unabhängige Vektorgröße[3]); diese Größe entspricht, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, der gewöhnlichen „Ableitung", indem sie das Maß der Änderung von $\varphi(\mathfrak{r})$ „im Punkte P" nach Betrag und Richtung bestimmt. Man nennt sie den *Gradienten* von φ und bezeichnet gewöhnlich mit dem Symbol $\operatorname{grad}\varphi$. Es ist also

$$\operatorname{grad}\varphi = \lim_{S\to 0} \cdot \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n}\varphi dS\,. \tag{11}$$

Für eine vektorielle Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ kann man zwei verschiedene Differentialgrößen bilden, welche dem Gradienten eines Skalars entsprechen, indem das Produkt $\mathfrak{n}\varphi$ in (11) durch das innere oder äußere Produkt von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{F}$ ersetzt wird. Im ersten Falle bekommen wir eine skalare Differentialgröße, welche die *Divergenz* von $\mathfrak{F}$ genannt wird,

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n}\mathfrak{F} dS \tag{11a}$$

im zweiten Falle — eine Vektorgröße — die „*Rotation*" (oder den „curl") von $\mathfrak{F}$:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{F} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{F} dS. \tag{11b}$$

Die Divergenz könnte man als den inneren und die Rotation als den äußeren Gradienten von $\mathfrak{F}$ bezeichnen. Führt man den vektoriellen Operator

$$\nabla = \lim_{S\to 0} \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n} \ldots dS \tag{12}$$

ein und faßt ihn als einen symbolischen Vektor auf, so können die drei

[1]) Der Kreis an dem Integralzeichen bedeutet, daß die Fläche S geschlossen ist.

[2]) D. h. das Verhältnis der Differenz $\varphi(\mathfrak{r}_2) - \varphi(\mathfrak{r}_1)$ für zwei verschiedene Punkte zum Abstande zwischen diesen Punkten $|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|$ muß immer *endlich* bleiben.

[3]) Wegen des Beweises siehe Anmerkung zu § 11.

Differentialoperationen (11), (11a), (11b) symbolisch durch die entsprechenden Multiplikationsoperationen ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}\varphi &= \nabla\varphi, \\ \operatorname{div}\mathfrak{F} &= \nabla\mathfrak{F}, \quad \operatorname{rot}\mathfrak{F} = \nabla\times\mathfrak{F}. \end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

§ 9.

Diese Ausdrucksweise ist manchmal sehr bequem und sehr einleuchtend in Hinsicht auf die analytischen Eigenschaften der verschiedenen Differentialoperationen. Andrerseits ist durch die üblichen Bezeichnungen ihre anschauliche geometrische Bedeutung unmittelbar ausgedrückt. Im Falle der vektoriellen Differentialgrößen $\operatorname{grad}\varphi$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{F}$ kann man diese Bedeutung durch eine einfache Spezialisierung der Gestalt von S sofort erkennen. Es sei nämlich S die Oberfläche eines unendlich kleinen Zylinders mit den Grundflächen S', S'' und der Seitenfläche Σ. Die entsprechenden äußeren Normalen werden wir mit $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{n}''$ und ν bezeichnen, und die Höhe des Zylinders mit h. Wir bilden zunächst die Projektion des Vektors $\oint \mathfrak{n}\varphi\, dS$ auf die Zylinderachse, die von S nach S'' gerichtet sei (also mit $\mathfrak{n}''$ zusammenfalle). Diese Projektion ist gleich dem inneren Produkte $\mathfrak{n}'' \oint \mathfrak{n}\varphi\, dS$ oder, wegen der Konstanz von $\mathfrak{n}''$, $\oint (\mathfrak{n}''\mathfrak{n})\,\varphi\, dS$. Da $\nu\mathfrak{n}'' = 0$ ist, so reduziert sich das obige Integral auf die Summe der Teile, welche den beiden Grundflächen entsprechen, d. h. wegen $\mathfrak{n}''\mathfrak{n}' = -1$, auf die Differenz $\int\varphi''\, dS'' - \int\varphi'\, dS'$. Das Verhältnis dieser Differenz zum Volumen des Zylinders $V = S'h = S''h$ im Limes $S'' \to 0$ und $h \to 0$ muß definitionsgemäß gleich der Projektion des Vektors $\operatorname{grad}\varphi$ auf $\mathfrak{n}''$ sein. Da dabei $\int\varphi''\, dS'' - \int\varphi'\, dS' = (\varphi'' - \varphi')\, S''$ wird, so ist

$$\mathfrak{n}''\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}_{\mathfrak{n}''}\varphi = \operatorname*{Lim}_{h\to 0}\frac{\varphi'' - \varphi'}{h} = \frac{\partial\varphi}{\partial h}. \tag{13}$$

Also: die Projektion von $\operatorname{grad}\varphi$ auf irgendeine Richtung ist gleich der Stärke des Anwachsens von φ in dieser Richtung oder, mit anderen Worten, gleich der (partiellen) Ableitung von φ nach der entsprechenden geradlinigen Achse. Daraus folgt, daß der Vektor $\operatorname{grad}\varphi$ die Richtung und Größe des *raschesten* Anwachsens der Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ bestimmt; die diesen Vektor oder vielmehr das entsprechende Vektorfeld darstellenden Linien sind die zu den Flächen $\varphi = \text{konst}$ orthogonalen Kurven. Durch diesen Zusammenhang wird die geometrische Bedeutung des Gradienten völlig erklärt.

Um die Bedeutung des Vektors $\operatorname{rot}\mathfrak{F}$ aufzuklären, bilden wir auf dieselbe Weise wie früher die Projektion des Integrals $\oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{F}\, dS$ auf $\mathfrak{n}''$. Dabei ergibt sich nach (4)

$$\mathfrak{n}''\operatorname{rot}\mathfrak{F} = \frac{1}{S''h}\oint \mathfrak{n}''(\mathfrak{n}\times\mathfrak{F})\, dS = \frac{1}{S''h}\oint \mathfrak{F}(\mathfrak{n}''\times\mathfrak{n})\, dS = \frac{1}{S''h}\oint \mathfrak{F}(\mathfrak{n}\times\nu)\, d\Sigma,$$

da auf den Grundflächen des Zylinders das äußere Produkt $\mathfrak{n}''\times\mathfrak{n}$

verschwindet. Was die Mantelfläche Σ anbetrifft, so ist es hier gleich 1 und mit den Tangenten zu der Schnittkurve oder Erzeugenden des Zylinders σ gleichgerichtet — nach *der* Seite, welche der Achsenrichtung $\mathfrak{n}''$ im Sinne der Rechtsschraubenregel entspricht. Setzen wir $\mathfrak{n}'' \times \mathfrak{v} = \tau$ („Tangentialvektor") und $d\Sigma = h\,d\sigma$, so wird

$$\frac{1}{S''h}\oint \mathfrak{F}(\mathfrak{n}\times\mathfrak{v})\,d\Sigma = \frac{1}{S''}\oint \mathfrak{F}\cdot\tau\,d\sigma$$

und folglich

$$\operatorname{rot}_{n''}\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{\sigma\to 0}\frac{1}{S''}\oint F_\tau\,d\sigma\,. \tag{14}$$

Das auf der rechten Seite vorkommende Integral heißt im allgemeinen das *Linienintegral* des Vektors $\mathfrak{F}$; speziell für eine *geschlossene* Kurve (Kreis am Integralzeichen!) nennt man es die *Zirkulation* dieses Vektors. Diese „Zirkulation" ist dann von null verschieden, wenn die das Vektorfeld $\mathfrak{F}$ darstellenden Linien geschlossene oder schraubenartige Kurven sind — da in diesem Falle die tangentielle Projektion von $\mathfrak{F}$ in allen Punkten einer geschlossenen Kurve dasselbe Vorzeichen beibehält. Dies geschieht z. B. wenn $\mathfrak{F}$ die Geschwindigkeit der verschiedenen Teilchen eines rotierenden festen Körpers oder einer rotierenden Flüssigkeitsmasse bedeutet. Solche Stellen, wo rot $\mathfrak{F}$ von null verschieden ist, heißen *Wirbel* des Vektorfeldes $\mathfrak{F}$ (r). Diese Wirbelpunkte bilden im allgemeinen kontinuierliche Linien — die sog. *Wirbellinien* (oder Wirbelfäden), welche im Falle von Flüssigkeiten als gekrümmte Rotationsachsen aufgefaßt werden können.

Mittels der Formel (14) kann man leicht zeigen, daß dabei der Vektor rot $\mathfrak{F}$ mit der Rotationsachse gleichgerichtet und seinem Betrage nach gleich der doppelten Drehgeschwindigkeit ist. Dadurch erklärt sich die Bezeichnung „Rotation".

Der Ausdruck (11a) für die Divergenz kann durch Spezialisierung der Fläche S nicht umgeformt werden wegen des skalaren Charakters dieser Differentialgröße. Seine geometrische Bedeutung wird aber unmittelbar klar, wenn man sich das Vektorfeld $\mathfrak{F}$ durch die entsprechenden „$\mathfrak{F}$-Linien" veranschaulicht. Das Produkt $F_n dS$ kann man dabei deuten als die Anzahl solcher Linien, welche durch das Flächenelement hindurchgehen, und zwar nach außen, wenn F_n positiv oder nach innen, wenn F_n negativ ist. Das Integral $\oint F_n dS$, welches im Anschluß an dieses Bild der „*Fluß*" von $\mathfrak{F}$ durch S genannt wird[1]), ist also gleich dem Überschuß der Anzahl der $\mathfrak{F}$-Linien, welche aus S herauskommen, über die Anzahl solcher Linien, die in S hineintreten (dieser Überschuß kann selbstverständlich sowohl positiv wie auch negativ ausfallen).

[1]) Auch wenn S ungeschlossen ist; dabei muß, wie üblich, die Normale $\mathfrak{n}$ in *der* Richtung gezogen werden, welche dem Umlaufssinne auf der begrenzenden Kurve σ nach der Rechtsschraubenregel zugeordnet ist.

Wenn innerhalb S die Divergenz von $\mathfrak{F}$ verschwindet, so muß nach (11a) auch der totale Fluß des Vektors $\mathfrak{F}$ durch S gleich null sein. Dies bedeutet, daß die das Vektorfeld $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ darstellenden Linien durch das von S eingeschlossene Gebiet hindurchgehen, ohne hier zu beginnen oder zu enden. Ist aber in einem Punkte oder Gebiete div $\mathfrak{F}$ von null verschieden, so muß der Fluß von $\mathfrak{F}$ durch eine diesen Punkt einschließende Fläche auch von null verschieden sein. Wenn speziell div $\mathfrak{F} > 0$ ist, so haben wir innerhalb S eine „*Quelle*" der $\mathfrak{F}$-Linien, d. h. eine solche Stelle, wo sie beginnen und nach verschiedenen Richtungen *divergieren*. Dadurch erklärt sich die Bezeichnung „Divergenz". Negativen Werten von div $\mathfrak{F}$ entspricht eine „Sinkstelle" („negative Quelle") der $\mathfrak{F}$-Linien, zu welcher sie von allen Seiten konvergieren (aus diesem Grunde wurde die Größe — div $\mathfrak{F}$ vielfach „Konvergenz" genannt).

§ 10.

Wir müssen noch eine Differentialoperation erwähnen, welche sich auf die Vektorfunktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ bezieht und in engster Analogie mit dem Gradienten einer skalaren Funktion steht. Diese Operation kann man aber nur definieren bei Angabe eines zweiten Vektors oder einer Vektorfunktion $\mathfrak{A}$, die selbst nicht differentiiert wird, sondern die *Richtung*, in welcher die Differentiation der betrachteten Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ in jedem Punkte zu geschehen hat, bestimmt. Wir knüpfen dabei an die Formel (13) des vorangehenden Paragraphen an; ersetzt man darin φ durch $\mathfrak{F}$, so ergibt sich eine Operation, welche wir durch das Symbol ($\mathfrak{n}''$ grad) bezeichnen werden:

$$(\mathfrak{n}'' \operatorname{grad})\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{h \to 0} \frac{\mathfrak{F}'' - \mathfrak{F}'}{h} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial h}. \tag{15}$$

Durch Umkehrung der Überlegung, womit wir von der Formel (11) zu (13) gelangt sind, erhalten wir die folgende den Formeln (11), (11a), (11b) entsprechende Definition der neuen Operation

$$(\mathfrak{A} \operatorname{grad})\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{S \to 0} \frac{1}{V} \oint (\mathfrak{A}\mathfrak{n})\mathfrak{F}\, dS,$$

wobei $\mathfrak{A}$ ebenso wie $\mathfrak{n}''$ zunächst einen konstanten Einheitsvektor bedeuten soll. Wir können uns aber von dieser Beschränkung sofort befreien, indem wir unter dem Integralszeichen den Wert von $\mathfrak{A}$ in dem betreffenden Punkte (auf welchem sich die Oberfläche S zusammenziehen soll) verstehen, d. h. ganz allgemein setzen

$$(\mathfrak{A} \operatorname{grad})\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{S \to 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathfrak{A}\mathfrak{n})\mathfrak{F}\, dS \right\}_{\mathfrak{A} = \text{konst}} \tag{15a}$$

Der Vektor ($\mathfrak{A}$ grad) $\mathfrak{F}$ ist also gleich der mit dem Betrag von $\mathfrak{A}$ multi-

plizierten „partiellen Ableitung" von $\mathfrak{F}$ in der $\mathfrak{A}$-Richtung[1]). Betrachten wir z. B. zwei unendlich nahe Punkte $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ und setzen $\mathfrak{A} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = d\mathfrak{r}$, so bedeutet der Vektor $(d\mathfrak{r}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{F}$ nichts anderes als die Vektordifferenz $d\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{r}_2) - \mathfrak{F}(\mathfrak{r}_1)$ — ebenso wie $d\mathfrak{r} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi = d\varphi = \varphi(\mathfrak{r}_2) - \varphi(\mathfrak{r}_1)$ ist. Es sei bemerkt, daß das skalare Produkt $\mathfrak{A}\ \mathrm{grad}\,\varphi$ auf die durch (15a) definierte zusammengesetzte Operation zurückgeführt werden kann, indem in (15a) die vektorielle Funktion $\mathfrak{F}$ durch die skalare φ ersetzt wird. Es ist nämlich

$$(\mathfrak{A}\,\mathrm{grad})\,\varphi = \operatorname*{Lim}_{S\to 0}\left\{\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\varphi\,dS\right\}_{\mathfrak{A}=\text{konst}} = \operatorname*{Lim}_{S\to 0}\left\{\frac{1}{V}\oint\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{n}\varphi)\,dS\right\}_{\mathfrak{A}=\text{konst}} =$$

$$= \left(\mathfrak{A}\cdot\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS\right) = \mathfrak{A}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Wenn man in (15a) nicht $\mathfrak{A}$, sondern $\mathfrak{F}$ als konstant voraussetzt, so ergibt sich

$$\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\left\{\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\mathfrak{F}\,dS\right\}_{\mathfrak{F}=\text{konst}} = \mathfrak{F}\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint\mathfrak{n}\,\mathfrak{A}\,dS = \mathfrak{F}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,.$$

Es ist nun leicht zu beweisen, daß im allgemeinen Falle, wenn die beiden Größen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ als veränderlich betrachtet werden, das Integral $\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}\,dS$ im Limes einfach gleich der Summe der obigen Ausdrücke sein muß. In der Tat, setzt man $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \Delta\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \Delta\mathfrak{F}$, wo $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{F}_0$ die Werte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im betreffenden Punkte bedeuten, so wird

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\,\mathfrak{F} = (\mathfrak{A}_0\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}_0 + (\mathfrak{A}_0\mathfrak{n})\,\Delta\mathfrak{F} + (\Delta\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}_0 + (\Delta\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{n})\,\Delta\mathfrak{F},$$

ferner

$$\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\int(\mathfrak{A}_0\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}_0\,dS = 0,$$

$$\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}_0\mathfrak{n})\Delta\mathfrak{F}\,dS = \operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}_0\mathfrak{n})\mathfrak{F}\,dS = (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{F},$$

$$\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\Delta\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}_0\,dS = \operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\mathfrak{F}_0\,dS = \mathfrak{F}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,,$$

[1]) Man könnte, im Anschluß an (15a), zwei andere Differentialoperationen derselben Art definieren, nämlich

$$(\mathfrak{A}\times\mathrm{grad})\ \mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{S\to 0}\left\{\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\times\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}\,dS\right\}_{\mathfrak{A}=\text{konst.}}$$

$$\mathfrak{A}(\times\mathrm{grad})\times\mathfrak{F} = \operatorname*{Lim}_{S\to 0}\left\{\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\times\mathfrak{n})\times\mathfrak{F}\,dS\right\}_{\mathfrak{A}=\text{konst.}}$$

Diese Operationen sind aber für praktische Anwendungen der Vektorrechnung unwesentlich, und lassen sich dabei auf die früheren zurückführen. Und zwar gelten die folgenden Identitäten $(\mathfrak{A}\times\mathrm{grad})\,\mathfrak{F} = (\mathfrak{A}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{F})$ und $(\mathfrak{A}\times\mathrm{grad})\times\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{F} + (\mathfrak{A}\ \mathrm{grad})\,\mathfrak{F} - \mathfrak{A}\ \mathrm{div}\ \mathfrak{F}$.

und da $\Delta\mathfrak{F}$ und $\Delta\mathfrak{A}$ unendlich kleine Größen sind (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A}$),

$$\lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\Delta\mathfrak{A}\mathfrak{n})\,\Delta\mathfrak{F}\,dS = 0.$$

Folglich wird:

$$\lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\,\mathfrak{F}\,dS = (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{F} + \mathfrak{F}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,. \qquad (15\mathrm{b})$$

§ 11.

Wir teilen das Volumen V, welches durch die (*nicht* unendlich kleine) Oberfläche S begrenzt ist, in zwei Teilvolumina V_1 und V_2 ein, und bezeichnen die diese Teilvolumina begrenzenden Flächen mit S_1 bzw. S_2. Auf den mit S gemeinsamen Teilen von S_1 und S_2 fallen die entsprechenden äußeren Normalen $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ mit $\mathfrak{n}$ zusammen; auf der Fläche $S_{1,2}$, welche V_1 von V_2 trennt, sind sie einander entgegengerichtet, so daß hier $\mathfrak{n}_2 = -\mathfrak{n}_1$ oder $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 = 0$ ist.

Daraus folgt, daß die Summe der beiden Integrale $\oint\mathfrak{n}_1\varphi\,dS$, und $\oint\mathfrak{n}_2\varphi\,dS_2$ dem ursprünglichen Flächenintegral $\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS$ gleich sein muß, ganz unabhängig von der Form der Trennungsfläche $S_{1,2}$ (da die Integrale $\oint\mathfrak{n}_1\varphi\,dS_{1,2}$ und $\oint\mathfrak{n}_2\varphi\,dS_{1,2}$ sich gegenseitig zerstören.

Durch Fortsetzung dieses Vorgangs kann man V in unendlich kleine Volumenelemente V_i, die durch unendlich-kleine geschlossene Flächen S_i begrenzt sind, einteilen, so daß die Summe $\sum_i\oint\mathfrak{n}_i\varphi\,dS_i$ immer gleich $\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS$ bleibt[1]). Gehen wir zur Grenze $S_i\to 0$ über und beachten, daß $\lim_{S_i\to 0}\frac{1}{V_i}\oint\mathfrak{n}_i\varphi\,dS_i = \mathrm{grad}\,\varphi_i$ ist, so bekommen wir

[1]) Auf Grund dieses Satzes kann man leicht die Gültigkeit unserer in § 8 geäußerten Behauptung betreffs der Unabhängigkeit des $\lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS$ von der Gestalt der Oberfläche S beweisen. Wir stellen uns vor, daß die Elemente V_i (S_i) *dieselbe Gestalt und Größe* haben — ausschließlich der Grenzelemente, deren *relative* Anzahl und Betrag zum Integral $\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS$ mit steigender Anzahl N *aller* Elemente zu null strebt. Ist die Oberfläche S selbst unendlich klein und N unendlich groß, so kann man, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion φ, alle Teilintegrale $\oint\mathfrak{n}_i\,dS_i$ bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als einander gleich betrachten und folglich $\oint\mathfrak{n}_i\varphi_i\,dS_i \simeq \frac{1}{N}\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS$ setzen. Da mit derselben Annäherung $V_i = \frac{V}{N}$ ist, so folgt, daß der Grenzwert von $\frac{1}{V}\oint\mathfrak{n}\varphi\,dS$ für eine verschwindend kleine Oberfläche S von *irgendeiner* Gestalt mit dem Werte von $\frac{1}{V_i}\oint\mathfrak{n}_i\varphi_i\,dS_i$ für eine unendlich kleine Oberfläche von bestimmter — z. B. Würfel-Gestalt — zusammenfallen muß, also von der Gestalt von S unabhängig ist.

$$\oint \mathfrak{n}\varphi dS = \operatorname*{Lim}_{V_i \to 0} \sum_i \operatorname{grad} \varphi_i V_i .$$

oder, indem die Summe durch ein Volumenintegral ersetzt wird,

$$\oint \mathfrak{n}\varphi dS = \int \operatorname{grad} \varphi dV. \tag{16}$$

Auf dieselbe Weise bekommt man aus (8), (9) und (15b) die Transformationsformeln

$$\oint F_n dS = \oint \mathfrak{n}\mathfrak{F} dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{F} dV, \tag{16a}$$

$$\oint \mathfrak{n} \times \mathfrak{F} dS = \int \operatorname{rot} \mathfrak{F} dV, \tag{16b}$$

$$\oint (\mathfrak{n}\mathfrak{A})\mathfrak{F} dS = \int (\mathfrak{A} \operatorname{grad})\, \mathfrak{F} dV + \int \mathfrak{F} \operatorname{div} \mathfrak{A} dV. \tag{16c}$$

§ 12.

Ähnliche Transformationsformeln erhält man für Linienintegrale, die längs einer geschlossenen Kurve σ genommen sind. Ersetzt man nämlich σ durch ein Netz von unendlich kleinen ebenen Kurven σ_i, die die Flächenelemente S_i irgendeiner durch σ begrenzten (also nicht geschlossenen) Fläche S begrenzen und beachtet, daß die Summe der Integrale $\oint \tau_i \mathfrak{F} d\sigma_i$ immer gleich dem ursprünglichen Integral $\oint \tau \mathfrak{F} d\sigma$ bleiben muß (da die Tangentialvektoren τ_i auf jeder Trennungslinie zweier Flächenelemente S_i entgegengerichtet sind), so bekommt man im Limes $S_i, \sigma_i \to 0$, nach (14),

$$\oint \tau \mathfrak{F} d\sigma = \sum_i \oint \tau_i \mathfrak{F} d\sigma_i = \sum_i \mathfrak{n}_i \operatorname{rot} \mathfrak{F}_i S_i$$

oder

$$\oint F_\tau d\sigma = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{F} dS, \tag{17}$$

wo $\operatorname{rot}_n \mathfrak{F} = \mathfrak{n} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{F}$ ist und $\mathfrak{n}$ die Normale zu dS bedeutet; dabei wird diese Normale in der Richtung gezogen, welche dem durch den Tangentialvektor τ definierten Umlaufssinn auf der Grenzkurve σ nach der Rechtsschraubenregel entspricht.

Die Formel (16a) wird gewöhnlich als *Gauß*scher und (17) als *Stokes*scher Satz bezeichnet. Zur Formel (17) kann man eine ähnliche Formel hinzufügen, die sich bei der Ersetzung der Vektorfunktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{r})$ durch eine skalare Funktion $\varphi(r)$ ergibt. Dabei gilt wie oben die Identität

$$\oint \tau \varphi d\sigma = \sum_i \oint \tau_i \varphi_i d\sigma_i .$$

Die Umformung eines längs einer unendlich kleinen Kurve σ_i erstreckten Linienintegrals $\oint \tau_i \varphi_i d\sigma_i$ geschieht am einfachsten folgendermaßen. Wir denken uns σ_i als die Erzeugende der Zylinderfläche, die wir oben

bei der Ableitung der Formel (13) gebraucht haben und bilden anstatt des inneren Produktes $\mathfrak{n}'' \oint \mathfrak{n}\varphi dS$ das äußere Produkt $\mathfrak{n}'' \times \oint \mathfrak{n}\varphi dS$ (der Index i werde vorläufig fortgelassen). Dabei erhalten wir ebenso wie bei der Ableitung der Formel (14)

$$\mathfrak{n}'' \times \oint \mathfrak{n}\varphi dS = \oint \mathfrak{n}'' \times \mathfrak{n}\varphi dS = \int \mathfrak{n}'' \times \nu\varphi d\Sigma = h \oint \tau\varphi d\sigma$$

und folglich, nach (11),

$$\mathfrak{n}'' \times \operatorname{grad} \varphi S'' = \oint \tau\varphi d\sigma,$$

oder, indem der Index i wieder eingeführt wird,

$$\oint \tau_i \varphi_i d\sigma_i = \mathfrak{n}_i \times \operatorname{grad} \varphi_i S_i.$$

Durch Summation und Grenzübergang ($S_i \to 0$) erhalten wir also die folgende Formel:

$$\oint \tau\varphi d\sigma = \int \mathfrak{n} \times \operatorname{grad} \varphi dS. \tag{17a}$$

§ 13.

Durch Anwendung der oben betrachteten Differentialoperationen auf die Funktionen

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi, \quad \nabla\mathfrak{F} = \operatorname{div}\mathfrak{F}, \quad \nabla\times\mathfrak{F} = \operatorname{rot}\mathfrak{F},$$

welche der gewöhnlichen Ableitung 1. Ordnung entsprechen, bekommen wir die folgenden 5 Ableitungen 2. Ordnung:

$$(\nabla\nabla)\,\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi, \qquad \nabla(\nabla\mathfrak{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{F}, \qquad \nabla\times\nabla\varphi = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\nabla(\nabla\times\mathfrak{F}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{F}, \quad \nabla\times(\nabla\times\mathfrak{F}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{F}.$$

Wäre der Differentialoperator ∇ kein symbolischer, sondern ein echter Vektor, so müßten die doppelten „Produkte" $\nabla\times\nabla\varphi = (\nabla\times\nabla)\varphi$ und $\nabla(\nabla\times\mathfrak{F})$ identisch (in φ bzw. in $\mathfrak{F}$) verschwinden, d. h. es sollten die folgenden Identitäten bestehen:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0, \tag{18}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{F} = 0. \tag{18a}$$

Es ist nun leicht, auf Grund der obigen Transformationsformeln, einzusehen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Denken wir uns die Fläche S in (17) und (17a) als *geschlossen*, so reduziert sich die begrenzende Kurve σ auf einen Punkt und das entsprechende Linienintegral verschwindet. Es ergeben sich auf diese Weise die Identitäten

$$\oint \mathfrak{n} \operatorname{rot}\mathfrak{F} dS = 0, \qquad \oint \mathfrak{n}\times\operatorname{grad}\varphi dS = 0$$

oder durch Transformation nach den Formeln (16a) und (16b)

$$\int \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{F}\,dV = 0, \quad \int \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi\,dV = 0.$$

Da das durch S eingeschlossene Volumen V ganz willkürlich ist, so müssen in diesen Volumintegralen die Integranden identisch verschwinden — woraus sich die Formeln (18) und (18a) ergeben.

Die Operation $\nabla\nabla\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$ schreibt man gewöhnlich in der Form $\nabla^2\varphi$, wo $\nabla^2 = \nabla\nabla$ der *Laplace*sche Operator heißt (er wird auch vielfach durch Δ bezeichnet).

Nach der Definition von div kann man offenbar schreiben:

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}\cdot\operatorname{grad}\varphi\,dS,$$

oder da $\mathfrak{n}\operatorname{grad}\varphi = (\mathfrak{n}\operatorname{grad})\varphi$ ist,

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint (\mathfrak{n}\operatorname{grad})\varphi\,dS. \tag{19}$$

Diese Formel zeigt, daß die Operation ∇^2 nicht nur auf skalare, sondern auch auf vektorielle Funktionen angewandt werden kann. Und zwar wird, wenn wir in (19) φ durch $\mathfrak{F}$ ersetzen,

$$\nabla^2\mathfrak{F} = \operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint (\mathfrak{n}\operatorname{grad})\mathfrak{F}\,dS. \tag{19a}$$

Führt man wieder statt des Symbols grad den symbolischen Vektor ∇ ein und behandelt ihn als einen gewöhnlichen Faktor (der aber immer *vor* der zu differentiierenden Funktion $\mathfrak{F}$ stehen muß), so folgt nach der algebraischen Identität (5), wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{B} = \nabla$ (oder umgekehrt) und $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}$ gesetzt wird,

$$(\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{F} = \mathfrak{n}(\nabla\mathfrak{F}) - \nabla\times(\mathfrak{n}\times\mathfrak{F}) = \nabla(\mathfrak{n}\mathfrak{F}) - \mathfrak{n}\times(\nabla\times\mathfrak{F}).$$

Da $$\operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}(\nabla\mathfrak{F})\,dS = \operatorname{grad}(\nabla\mathfrak{F}) = \nabla\operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\int \mathfrak{n}\mathfrak{F}\,dS$$

und

$$\operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}\times(\nabla\times\mathfrak{F})\,dS = \operatorname{rot}\nabla\times\mathfrak{F} = \nabla\times\operatorname{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{F}\,dS$$

ist, so ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$\nabla^2\mathfrak{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{F} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{F}. \tag{19b}$$

Diese Identität werden wir im nächsten Paragraphen mittels der Koordinatendarstellung der vektoriellen Differentialoperationen strenger beweisen.

§ 14.

Eine solche Darstellung bekommt man am einfachsten folgendermaßen:

Wir betrachten die Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ als eine gewöhnliche skalare Funktion der drei Komponenten x_1, x_2, x_3 des Vektorarguments $\mathfrak{r}$.

Dabei ergibt sich nach (13), indem der Vektor $\mathfrak{n}''$ durch je einen der die Koordinatenachsen bestimmenden Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ ersetzt wird,

$$\mathfrak{e}_i \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

Die Komponenten des Vektors $\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi$ sind also gleich den Partialableitungen nach den entsprechenden Koordinaten der Funktion $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Daraus folgt, daß der Operator ∇ ganz unabhängig von der Beschaffenheit der Funktion φ definiert werden kann als ein (symbolischer) Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$. — In der Form

$$\nabla = \mathfrak{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{20a}$$

geschrieben, heißt er der *Hamilton*sche Operator und kann sowohl auf skalare wie auf vektorielle Funktionen angewandt werden, wenn das Vektorargument $\mathfrak{r}$ dieser Funktionen durch die drei skalaren Argumente x_1, x_2, x_3 ersetzt wird. Auf diese Weise bekommt man die folgenden Ausdrücke für div $\mathfrak{F}$, rot $\mathfrak{F}$ und $(\mathfrak{A} \operatorname{grad}) \mathfrak{F}$:

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \nabla \mathfrak{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} F_3. \tag{21}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{F} = \nabla \times \mathfrak{F} = \mathfrak{e}_1 \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) + \mathfrak{e}_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \mathfrak{e}_3 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right), \tag{21a}$$

d. h.

$$\operatorname{rot}_1 \mathfrak{F} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \quad \operatorname{rot}_2 F = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \operatorname{rot}_3 F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \tag{21b}$$

und

$$(\mathfrak{A} \operatorname{grad} \mathfrak{F})_i = \mathfrak{A} \operatorname{grad} F_i = A_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial F_i}{\partial x_3}. \quad (i = 1, 2, 3) \tag{21c}$$

Diese Formeln kann man auch unmittelbar aus den entsprechenden Definitionsgleichungen (11a), (11b) [bzw. (14) und (15)] ableiten, indem man für S die Oberfläche eines unendlich kleinen Parallelepipeds wählt, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Im Falle von div $\mathfrak{F}$ z. B. ergibt sich, wenn diese Seiten durch Δx_i und die dazu senkrechten Flächen durch S_i', S_i'' $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet werden (wobei S_i' sich auf den Punkt x_i und S_i'' auf den Punkt $x_i + \Delta x_i$ bezieht):

$$\oint \mathfrak{n} \mathfrak{F} \, dS = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \int (\mathfrak{n}' \mathfrak{F}')_i \, dS_i' + \int (\mathfrak{n}'' \mathfrak{F}'')_i \, dS_i'' \right\}$$

oder, da $\mathfrak{n}_i'' = \mathfrak{e}_i$ und $\mathfrak{n}_i' = -\mathfrak{e}_i$, d. h. $(\mathfrak{n}'' \mathfrak{F}'')_i = +\mathfrak{F}_i''$ und $(\mathfrak{n}' \mathfrak{F}')_i = -\mathfrak{F}_i'$ ist,

$$\oint \mathfrak{n} \mathfrak{F} \, dS = \sum_i \int (F_i'' - F_i') \, dS_i = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Delta x_i S_i = \left(\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) \cdot V,$$

wo $V = \Delta x_i \cdot S_i = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$ das Volumen des Parallelepipeds bedeutet. Selbstverständlich sind diese Gleichungen nur annäherungsweise bis auf Größen derselben Ordnung wie die Produkte $V \cdot \Delta x_i$

erfüllt. Gehen wir aber zur Grenze $\Delta x_i \to 0$ über, so erhalten wir die ganz exakte Gleichung

$$\operatorname{Lim}_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n} \mathfrak{F} dS = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

welche mit (19) gleichbedeutend ist.

Mittels der Formeln (20) und (21) ergibt sich

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi \qquad (22)$$

Den *Laplace*schen Operator ∇^2 kann man also tatsächlich als das Quadrat des *Hamilton*schen Operators (18a) definieren:

$$\nabla^2 = (\nabla \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \qquad (22a)$$

Es ist nun leicht sich zu überzeugen, daß derselbe Ausdruck sich für ∇^2 auf Grund der Gleichung (19b) ergibt. Bilden wir nämlich die Projektion der rechten Seite von (19b) auf irgendeine, z. B. die erste Achse (X_1), so wird, nach (20), (21) und (21b):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right)$$
$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2}$$

und dies ist nichts anderes, als die erste Komponente des Vektors $\nabla^2 \mathfrak{F}$, wenn dabei ∇^2 als ein *skalarer* Faktor aufgefaßt wird. Es sei bemerkt, daß die Projektion dieses Vektors auf irgendeine Richtung $\mathfrak{n}$ gleich div grad F_n ist, d. h.

$$|\nabla^2 \mathfrak{F}|_n = \nabla^2 F_n. \qquad (22b)$$

§ 15.

Nachdem wir oben die Differentialoperationen der Vektorrechnung definiert und erläutert haben, müssen wir — wie in der üblichen Differentialrechnung — die Regeln feststellen, welche die Anwendung dieser Operationen auf Summen, Produkte und zusammengesetzte Funktionen beherrschen.

Die „Ableitungen" einer geometrischen Summe von mehreren Vektorfunktionen eines skalaren oder vektoriellen Arguments ist offenbar ebenso wie bei der gewöhnlichen Differentiation gleich der geometrischen Summe der entsprechenden Ableitungen dieser Funktionen. Z. B.: $\frac{d}{dt}\{\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t)\} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$, $\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi$, $\operatorname{div}(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}) = \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{div} \mathfrak{F}$ usw.

Man kann ferner leicht beweisen, daß im Falle eines Produktes zweier Funktionen eines *skalaren* Arguments, dieselben Formeln wie bei skalaren Funktionen gültig bleiben; und zwar ist:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathfrak{A}) = \frac{d\varphi}{dt} \mathfrak{A} + \varphi \frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}, \tag{23a}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}) = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\times\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\times\frac{d\mathfrak{B}}{dt}. \tag{23b}$$

Die letzte Formel ergibt sich z. B. folgendermaßen:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}) = \operatorname*{Lim}_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathfrak{A}+\Delta\mathfrak{A})\times(\mathfrak{B}+\Delta\mathfrak{B}) - \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}{\Delta t} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta t}\times\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\times\frac{\Delta\mathfrak{B}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathfrak{A}}{\Delta t}\times\frac{\Delta\mathfrak{B}}{\Delta t}\Delta t\right\} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\times\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\times\frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Die Ableitung eines Produktes zweier Faktoren nach einem skalaren Argument ist also gleich der Summe der Ableitungen, die sich ergeben, wenn je einer dieser Faktoren als variabel und der andere als konstant betrachtet wird. Diese Regel läßt sich leicht verallgemeinern auf doppelte und kompliziertere Produkte, und *bleibt auch bei der Differentiation von Funktionen eines Vektorarguments* (r) *gültig*. Diese Behauptung läßt sich für jede Differentiationsart auf dieselbe Weise beweisen, wie wir es in § 10 für die zwei verschiedenen Operationen, welche in dem Ausdruck $\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint(\mathfrak{A}\mathfrak{n})\mathfrak{F}\,dS$ stecken, getan haben. Man kann sie auch in Verbindung mit der Koordinatendarstellung der vektoriellen Differentialoperationen als eine direkte Folge des entsprechenden Satzes für skalare Argumente betrachten.

In dem einfachsten Fall von zwei Faktoren — welche skalare oder vektorielle Funktionen des Vektorarguments r sein können — muß man folgende vier Arten von Produkten unterscheiden:

$$\varphi\psi,\quad \varphi\mathfrak{F},\quad \mathfrak{E}\mathfrak{F},\quad \mathfrak{E}\times\mathfrak{F},$$

und dementsprechend sechs Ableitungsarten, nämlich:

$$\nabla(\varphi\psi) = \operatorname{grad}(\varphi\psi),\quad \nabla(\varphi\mathfrak{F}) = \operatorname{div}\varphi\mathfrak{F},\quad \nabla\times(\varphi\mathfrak{F}) = \operatorname{rot}\varphi\mathfrak{F},$$

$$\nabla\cdot(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}) = \operatorname{div}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}),\quad \nabla\times(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}) = \operatorname{rot}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F})$$

$$\text{und } \nabla(\mathfrak{E}\mathfrak{F}) = \operatorname{grad}(\mathfrak{E}\mathfrak{F}).$$

Die Ausführung dieser Differentiationen könnte man auf dem Umwege der Koordinatendarstellung vollziehen; es ist aber einfacher und zweckmäßiger, die entsprechenden Rechnungen mit Hilfe des vektoriellen Differentialoperators ∇ direkt auszuführen. Dabei kann dieser, wie schon oben manchmal behauptet war, als ein gewöhnlicher Faktor betrachtet werden, muß aber immer *unmittelbar vor* der zu differentierenden Funktion stehen. Wenn die letzte Forderung nicht von vornherein erfüllt ist, so muß die Reihenfolge der Faktoren zunächst durch Anwendung der algebraischen Identitäten (4) und (5) vertauscht werden. Auf diese Weise erhalten wir ohne weiteres die folgenden Formeln:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi,$$

$$\nabla(\varphi\mathfrak{F}) = \varphi\nabla\mathfrak{F} + \nabla\varphi\cdot\mathfrak{F},\quad \nabla\times(\varphi\mathfrak{F}) = \varphi\nabla(\mathfrak{F}) + \nabla\varphi\times\mathfrak{F}$$

oder mit den üblichen Bezeichnungen

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi, \tag{24}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathfrak{F}) = \varphi \operatorname{div}\mathfrak{F} + \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathfrak{F}, \tag{24a}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathfrak{F}) = \varphi \operatorname{rot}\mathfrak{F} + \operatorname{grad}\varphi \times \mathfrak{F}. \tag{24b}$$

In der letzten Formel kann die Reihenfolge der beiden Faktoren im zweiten Gliede der rechten Seite zunächst zweifelhaft erscheinen. Zur Bestimmung der richtigen Reihenfolge muß man in diesen und in analogen Fällen auf die ursprüngliche Definition der entsprechenden Operation zurückgehen. Betrachtet man $\mathfrak{F}$ als konstant, so wird nach (11b)

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathfrak{F}) = \lim_{S\to 0} \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n} \times (\varphi\mathfrak{F}) dS = \lim_{S\to 0} \left[\frac{1}{V} \oint \mathfrak{n}\varphi dS \right] \times \mathfrak{F} = \operatorname{grad}\varphi \times \mathfrak{F},$$

in Übereinstimmung mit (24b).

Ferner ist nach (4):

$$\{\nabla(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{F}=\text{konst}} = \mathfrak{F}(\nabla\times\mathfrak{E}), \quad \{\nabla(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{E}=\text{konst}} = -\mathfrak{E}(\nabla\times\mathfrak{F}),$$

und folglich:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \operatorname{rot}\mathfrak{E} - \mathfrak{E} \operatorname{rot}\mathfrak{F}. \tag{25}$$

Mittels der Identität (5), wenn $\mathfrak{A} = \nabla$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}$ gesetzt wird, ergibt sich

$$\{\nabla\times(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{F}=\text{konst}} = (\mathfrak{F}\nabla)\mathfrak{E} - \mathfrak{F}(\nabla\mathfrak{E}),$$
$$\{\nabla\times(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{E}=\text{konst}} = \mathfrak{E}(\nabla\mathfrak{F}) - (\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{F},$$

also

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{F}) = (\mathfrak{F}\operatorname{grad})\mathfrak{E} - (\mathfrak{E}\operatorname{grad})\mathfrak{F} + \mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{E}, \tag{26}$$

und auf dieselbe Weise, mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{B} = \nabla$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$, bzw. $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \nabla$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}$:

$$\{\nabla(\mathfrak{E}\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{F}=\text{konst}} = (\mathfrak{F}\nabla)\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\times(\nabla\times\mathfrak{E}),$$
$$\{\nabla(\mathfrak{E}\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{E}=\text{konst}} = (\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{F} + \mathfrak{E}\times(\nabla\times\mathfrak{F}),$$

d. h.

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{E}\mathfrak{F}) = (\mathfrak{E}\operatorname{grad})\mathfrak{F} + (\mathfrak{F}\operatorname{grad})\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\times\operatorname{rot}\mathfrak{F} + \mathfrak{F}\times\operatorname{rot}\mathfrak{E}. \tag{27}$$

Hängen die Funktionen φ oder $\mathfrak{F}$ nicht *unmittelbar* von $\mathfrak{r}$, sondern von einer anderen *skalaren* Funktion dieses Arguments $f(\mathfrak{r})$ ab, so reduzieren sich ihre vektoriellen Ableitungen grad, div, rot, $(\mathfrak{A}\operatorname{grad})$ nach $\mathfrak{r}$ — ebenso wie in der üblichen Differentialrechnung — auf die *entsprechenden* (gewöhnlichen, inneren, äußeren) Produkte der vektoriellen Ableitung, d. h. des Gradienten von f mit der Ableitung von φ oder $\mathfrak{F}$ nach dem skalaren Argument f. Es gelten also die folgenden Formeln:

$$\nabla\varphi(f) = (\nabla f)\frac{d\varphi}{df}, \quad \nabla\mathfrak{F}(f) = \nabla f \cdot \frac{d\mathfrak{F}}{df}, \quad \nabla\times\mathfrak{F}(f) = \nabla f \times \frac{d\mathfrak{F}}{df},$$

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{F}(f) = (\mathfrak{A}\nabla f)\frac{d\mathfrak{F}}{df}$$

oder in der üblichen Schreibweise

$$\operatorname{grad}\varphi(f) = (\operatorname{grad} f)\frac{d\varphi}{df}, \tag{28}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{F}(f)=(\operatorname{grad}f)\frac{d\mathfrak{F}}{df}, \tag{28a}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{F}(f)=(\operatorname{grad}f)\times\frac{d\mathfrak{F}}{df}, \tag{28b}$$

$$(\mathfrak{A}\operatorname{grad})\mathfrak{F}(f)=(\mathfrak{A}\operatorname{grad}f)\frac{d\mathfrak{F}}{df}. \tag{28c}$$

Zur Erläuterung dieser Differentiationsregeln wollen wir die Formel (28b) ausführlicher ableiten. — Setzt man in

$$\operatorname{rot}\mathfrak{F}=\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{F}\,dS,$$

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0+\Delta\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0+\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0\Delta f=\mathfrak{F}_0+\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0(f-f_0),$$

wo der Index $_0$ sich auf den betrachteten Punkt bezieht, so wird, mit Rücksicht auf $\oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{F}_0\,dS=0$ und $\oint \mathfrak{n}\times\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0 f_0\,dS=0$

$$\oint \mathfrak{n}\times\mathfrak{F}\,dS=\oint \mathfrak{n}\times\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0 f\,dS=\left[\oint \mathfrak{n}\varphi\,dS\right]\times\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0$$

und folglich:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{F}=\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\left[\oint \mathfrak{n}\varphi\,dS\right]\times\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0=\left[\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}\varphi\,dS\right]\times\left(\frac{d\mathfrak{F}}{df}\right)_0$$

$$=(\operatorname{grad}f)\times\frac{d\mathfrak{F}}{df}.$$

§ 16.

Mittels der oben angeführten Formeln kann die Differentiation von komplizierten skalaren oder vektoriellen Funktionen eines Vektorarguments ($\mathfrak{r}$) auf die Differentiation der *einfachsten* Funktionen dieser Art zurückgeführt werden. Diese einfachsten Funktionen sind zunächst der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ selbst, nebst seinem Betrag r und Quadrat $(\mathfrak{r}\mathfrak{r})=r^2$, und die linearen Funktionen $\mathfrak{k}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{k}\times\mathfrak{r}$, wobei $\mathfrak{k}$ einen konstanten Vektor bedeutet. Die verschiedenen Ableitungen dieser Funktionen kann man zwar durch Kombination der obigen allgemeinen Formeln berechnen; man kommt aber einfacher zum Ziel, wenn man direkt von der geometrischen Bedeutung dieser Funktionen und der entsprechenden Operationen ausgeht, oder ihre Koordinatendarstellung benützt.

Z. B. kann man leicht einsehen, daß das Integral $\oint \mathfrak{n}\mathfrak{r}\,dS$ gleich dem Dreifachen des durch die Oberfläche S begrenzten Volums ist (denn dS ist die Grundfläche eines schiefen Kegels mit der Höhe $\mathfrak{n}\mathfrak{r}$), woraus folgt, daß $\operatorname*{Lim}_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint \mathfrak{n}\mathfrak{r}\,dS=3$, d. h.

$$\operatorname{div}\mathfrak{r}=3 \tag{29}$$

ist. Zu demselben Resultat gelangt man noch einfacher mittels der Koordinatendarstellung; da nämlich $r_i = x_i$ ist, so wird nach (21)

$$\operatorname{div} \mathfrak{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3 .$$

Auf dieselbe Weise bekommt man die Formeln

$$\operatorname{rot} \mathfrak{r} = 0 \tag{29a}$$

und, wegen $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

$$\operatorname{grad} r^2 = 2\,\mathfrak{r} \tag{29b}$$

oder da nach (28) $\operatorname{grad} r^2 = 2\,r \operatorname{grad} r$ ist,

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathfrak{r}}{r} . \tag{29c}$$

Der Gradient von r ist also gleich einem mit $\mathfrak{r}$ gleichgerichteten Einheitsvektor. Dieses Resultat folgt ohne jede Rechnung aus der Definitionsgleichung (13).

Ebenso leicht erhält man die Formeln

$$\operatorname{grad} (\mathfrak{f}\mathfrak{r}) = (\mathfrak{f} \operatorname{grad}) \mathfrak{r} = \mathfrak{f} \tag{30}$$

$$\operatorname{div} (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r}) = 0, \tag{30a}$$

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r}) = 2\,\mathfrak{f}, \tag{30b}$$

$$(\mathfrak{A} \operatorname{grad}) (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r}) = (\mathfrak{f} \times \mathfrak{A}). \tag{30c}$$

Es ist z. B. nach (21a)

$$\operatorname{rot}_1 (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r}) = \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r})_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r})_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} (k_1 x_2 - k_2 x_1)$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_3} (k_3 x_1 - k_1 x_3) = 2\,k_1 .$$

Oder anders nach (26) und (27),

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{f} \times \mathfrak{r}) = - (\mathfrak{f} \operatorname{grad}) \mathfrak{r} + \mathfrak{f} \operatorname{div} \mathfrak{r}$$
$$\operatorname{grad} (\mathfrak{f}\mathfrak{r}) = (\mathfrak{f} \operatorname{grad}) \mathfrak{r} + \mathfrak{f} \operatorname{rot} \mathfrak{r} = (\mathfrak{f} \operatorname{grad}) \mathfrak{r},$$

so daß eine der Formeln (30) genügt, um mittels (29) und (29a) die Formel (30b) und die zweite von (30) abzuleiten.

Zur Erläuterung der dargestellten Differentiationsregeln wollen wir noch einige kompliziertere Funktionen betrachten.

1. $\varphi = r^n$. Nach (28) und (29c) erhalten wir

$$\operatorname{grad} r^n = n r^{n-1} \operatorname{grad} r = n r^{n-2} \mathfrak{r}, \tag{31}$$

wo n eine ganz willkürliche Zahl ist.

2. $\mathfrak{F} = r^n \mathfrak{r}$. Nach (24) und (24a) folgt

$$\operatorname{div} r^n \mathfrak{r} = n r^{n-2} (\mathfrak{r}\mathfrak{r}) + 3\,r^n, \quad \text{d. h.}$$
$$\operatorname{div} r^n \mathfrak{r} = (n + 3)\, r^n \tag{31a}$$

und ferner wegen (29a)

$$\operatorname{rot} r^n \mathfrak{r} = 0. \tag{31b}$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der Identität (18), da nach (31) $r^n \mathfrak{r} = \operatorname{grad} \frac{r^{n+2}}{n+2}$ ist; es sei bemerkt, daß bei $n = -2$ diese Formel ersetzt werden muß durch $\frac{\mathfrak{r}}{r^2} = \operatorname{grad} \lg r$.

3. $\mathfrak{F} = (\mathfrak{k}\mathfrak{r})\mathfrak{r}$ (die zu k parallele Komponente von $\mathfrak{r}$). Nach (24) und (30)

$$\operatorname{div}(\mathfrak{k}\mathfrak{r})\mathfrak{r} = 3\,\mathfrak{k}\mathfrak{r} + \mathfrak{r}\,\mathfrak{k} = 4\,\mathfrak{k}\mathfrak{r},$$
$$\operatorname{rot}(\mathfrak{k}\mathfrak{r})\mathfrak{r} = 0.$$

4. $\mathfrak{F} = (\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{r}$ (die zu k senkrechte Komponente von $\mathfrak{r}$). Nach (26)

$$\operatorname{rot}[(\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{r}] = (\mathfrak{r}\operatorname{grad})(\mathfrak{k}\times\mathfrak{r}) - [(\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})\operatorname{grad}]\mathfrak{r} + (\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})\operatorname{div}\mathfrak{r} - \mathfrak{r}\operatorname{div}(\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})$$

und ferner nach (30)—(30c)

$$\operatorname{rot}[(\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{r}] = \mathfrak{k}\times\mathfrak{r} - \mathfrak{k}\times\mathfrak{r} + 3\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{r} = 3\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{r}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man selbstverständlich, wenn $(\mathfrak{k}\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{r}$ nach (5) durch $\mathfrak{r}(\mathfrak{k}\mathfrak{r}) - \mathfrak{k}r^2$ ersetzt wird.

C. Koordinatentransformation und Tensoren.

§ 17.

Gehen wir von dem ursprünglichen Koordinatensystem (X_1, X_2, X_3) über zu einem anderen (X_1', X_2', X_3') auch rechtwinkligen mit demselben Ursprung O, aber mit veränderter Richtung der Achsen, so bekommen wir für die Koordinaten eines Punktes P, d. h. die Komponenten seines Radiusvektors $OP = \mathfrak{r}$, neue Werte, nämlich

$$x_k' = \mathfrak{r}\mathfrak{e}_k' \quad (k = 1, 2, 3),$$

wo $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3'$ die neuen „Koordinatenvektoren" sind, d. h. Einheitsvektoren, welche die Richtung der neuen Achsen bestimmen. Ist das neue Koordinatensystem (X') ein Rechtsschraubensystem ebenso wie die ursprüngliche X (was im folgenden immer vorausgesetzt wird), so kann man es sich aus dem letzteren durch eine Drehung entstanden denken.

Die Beziehungen zwischen den „ursprünglichen" und „neuen" Komponenten des Radiusvektors oder irgendeines anderen Vektors $\mathfrak{A}$ sind bestimmt durch die Größen

$$\cos(X_i, X_{i'}') = \mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_{i'}' = \alpha_{ii'}, \quad (i, i' = 1, 2, 3) \tag{32}$$

die man als die neuen Komponenten der ursprünglichen Koordinatenvektoren betrachten kann.

Setzt man

$$\mathfrak{A} = \sum_i A_i\mathfrak{e}_i = \sum_{i'} A_{i'}\mathfrak{e}_{i'},$$

so wird

$$A_{i'}' = \mathfrak{A}\mathfrak{e}_{i'}' = (\sum_i A_i\mathfrak{e}_i)\mathfrak{e}_{i'}' = \sum_i A_i(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_{i'}'), \quad \text{d. h.}$$

$$A_{i'}' = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii'} A_i, \tag{32a}$$

und ebenso

$$A_i = \sum_{i'=1}^{3} \alpha_{ii'} A'_{i'} . \tag{32b}$$

Da nach (32)

$$e'_{i'} = \sum_i \alpha_{ii'} e_i \quad \text{und} \quad e_i = \sum_{i'} \alpha_{ii'} e'_{i'}$$

ist, so folgt, daß bei der Drehung des ursprünglichen Koordinatensystems die Komponenten eines beliebigen Vektors sich in derselben Weise, wie die Koordinatenvektoren — oder „*kovariant*" — transformieren[1]).

Solche Größen, wie das innere Produkt zweier Vektoren oder speziell das Quadrat eines Vektors $A^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}$, bleiben selbstverständlich dabei unverändert oder „*invariant*", so daß

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 .$$

ist.

Drückt man hier die neuen Komponenten durch die ursprünglichen nach den Formeln (32a) aus, so erhält man die Identität

$$\sum_{i'} A_{i'}'^2 = \sum_{i'} \left(\sum_k \alpha_{ki'} A_k\right)\left(\sum_l \alpha_{li'} A_l\right) = \sum_k \sum_l A_k A_l \left(\sum_{i'} \alpha_{ki'} \alpha_{li'}\right)$$

woraus folgt, daß

$$\sum_{i'} \alpha_{ki'} \alpha_{li'} = \begin{cases} 1 \text{ bei } k = l \\ 0 \text{ bei } k \neq l \end{cases} \tag{33}$$

Diese Beziehungen sind wegen der bekannten Formel $\sum_{i'} \alpha_{ki'} \alpha_{li'} = \sum_{i'} \cos(X_k X'_{i'}) \cos(X_l X'_{i'}) = \cos(X_k X_l)$, der Ausdruck der Tatsache, daß die betrachteten Koordinatensysteme rechtwinklig sind, und heißen deshalb „Orthogonalitätsbedingungen". Auf dieselbe Weise ergeben sich die zu (33) reziproken Beziehungen

$$\sum_i \alpha_{ik'} \alpha_{il'} = \begin{cases} 1 \text{ bei } k' = l' \\ 0 \text{ bei } k' \neq l' \end{cases} \tag{33a}$$

Dabei sind die Beziehungen (33) und (33a) nicht unabhängig, sondern folgen unmittelbar aus einander.

§ 18.

Im Gegensatz zu den gewöhnlichen skalaren Größen, welche von der Orientierung des Koordinatensystems unabhängig sind, haben die Komponenten eines Vektors, obwohl sie auch skalare Größen sind, keinen bestimmten von dieser Orientierung unabhängigen Wert. Bei

[1]) Dies gilt nur bei rechtwinkligen Koordinatensystemen. Im allgemeinen Falle schiefwinkliger Koordinatenachsen, wenn die Komponenten eines Vektors von den entsprechenden Projektionen verschieden sind, transformieren sich nur die letzteren kovariant, die ersteren dagegen *kontravariant*, d. h. die *neuen* Komponenten stehen zu den ursprünglichen in derselben Beziehung wie die *ursprünglichen* Koordinatenvektoren zu den neuen.

der Koordinatendarstellung von Vektoren müssen wir also zwei Arten von Skalaren unterscheiden: die gewöhnlichen *invarianten* Skalaren einerseits und die *varianten*, d. h. sich mit den Koordinatenvektoren kovariant transformierenden Skalare andrerseits. Die Einführung solcher varianter Skalare, die zu einem Tripel zusammengefaßt einen Vektor darstellen, erlaubt noch weiter in dieser Richtung zu gehen, und solche Größen aufzubauen, welche sich zu den Vektoren so verhalten, wie diese zu den gewöhnlichen (invarianten) Skalaren.

Bilden wir z. B. die Produkte von je zwei Komponenten der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Dabei bekommen wir in dem ursprünglichen Koordinatensystem (X) 9 Größen

$$\begin{matrix} A_1B_1, & A_1B_2, & A_1B_3 \\ A_2B_1, & A_2B_2, & A_2B_3 \\ A_3B_1, & A_3B_2, & A_3B_3 \end{matrix}$$

und in dem neuen Koordinatensystem (X') 9 *ganz andere* Größen

$$\begin{matrix} A'_1B'_1, & A'_1B'_2, & A'_1B'_3 \\ A'_2B'_1, & A'_1B'_2, & A'_2B'_3 \\ A'_3B'_1, & A'_3B'_2, & A'_3B'_3 \end{matrix}$$

welche aber den ursprünglichen in demselben Sinne *entsprechen*, wie die neuen Komponenten eines Vektors den ursprünglichen Komponenten *desselben* Vektors.

Aus diesem Grunde kann man die Größen A_iB_k, und $A'_{i'}B'_{k'}$ als die (skalaren) Komponenten einer und derselben *zusammengesetzten Größe* bezüglich der Koordinatensysteme (X) und (X') auffassen. Diese zusammengesetzte Größe, die zunächst keine anschauliche geometrische Bedeutung besitzt, ist der einfachste Vertreter der sog. *Tensorgrößen*, oder genauer *Tensoren zweiten Ranges*.

Einen Tensor zweiten Ranges definiert man im allgemeinen Falle als eine Größe ${}^2\mathfrak{T}$, die durch $3^2 = 9$ *divariante* Skalare dargestellt werden kann, d. h. durch 9 skalare Größen, deren Wert von der Wahl (Orientierung) des Koordinatensystems in derselben Weise abhängt, wie der Wert der Produkte von je zwei *monovarianten* — d. h. einen gewöhnlichen Vektor darstellenden — Skalaren[1]). Diese divarianten Skalare heißen die *Komponenten* des Tensors. Sind sie für ein Koordinatensystem (X) bekannt, und zwar gleich T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$, so kann man sie für jedes andere Koordinatensystem nach den Transformationsformeln [vgl. (32a)]

$$T'_{i'k'} = \sum_i \sum_k \alpha_{ii'}\alpha_{kk'}T_{ik} \tag{34}$$

berechnen. Umgekehrt drücken sich die ursprünglichen Komponenten von ${}^2\mathfrak{T}$ durch die neuen aus mittels der Formeln

$$T_{ik} = \sum_{i'} \sum_{k'} \alpha_{ii'}\alpha_{kk'}T'_{i'k'}, \tag{34a}$$

[1]) Speziell der *Koordinaten* eines Punktes.

welche den Formeln (32b) entsprechen (selbstverständlich kann man sie auch durch direkte Auflösung der Gleichungen (34) in bezug auf die T_{ik} erhalten).

In ganz ähnlicher Weise definiert man Tensoren dritten, vierten und höheren Ranges. Ein Tensor n-ten Ranges ${}^n\mathfrak{T}$ ist also koordinatenmäßig dargestellt durch 3^n Komponenten, welche n-fach variante Skalare sind, d. h. solche Skalare, die sich bei Koordinatentransformationen (Drehungen des ursprünglichen Koordinatensystems) wie die Produkte von je n Vektorkomponenten transformieren. Dabei kann man die Vektorkomponenten als monovariante Skalare und dementsprechend die Vektorgrößen als Tensoren ersten Ranges betrachten; die gewöhnlichen invarianten Skalare fügen sich dieser Reihe als die Tensoren „nullten" Ranges an.

§ 19.

Wir wollen zunächst nur die „gewöhnlichen" Tensoren, d. h. die Tensoren zweiten Ranges behandeln. Wegen des linearen Charakters der Transformationsgleichungen (34) oder (34a) kann man sofort schließen, daß die Summen (oder Differenzen) der entsprechenden Komponenten zweier verschiedenen Tensoren einen neuen Tensor bilden. Dieser neue Tensor, welcher der geometrischen Summe (oder Differenz) zweier Vektoren entspricht, heißt die Tensorsumme (bzw. Differenz) der beiden anderen ${}^2\mathfrak{P}$, ${}^2\mathfrak{Q}$, und wird durch ${}^2\mathfrak{P} + {}^2\mathfrak{Q}$ (bzw. ${}^2\mathfrak{P} - {}^2\mathfrak{Q}$) bezeichnet. Allgemein bedeutet die Gleichung

$$ {}^2\mathfrak{T} = {}^2\mathfrak{P} + {}^2\mathfrak{Q} + {}^2\mathfrak{R} + \cdots \tag{35} $$

daß $T_{ik} = P_{ik} + Q_{ik} + R_{ik} + \ldots$ ist $(i, k = 1, 2, 3)$.

Jedem Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ mit den Komponenten T_{ik} kann man einen anderen ${}^2\tilde{\mathfrak{T}}$ zuordnen, dessen Komponenten durch die Bedingung

$$ \tilde{T}_{ik} = T_{ki} \tag{36} $$

bestimmt sind. Diese Bedingung bedeutet, daß man die Komponenten von ${}^2\tilde{\mathfrak{T}}$ erhält, wenn man in dem Komponentenschema von ${}^2\mathfrak{T}$

$$ \begin{matrix} T_{11}, & T_{12}, & T_{13} \\ T_{21}, & T_{22}, & T_{23} \\ T_{31}, & T_{32}, & T_{33} \end{matrix} $$

die Zeilen mit den Spalten vertauscht.

Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingung (36) invariant gegen Koordinatentransformationen ist, d. h. daß die aus T_{ik} und $\tilde{T}_{ik}$ nach der Formel (34) berechneten neuen Komponenten der entsprechenden Tensoren derselben Bedingung

$$ \tilde{T}'_{i'k'} = T'_{k'i'} $$

genügen. Dies zeigt, daß die Größen $\tilde{T}_{ik}$ tatsächlich einen Tensor

bilden. Dieser Tensor heißt der *transponierte* von ${}^2\mathfrak{T}$. Folgende Spezialfälle sind besonders zu beachten:

1. $T_{ki} = T_{ik}$. Der Tensor ${}^2T$ heißt *symmetrisch* und ist mit dem transponierten Tensor ${}^2\tilde{\mathfrak{T}}$ identisch. Die Anzahl der *verschiedenen* Komponenten von ${}^2\mathfrak{T}$ ist gleich 6.

2. $T_{ki} = -T_{ki}$. Der Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ heißt *schiefsymmetrisch* oder *antimetrisch* und ist seinem transponierten entgegengesetzt gleich $({}^2\mathfrak{T} + {}^2\tilde{\mathfrak{T}} = 0)$. Da in diesem Fall die „Diagonalkomponenten" von ${}^2\mathfrak{T}$, d. h. T_{11}, T_{22}, T_{33}, verschwinden, reduziert sich die Anzahl der voneinander unabhängigen skalaren Größen, welche ${}^2\mathfrak{T}$ bestimmen, auf 3, nämlich

$$T_{23} = -T_{32} = T_1, \quad T_{31} = -T_{13} = T_2, \quad T_{12} = -T_{21} = T_3. \tag{36a}$$

Daraus folgt, daß ein schiefsymmetrischer Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ einem Vektor $\mathfrak{T}$ mit den Komponenten T_1, T_2, T_3 vollkommen äquivalent sein muß.

In der Tat, es läßt sich leicht beweisen, daß die Größen (36a) ebensogut als divariante wie als monovariante Skalare betrachtet werden können. — Ein schiefsymmetrischer Tensor kann offenbar immer mittels *zweier* verschiedener Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufgebaut werden, deren Komponenten in dem ursprünglichen Koordinatensystem den Gleichungen

$$A_i B_k - A_k B_i = T_{ik} = -T_{ki}$$

genügen. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber nach den Formeln (10a) nichts anderes als die Komponenten des Vektors $\pm\, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, d. h. des äußeren Produktes der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Die Skalaren T_1, T_2, T_3 sind also tatsächlich die Komponenten eines Vektors

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

Ein *asymmetrischer* Tensor ${}^2\mathfrak{T}$, d. h. ein Tensor, welcher weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist, kann immer in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegt werden. Setzt man nämlich

$${}^2\mathfrak{P} = \frac{1}{2}({}^2\mathfrak{T} + {}^2\tilde{\mathfrak{T}}), \quad \text{d. h. } P_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) = P_{ki}$$

und

$${}^2\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}({}^2\mathfrak{T} - {}^2\tilde{\mathfrak{T}}), \quad \text{d. h. } Q_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = -Q_{ki},$$

so wird

$${}^2\mathfrak{T} = {}^2\mathfrak{P} + {}^2\mathfrak{Q}.$$

Da nach dem oben Gesagten der schiefsymmetrische Tensor ${}^2\mathfrak{Q}$ einem Vektor $\mathfrak{Q}$ äquivalent ist, so sieht man, daß im allgemeinen Falle ein Tensor (2ten Ranges) sich auf einen symmetrischen Tensor und einen Vektor reduzieren läßt.

§ 20.

Die Bedeutung einer solchen Reduktion tritt zunächst bei der *Multiplikation* von Tensoren mit Vektoren oder anderen Tensoren hervor.

Bildet man die dem inneren Produkt zweier Vektoren entsprechenden Ausdrücke

$$\sum_k T_{ik} F_k \quad \text{und} \quad \sum_i T_{ik} F_i,$$

wo F_1, F_2, F_3 die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{F}$ sind, und beachtet, daß diese Ausdrücke in Hinsicht auf ihre Transformationsart („Varianz") völlig äquivalent sind mit solchen, die sich daraus bei dem Ansatz $T_{ik} = A_i B_k$ ergeben, d. h.

$$\sum_k A_i B_k F_k = A_i \sum_k B_k F_k = A_i \mathfrak{B}\mathfrak{F}$$

und

$$\sum_i A_i B_k F_i = B_k \sum_i A_i F_i = B_k \mathfrak{A}\mathfrak{F},$$

so sieht man, daß $\sum_k T_{ik} F_k$ gleich der i-Komponente eines Vektors und $\sum_i T_{ik} F_i$ gleich der k-Komponente eines anderen Vektors sein müssen. Wir wollen den ersten dieser Vektoren mit ${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\,{}^2\mathfrak{T}$ bezeichnen, und das *Produkt* von ${}^2\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{F}$ nennen. Der zweite Vektor erscheint dann als Produkt von ${}^2\tilde{\mathfrak{T}}$ und $\mathfrak{F}$, so daß

$$\left.\begin{aligned} ({}^2\mathfrak{T}\mathfrak{F})_i &= \sum_k T_{ik} F_k, \\ ({}^2\tilde{\mathfrak{T}}\mathfrak{F})_k &= \sum_i T_{ik} F_i. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ist der Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ symmetrisch, so fallen die beiden Produkte (37) zusammen. Setzt man im allgemeinen Falle ${}^2\mathfrak{T} = {}^2\mathfrak{P} + {}^2\mathfrak{Q}$, wo ${}^2\mathfrak{P}$ symmetrisch $= \frac{1}{2}({}^2\mathfrak{T} + {}^2\tilde{\mathfrak{T}})$, und ${}^2\mathfrak{Q}$ schiefsymmetrisch ist, so ergibt sich mit

$$Q_{23} = -Q_{32} = Q_1, \quad Q_{31} = -Q_{13} = Q_2, \quad Q_{12} = -Q_{21} = Q_3$$

$$({}^2\mathfrak{T}\mathfrak{F})_i = ({}^2\mathfrak{P}\mathfrak{F})_i + (\mathfrak{F} \times \mathfrak{Q})_i,$$

d. h.

$$\mathfrak{F} \cdot {}^2\mathfrak{T} = \mathfrak{F}\,{}^2\mathfrak{P} + \mathfrak{F} \times \mathfrak{Q} \tag{37a}$$

und ebenso

$$\mathfrak{F} \cdot {}^2\tilde{\mathfrak{T}} = \mathfrak{F}\,{}^2\mathfrak{P} - \mathfrak{F} \times \mathfrak{Q}.$$

Die Multiplikation eines Tensors mit einem Vektor reduziert sich folglich auf die entsprechende Multiplikation des symmetrischen Anteils dieses Tensors und die äußere Multiplikation des dem schiefsymmetrischen Anteil äquivalenten Vektors mit dem betrachteten Vektor[1]).

[1]) Man kann neben der angeführten „inneren" Multiplikation noch die der äußeren Multiplikation zweier Vektoren entsprechende Operation einführen; diese würde aber keinen Vektor, sondern einen Tensor ergeben; siehe unten.

Entsprechendes gilt für die *Multiplikation zweier Tensoren* ${}^2\mathfrak{T}$ und ${}^2\mathfrak{S}$ miteinander. Man kann nämlich aus den Komponenten von ${}^2\mathfrak{T}$ und ${}^2\mathfrak{S}$ zwei *invariante* skalare Größen bilden:

$$\sum_i \sum_k T_{ik} S_{ki} \quad \text{und} \quad \sum_i \sum_k T_{ik} S_{ik}.$$

Die Invarianz dieser Größen gegen Koordinatentransformationen sieht man sofort mittels der Ansätze $T_{ik} = A_i B_k$, $S_{ik} = C_i D_k$ ein, da sich dabei die erste auf $(\mathfrak{AD})$ $(\mathfrak{BC})$ und die zweite auf $(\mathfrak{AC})$ $(\mathfrak{BD})$ reduziert. Die erste der oben angeführten Größen werden wir durch ${}^2\mathfrak{T} \cdot {}^2\mathfrak{S}$ bezeichnen und das skalare Produkt der Tensoren ${}^2\mathfrak{T}$ und ${}^2\mathfrak{S}$ nennen.

Es ist also

$$\sum_i \sum_k T_{ik} S_{ki} = {}^2\mathfrak{T}\,{}^2\mathfrak{S} = {}^2\mathfrak{S}\,{}^2\mathfrak{T} \tag{38}$$

und dementsprechend

$$\sum_i \sum_k T_{ik} S_{ik} = {}^2\mathfrak{T}\,{}^2\tilde{\mathfrak{S}} = {}^2\tilde{\mathfrak{T}}\,{}^2\mathfrak{S}.$$

Sobald *einer* der Tensoren ${}^2\mathfrak{T}$ und ${}^2\mathfrak{S}$ symmetrisch ist, muß das letzte Produkt mit (38) zusammenfallen. Im allgemeinen Falle (${}^2\mathfrak{T}$ und ${}^2\mathfrak{S}$ beide asymmetrisch) ergibt sich, wenn ${}^2\mathfrak{M}$ den symmetrischen und ${}^2\mathfrak{N}$ den schiefsymmetrischen Anteil von ${}^2\mathfrak{S}$ bedeuten:

$${}^2\mathfrak{T}\,{}^2\mathfrak{S} = {}^2\mathfrak{P}\,{}^2\mathfrak{M} - 2\,\mathfrak{Q}\mathfrak{N} \tag{38a}$$

und

$${}^2\mathfrak{T}\,{}^2\tilde{\mathfrak{S}} = {}^2\mathfrak{P}\,{}^2\mathfrak{M} + 2\,\mathfrak{Q}\mathfrak{N}.$$

Aus den Komponenten zweier Tensoren kann man durch Produktbildung und *einfache* Summation (in bezug auf *ein* Paar der Indizes) nicht invariante, sondern *divariante* Skalare bekommen, d. h. Komponenten neuer Tensoren desselben (2ten) Ranges. Man muß dabei die folgenden vier Arten von Produkten unterscheiden:

$$\sum_l T_{il} S_{lk}, \quad \sum_l T_{il} S_{kl}, \quad \sum_l T_{li} S_{kl}, \quad \sum T_{li} S_{lk}$$

die wir als die (i, k)-Komponenten der *Tensorprodukte*

$${}^2\mathfrak{T} \times {}^2\mathfrak{S}, \quad {}^2\mathfrak{T} \times {}^2\tilde{\mathfrak{S}}, \quad {}^2\tilde{\mathfrak{T}} \times {}^2\tilde{\mathfrak{S}}, \quad {}^2\tilde{\mathfrak{T}} \times {}^2\mathfrak{S}$$

bezeichnen werden. Es ist also

$$({}^2\mathfrak{T} \times {}^2\mathfrak{S})_{ik} = \sum_l T_{il} S_{lk}. \tag{39}$$

Aus dieser Definition[1]) folgt, daß die Tensormultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist; diese Operation wird nur dann kommutativ, wenn beide Faktoren symmetrisch sind.

Durch Zerlegung der letzteren in ihre symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile ergibt sich nach (39)

$${}^2\mathfrak{T} \times {}^2\mathfrak{S} = {}^2\mathfrak{P} \times {}^2\mathfrak{M} + {}^2\mathfrak{P} \times {}^2\mathfrak{N} + {}^2\mathfrak{Q} \times {}^2\mathfrak{M} + {}^2\mathfrak{Q} \times {}^2\mathfrak{N}.$$

[1]) Welche der üblichen Definition der Determinanten- und Matrizen-Produkte entspricht.

Dabei ist ${}^2\mathfrak{P}\times{}^2\mathfrak{M} = {}^2\mathfrak{M}\times{}^2\mathfrak{P}$. Was die drei anderen Summanden anbetrifft, so lassen sie sich nicht unmittelbar auf die den Vektoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{N}$ entsprechenden Ausdrücke zurückführen. Zunächst bekommen wir für die Komponenten von ${}^2\mathfrak{Q}\times{}^2\mathfrak{N}$:

$$({}^2\mathfrak{Q}\times{}^2\mathfrak{N})_{11} = Q_{11}N_{11} + Q_{12}N_{21} + Q_{13}N_{31} = -Q_3N_3 - Q_2N_2 = -(\mathfrak{Q}\mathfrak{N}) + Q_1N_1,$$

$$({}^2\mathfrak{Q}\times{}^2\mathfrak{N})_{12} = Q_{11}N_{12} + Q_{12}N_{22} + Q_{13}N_{32} = -Q_2N_1$$

d. h.

$$({}^2\mathfrak{Q}\times{}^2\mathfrak{N})_{ik} = \begin{cases} Q_kN_i - (\mathfrak{Q}\mathfrak{N}) & \text{für } k = i, \\ -Q_kN_i & \text{für } k \neq i. \end{cases} \tag{39a}$$

Der Tensor ${}^2\mathfrak{Q}\times{}^2\mathfrak{N}$ ist also aus den beiden Vektoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{N}$ durch Multiplikation ihrer Komponenten gebildet[1]).

Ferner ist:

$$({}^2\mathfrak{P}\,{}^2\mathfrak{N})_{11} = P_{11}N_{11} + P_{12}N_{21} + P_{13}N_{31} = -P_{12}N_3 + P_{13}N_2,$$

$$({}^2\mathfrak{P}\,{}^2\mathfrak{N})_{12} = P_{11}N_{12} + P_{12}N_{22} + P_{13}N_{32} = P_{11}N_3 - P_{13}N_1.$$

Diese Ausdrücke wollen wir Komponenten des *äußeren* Produktes des Vektors $\mathfrak{N}$ und des Tensors ${}^2\mathfrak{P}$ nennen und durch

$$({}^2\mathfrak{P}\times{}^2\mathfrak{M})_{ik} = (\mathfrak{N}\times{}^2\mathfrak{P})_{ik} = -(\mathfrak{P}_i\times\mathfrak{N})_k \tag{39b}$$

bezeichnen. Dabei bedeutet $\mathfrak{P}_i$ einen Vektor mit den Komponenten P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei bemerkt, daß die Multiplikation der Tensoren mit Vektoren oder anderen Tensoren, wie sie oben definiert wurde, ebenso wie die innere und äußere Multiplikation der Vektoren dem *distributiven Gesetz* gehorcht. Es gilt also

$${}^2\mathfrak{T}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = {}^2\mathfrak{T}\mathfrak{A} + {}^2\mathfrak{T}\mathfrak{B}$$

$$({}^2\mathfrak{S} + {}^2\mathfrak{T})\mathfrak{A} = {}^2\mathfrak{S}\mathfrak{A} + {}^2\mathfrak{T}\mathfrak{A}$$

usw.

§ 21.

Durch innere Multiplikation des Vektors $({}^2\mathfrak{T}\mathfrak{A})$ mit einem anderen Vektor $\mathfrak{B}$ ergibt sich eine invariante skalare Größe, die sich im allgemeinen Falle eines asymmetrischen Tensors ${}^2\mathfrak{T} = {}^2\mathfrak{P} + {}^2\mathfrak{Q}$ nach (37a) folgendermaßen schreiben läßt

$$({}^2\mathfrak{T}\mathfrak{A})\mathfrak{B} = ({}^2\mathfrak{P}\mathfrak{A})\mathfrak{B} + \mathfrak{Q}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}).$$

Im folgenden werden wir stets $\mathfrak{Q} = 0$ setzen, d. h. nur symmetrische Tensoren betrachten. Dann ist das Produkt von ${}^2\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der

---

[1]) Ersetzt man den Radiusvektor eines Punktes durch den entsprechenden schiefsymmentrischen Tensor ${}^2\mathfrak{r}$ mit den Komponenten $r_{23} = -r_{32} = x_1$ usw., so bestimmt die über alle Teilchen eines starren Körpers erstreckte Summe ${}^2\mathfrak{M} = -\Sigma m\,({}^2\mathfrak{r}\times{}^2\mathfrak{r})$ (m-Masse eines Teilchens) die *Trägheitsmomente* dieses Körpers in bezug auf beliebige Achsen. Und zwar ist das Trägheitsmoment um eine Achse in der Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{n}$ gleich dem inneren Produkte ${}^2\mathfrak{M}\mathfrak{n}$.

Reihenfolge der Faktoren unabhängig, weshalb man es einfach durch ${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bezeichnen darf.

Setzen wir speziell $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{r}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} {}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{r} = T_{11}x_1^2 + T_{22}x_2^2 + T_{33}x_3^2 + 2\,T_{23}x_2x_3 + 2\,T_{31}x_3x_1 \\ + 2\,T_{12}x_1x_2 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Wir erhalten also eine quadratische Form der Koordinaten x_1, x_2, x_3, wobei die Komponenten des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$ die Rolle der Koeffizienten spielen.

Betrachtet man diesen Tensor als eine konstante Größe und den Vektor $\mathfrak{r}$, d. h. die Koordinaten x_1, x_2, x_3, als variabel, so bestimmt die Gleichung

$${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{r} = \text{konst} \quad (40\text{a})$$

eine Fläche zweiter Ordnung, und zwar auf eine von der Orientierung des Koordinatensystems ganz unabhängige Weise. Diese Fläche (Ellipsoid, Hyperboloid) kann man deshalb als *die koordinatenfreie geometrische Darstellung des betrachteten Tensors* ansehen.

Eine ganz entsprechende Darstellung kann man auch für *Vektoren* einführen, indem diese als Tensoren ersten Ranges betrachtet werden. Statt einen Vektor $\mathfrak{A}$ durch eine ihm proportionale und gleichgerichtete *Strecke* — d. h. durch einen bestimmten Wert des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ — darzustellen, kann man nämlich ebensogut die dazu senkrechte *Ebene*, d. h. die durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r} \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \text{konst}$$

definierte Fläche erster Ordnung benützen.

Setzt man die obige Konstante gleich 1, so wird der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung gleich $\frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} = \frac{1}{A}$, d. h. *umgekehrt* proportional dem Betrage des durch diese Ebene dargestellten „Tensors 1ten Ranges". Ähnliches ergibt sich für die geometrische Darstellung von (symmetrischen) Tensoren 2ten Ranges nach (40a). Der „Betrag" des Tensors kann dabei durch $|{}^2\mathfrak{T}| = \sqrt{{}^2\mathfrak{T}\,{}^2\mathfrak{T}}$ definiert werden.

Durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems kann man bekanntlich die Fläche (40a) auf ihre „Haupt-" oder „Symmetrieachsen" transformieren, d. h. ihre koordinatenmäßige Gleichung in der Form

$${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{T}'_{11}x_1'^2 + T'_{22}x_2'^2 + T'_{33}x_3'^2 = \text{konst} = 1 \quad (40\text{b})$$

erhalten. Die entsprechenden Koordinatenachsen heißen die *Hauptachsen* des diese Fläche bestimmenden (oder durch sie dargestellten) Tensors; sie sind also durch das Verschwinden der Komponenten T'_{ik} für $i \neq k$ charakterisiert.

Es sei bemerkt, daß für assymmetrische Tensoren eine solche „Hauptachsentransformation" unmöglich ist, ebenso wie die oben angeführte geometrische Veranschaulichung.

§ 22.

Die Hauptachsen eines Tensors können dadurch definiert werden, daß die Vektoren ${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}$, welche im allgemeinen eine von $\mathfrak{r}$ verschiedene Richtung haben, für die Hauptachseneinrichtungen mit $\mathfrak{r}$ gleichgerichtet sind.

In der Tat ist der Vektor ${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}$ gleich dem Gradienten der skalaren Größe $\frac{1}{2}\,{}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{r}$, woraus folgt, daß er die Richtung der *äußeren Normale* zur Fläche (40a) in dem betreffenden durch $\mathfrak{r}$ bestimmten Punkte hat.

Führt man einen noch unbestimmten Skalar λ ein, so werden die Hauptachsen des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$ durch die Vektorgleichung

$$ {}^2\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{r} \tag{41}$$

oder die entsprechenden skalaren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (T_{11}-\lambda)\,x_1 + T_{12}x_2 + T_{13}x_3 &= 0,\\ T_{21}x_1 + (T_{22}-\lambda)\,x_2 + T_{23}x_3 &= 0,\\ T_{31}x_1 + T_{32}x_2 + (T_{33}-\lambda)\,x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{41a}$$

bestimmt. Daraus ergibt sich für den Skalar λ die kubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda, & T_{12}, & T_{13}\\ T_{21}, & T_{22}-\lambda, & T_{23}\\ T_{31}, & T_{32}, & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{41b}$$

deren Wurzeln gerade gleich den Hauptkomponenten T'_{11}, T'_{22}, T'_{33} von $\mathfrak{T}$ sind[1]). Entwickeln wir diese Gleichung nach Potenzen von λ, so nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$\lambda^3 - T^{(1)}\lambda^2 + T^{(2)}\lambda - T^{(3)} = 0 \tag{41c}$$

mit

$$T^{(1)} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{42}$$

$$T^{(2)} = T_{23}^2 + T_{31}^2 + T_{12}^2 - T_{22}T_{33} - T_{33}T_{11} - T_{11}T_{22} \tag{42a}$$

und

$$T^{(3)} = \begin{vmatrix} T_{11}, & T_{12}, & T_{13}\\ T_{21}, & T_{22}, & T_{23}\\ T_{31}, & T_{32}, & T_{33} \end{vmatrix} \tag{42b}$$

Da die Wurzeln von (41c) ganz bestimmte von der Koordinatenwahl unabhängige Größen sind, so muß dasselbe auch für die Koeffizienten $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ gelten. Sie heißen deshalb *Invarianten* — und

[1]) Auf den Beweis wollen wir hier verzichten, da die Frage der Hauptachsentransformation der Flächen zweiten Grades in Lehrbüchern der analytischen Geometrie dargelegt wird. Es sei nur bemerkt, daß die allgemeinste Bedingung für die Realität aller drei Wurzeln von (41b) die sog. *Hermite*sche Bedingung ist: T_{ki} = komplex konjugiert zu T_{ik}. Dies bedeutet, daß, wenn der Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ komplex, und zwar $= {}^2\mathfrak{U} + \sqrt{-1}\,{}^2\mathfrak{V}$ ist, sein reeller Anteil ${}^2\mathfrak{U}$ symmetrisch, der imaginäre Anteil ${}^2\mathfrak{V}$ dagegen schiefsymmetrisch sein muß.

zwar lineare, quadratische und kubische — des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$. Die Invarianz von $T^{(1)}$ folgt sofort aus dem Umstand, daß für $T_{ik} = A_i B_k$ $T^{(1)} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ wird. Die Invarianz von $T^{(2)}$ kann man ebenso leicht einsehen, da

$$2T^{(2)} = {}^2\mathfrak{T}\,{}^2\mathfrak{T} - (T^{(1)})^2$$

ist. Dagegen würde die unmittelbare Feststellung des invarianten Charakters von (42b) eine spezielle Untersuchung erfordern.

§ 23.

Neben den konstanten hat man auch *veränderliche* Tensoren zu betrachten, welche Funktionen der Zeit oder des Ortes, d. h. des Radiusvektors sind (Tensorfunktionen, Tensorfelder). Die der Divergenz eines Vektors entsprechende Differentialgröße kann man dabei durch den folgenden der Formel (11a) analogen Ansatz definieren

$$\operatorname{div} {}^2\mathfrak{T} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{V} \oint {}^2\mathfrak{T}\,\mathfrak{n}\,dS. \tag{43}$$

Da das Produkt ${}^2\mathfrak{T}\mathfrak{n}$ einen Vektor darstellt[1]), so muß die Divergenz eines Tensors auch eine Vektorgröße sein. Durch geeignete Spezialisierung der Fläche S (Parallelepiped, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind) ergibt sich aus (43) die folgende koordinatenmäßige Definition dieser Größe [vgl. (21)]:

$$(\operatorname{div} {}^2\mathfrak{T})_i = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \tag{43a}$$

Man kann sie auch symbolisch definieren als das Produkt des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$ mit dem *Hamilton*schen Operator ∇. Es sei bemerkt, daß die Divergenz eines asymmetrischen Tensors sich nach (37a) in die Divergenz seines symmetrischen Anteils ${}^2\mathfrak{P}$ und die Rotation des Vektors $\mathfrak{Q}$, welcher dem schiefsymmetrischen Anteil entspricht, zerlegen läßt:

$$\operatorname{div} {}^2\mathfrak{T} = \operatorname{div} {}^2\mathfrak{P} + \operatorname{rot} \mathfrak{Q}. \tag{43b}$$

Aus (43) folgt die dem *Gauß*schen Satze (16a) entsprechende Transformationsformel

$$\oint \mathfrak{n}\,{}^2\mathfrak{T}\,dS = \int \operatorname{div} {}^2\mathfrak{T}\,dV. \tag{44}$$

Mittels des symbolischen Vektors ∇ kann man zwei auch symbolische Tensoren bilden, und zwar einen symmetrischen mit den Komponenten $\nabla_i \nabla_k = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$, und einen schiefsymmetrischen ${}^2\nabla$ mit dem Komponentenschema:

---

[1]) Und zwar einen Vektor, dessen Richtung mit der Richtung der äußeren Normale zu der den Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ darstellenden Fläche zusammenfällt, wobei $\mathfrak{n}$ die Rolle des Radiusvektors spielt.

$$^2\nabla = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{\partial}{\partial x_3}, & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3}, & 0, & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}, & -\frac{\partial}{\partial x_1}, & 0 \end{pmatrix}$$

Der erste dieser „Tensoren" ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung, während der zweite ein mit ∇ völlig äquivalenter Operator erster Ordnung ist, welcher nur eine andere Schreibweise für die durch ∇ bestimmten Operationen gestattet. Durch Anwendung dieses Operators auf eine Vektorfunktion erhalten wir, nach der allgemeinen Multiplikationsformel (37a), (wobei $^2\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{Q} = \nabla$ ist)

$$^2\nabla \cdot \mathfrak{F} = \nabla \times \mathfrak{F} = \text{rot } \mathfrak{F}. \tag{45}$$

Ebenso wird für das „skalare Produkt" von $^2\nabla$ mit einer Tensorfunktion

$$^2\nabla \cdot {}^2\mathfrak{T} = 2\,\nabla\mathfrak{Q} = 2 \text{ div } \mathfrak{Q}, \tag{45a}$$

wo

$$\text{div } \mathfrak{Q} = \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_3}$$

ist. Die rechte Seite dieser Gleichung wird vielfach die „Rotation" des schiefsymmetrischen Tensors $^2\mathfrak{Q}$ genannt und durch rot $^2\mathfrak{Q}$ bezeichnet (rot $^2\mathfrak{Q} =$ div $\mathfrak{Q}$).

Eine der Rotation eines Vektors entsprechende Operation wird auf Tensorfunktionen im allgemeinen nicht angewandt.

Bei der Anwendung des Operators ∇ auf Produkte von Tensoren mit Vektoren oder anderen Tensoren, muß man ähnliche Differentiationsregeln berücksichtigen, wie bei den entsprechenden Operationen der Vektorrechnung. Auf diese Frage wollen wir hier nicht näher eingehen.

§ 24.

Zum Schluß müssen wir noch einige Worte über Tensoren höheren Ranges hinzufügen.

Die allgemeine Definition eines Tensors vom Range n, $^n\mathfrak{T}$, haben wir schon am Ende des § 18 gegeben. Solche Tensoren kann man durch Multiplikation oder Differentiation der Komponenten von Tensoren niedrigeren Ranges (einschließlich Vektoren) bilden („Erweiterung"). Man kann auch umgekehrt den Rang eines Tensors erniedrigen, und zwar durch Summation der Komponenten mit zwei gleichen Indizes („Verjüngung"). Aus einem Tensor dritten Ranges $^3\mathfrak{T}$ mit den Komponenten T_{ikl} bekommt man z. B. auf diese Weise drei Vektoren mit den Komponenten $\sum_{k=1}^{3} T_{ikk}$, $\sum_{k=1}^{3} T_{kik}$,

$\sum_{k=1}^{3} T_{kki}\,(i=1,2,3)$. Als ein schon bekannter Fall einer solchen Verjüngung sei der invariante Skalar $T^{(1)}=\sum_{i=1}^{3} T_{ii}$ genannt.

Die asymmetrischen Tensoren höheren Ranges können, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Tensoren, *nicht* in völlig symmetrische und völlig schiefsymmetrische Anteile aufgespalten werden. Man muß mit dieser Aufspaltung bei den Summanden haltmachen, die in bezug auf einige Indizespaare symmetrisch, in bezug auf alle anderen schiefsymmetrisch sind.

Ein völlig symmetrischer Tensor n-ten Ranges ${}^{n}\mathfrak{T}$ kann durch eine algebraische Fläche n-ter Ordnung

$$ {}^{n}\mathfrak{T}\mathfrak{r}\mathfrak{r}\ldots\mathfrak{r}=\sum_{i_1\ldots i_n} T_{i_1 i_2\ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2}\ldots x_{i_n}=\text{konst} $$

veranschaulicht oder „dargestellt" werden. Dabei bedeutet das Produkt ${}^{n}\mathfrak{T}\mathfrak{F}$ einen Tensor $(n-1)$-ten Ranges mit den Komponenten

$$ \sum_{i_1=1}^{3} T_{i_1 i_2 i_3\ldots i_n}\,\mathfrak{F}_{i_1}. $$

Als einfachste Beispiele *symmetrischer* Tensoren n-ten Ranges mögen die Tensoren

$$ R_{i_1 i_2\ldots i_n}=x_{i_1} x_{i_2}\ldots x_{i_n} \qquad (46) $$

und

$$ S_{i_1 i_2\ldots i_n}=\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}} \qquad (46\,a) $$

die nen ($\varphi=$ irgendeine skalare Funktion von $\mathfrak{r}$).

Daraus kann man durch Multiplikation mit invarianten Skalaren und Addition (es können selbstverständlich nur Tensoren desselben Ranges addiert werden) kompliziertere symmetrische Tensoren aufbauen.

Es sei bemerkt, daß die n-varianten Skalare (46) sich in der Form

$$ R\,(n_1,\ n_2,\ n_3)=x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \qquad (n_1+n_2+n_3=n) \qquad (46\,b) $$

schreiben lassen, und daß die Anzahl der Komponenten von ${}^{n}\mathfrak{R}$, die sämtlich gleich $R\,(n_1,\ n_2,\ n_3)$ sind, gleich

$$ \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} $$

ist.

Entsprechendes gilt für den Tensor (46a), wobei $R\,(n_1, n_2, n_3)$ durch

$$ S(n_1,n_2,n_3)=\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\partial x_3^{n_3}} $$

zu ersetzen ist.

Erster Abschnitt.

Die von der Zeit unabhängigen elektromagnetischen Wirkungen.

Erstes Kapitel.

Elektrostatische Wirkungen und Energieprinzip.

§ 1. Elektrische Dipole.

Bei der Darstellung der Grundlagen der Elektrostatik fängt man gewöhnlich mit der Betrachtung von *elektrisierten Körpern* an, denen die gewöhnlichen *neutralen* Körper als vollkommen „elektrizitätslos" gegenübergestellt werden. Diese Gegenüberstellung ist bekanntlich unberechtigt, da tatsächlich jeder neutrale Körper *verborgene elektrische Ladungen von zwei entgegengesetzten Sorten in äquivalenten, d. h. sich gegenseitig neutralisierenden Mengen enthält.* Unter gewöhnlichen Umständen sind diese Ladungen gleichmäßig über das Körpervolumen verteilt, so daß nicht nur der Körper als Ganzes, sondern jedes *nicht zu kleine* Volumelement desselben als „neutral" erscheint. Diese gleichförmige Verteilung kann aber bei gewissen Einwirkungen gestört werden, und zwar in der Weise, daß in einem Teil des Körpers ein Überschuß von elektrischen Ladungen der einen Sorte, und im anderen Teil ein äquivalenter Überschuß von Ladungen der entgegengesetzten Sorte auftritt. Eine solche *räumliche Trennung* entgegengesetzter elektrischer Ladungen in einem neutralen Körper äußert sich in dem Auftreten von *Anziehungskräften* zwischen diesem Körper und anderen ihn umgebenden neutralen Körpern, wobei in den letzteren eine ähnliche räumliche Trennung der verborgenen elektrischen Ladungen „induziert" wird.

Ein Körper oder Teilkörper, welcher elektrische Ladungen der einen oder der anderen Sorte in überschüssiger Menge enthält, heißt *elektrisiert.* Da im Normalzustand alle Körper neutral sind, so muß die Elektrisierung eines von ihnen immer verknüpft sein mit der entgegengesetzten Elektrisierung anderer Körper, mit welchen er am Anfang in Berührung war oder mit denen er einen einheitlichen Körper bildete. Umgekehrt: die „Neutralisation" des betrachteten Körpers, d. h. das Verschwinden des in ihm steckenden Überschusses elektrischer Ladungen einer gewissen Gattung kann nur gleichzeitig mit der Neutralisation eines oder einiger anderer entgegengesetzt elektrisierter Körper stattfinden.

Daraus folgt, daß das Auftreten oder Verschwinden von *elektrischen Kräften* (d. h. Kräften elektrischen Ursprunges) immer durch räumliche

Trennung bzw. Vereinigung (Annäherung) von elektrischen Ladungen entgegengesetzter Gattung bedingt wird — nicht aber durch „Schaffung" oder „Vernichtung" dieser Ladungen.

Somit darf man behaupten, daß die Elektrizität kein zufälliges und veränderliches Attribut der materiellen Körper darstellt, sondern aus Elementen — „Elementarladungen" — besteht, die ebenso unzerstörbar und unveränderlich sind, wie die Materie selbst. Infolge ihrer ständigen Verbindung mit den materiellen Körpern müssen diese Elementarladungen betrachtet werden als eine unveränderliche und untrennbare *Eigenschaft* der Elementarteilchen, aus welchen die materiellen Körper aufgebaut sind — in demselben Sinne, wie die *Masse* dieser Teilchen als eine solche Eigenschaft angesehen wird. Von diesem Standpunkte aus ist es von vornherein notwendig sich vorzustellen, daß die kleinsten *neutralen* Materieteilchen — die Atome — zusammengesetzte Gebilde sind, welche aus noch kleineren *elektrisierten* Teilchen bestehen. Diese überhaupt *kleinsten* materiellen Teilchen, welche nicht nur durch ihre Masse, sondern auch durch ihre elektrische Ladung charakterisiert sind, nennt man *Elektronen.* Wir müssen offenbar annehmen, daß es in jedem Atom zwei Gattungen von Elektronen gibt, die entgegengesetzte Ladungen von äquivalenter Größe haben.

Ohne zunächst auf die tiefere Begründung und Weiterentwicklung der Elektronentheorie einzugehen, wollen wir das oben skizzierte Bild zur Grundlage machen, auf der die allgemeinen Prinzipien der Elektrodynamik aufgebaut werden sollen.

Dabei werden wir nicht von „isolierten" elektrischen Ladungen ausgehen, sondern von den einfachsten *neutralen* Systemen, die aus zwei entgegengesetzten Ladungen (d. h. aus zwei entgegengesetzt elektrisierten Teilchen) bestehen. Solche Systeme heißen *elektrische Dipole.* Wir werden also zunächst die Kräfte betrachten, welche von elektrischen Dipolen aufeinander ausgeübt werden. Dabei kann man eine „isolierte" Ladung als das eine Ende eines elektrischen Dipols behandeln, dessen anderes (entgegengesetztes) Ende sich in sehr großer — praktisch unendlicher — Entfernung befindet.

Diese Betrachtungsweise hat gegenüber der gewöhnlichen — bei welcher nicht Dipole, sondern einzelne Ladungen als Quellen bzw. Angriffspunkte von elektrischen Kräften behandelt werden — nicht nur den prinzipiellen Vorzug, der Tatsache, daß die Elektrizität sich immer aus entgegengesetzt gleichen Ladungen, d. h. Dipolen, zusammensetzt, gerecht zu werden, sondern auch einen methodischen Vorteil, der bei den nachfolgenden Ausführungen zutage treten wird[1]).

[1]) Dieser Vorteil kommt darauf hinaus, daß die mechanischen Wirkungen der Dipole durch *Vektorgrößen,* welche diese Dipole charakterisieren, bestimmt werden können, während einzelne Ladungen durch skalare Größen charakterisiert sind.

§ 2. Das Moment eines elektrischen Dipols.

Der Anschaulichkeit halber werden wir einen elektrischen Dipol uns als ein festes Stäbchen denken, an dessen Endpunkten entgegengesetzte Ladungen äquivalenter Größe haften. Die Äquivalenz der beiden Ladungen, d. h. die Neutralität des von ihnen gebildeten Systems, wird dabei dadurch definiert, daß bei verschwindender Länge des Dipols die von ihm auf andere Dipole ausgeübten Kräfte und Drehkräfte, sowie die Kraft und Drehkraft, die er selbst von den anderen Dipolen erfährt, verschwinden sollen.

Wenn die Länge des Dipols sehr klein gegenüber seinem Abstand von den anderen Dipolen ist, so heißt er *elementar*. Die mechanische („aktive" und „passive") Wirkung eines elementaren Dipols muß offenbar praktisch unverändert bleiben, wenn man ihn parallel zu sich selbst, d. h. ohne Änderung seiner Orientierung, in einem Raumgebiet verschiebt, dessen lineare Ausdehnung von derselben Größenordnung wie seine Länge ist. Aus diesem Prinzip läßt sich leicht beweisen, daß die mechanische Wirkung eines solchen „*elementaren*" Dipols *proportional seiner Länge* ist und 2. daß der Proportionalitätsfaktor, der als Maß für die Größe der entsprechenden Ladungen dienen soll, eine *additive* Größe ist.

Es seien D_1 und D_2 zwei *identische* und gleichorientierte elementare Dipole, die sich in einem sehr kleinen Raumgebiet V befinden. Sehen wir von der Wirkung dieser Dipole aufeinander ab, und ziehen nur die Wechselwirkung jedes von ihnen mit den äußeren, d. h. im großen Abstande von V sich befindenden Dipolen in Betracht, so müssen diese Wechselwirkungen näherungsweise gleich sein, unabhängig von der Lage der beiden Dipole innerhalb V. Dies bedeutet, daß die mechanische Wirkung des durch D_1 und D_2 gebildeten Systems *doppelt* so groß ist, wie die Wirkung der beiden Teile, einzeln in irgendeiner relativen Lage genommen.

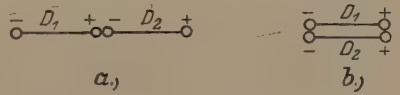

Abb. 5.

Wir betrachten speziell die folgenden zwei Lagen: 1. die *entgegengesetzten* Enden von D_1 und D_2 fallen miteinander zusammen (Abb. 5a), und 2. die *gleichen* Enden — d. h. die beiden Dipole — fallen miteinander zusammen (Abb. 5b).

Im ersten Falle bilden die aneinander liegenden entgegengesetzten Ladungen einen Dipol von verschwindender Länge; wir bekommen also einen einzigen Dipol D mit denselben Ladungen wie D_1 und D_2, aber von *doppelter Länge*. Damit ist also bewiesen, daß die mechanische Wirkung verschiedener Dipole ihrer Länge proportional ist[1]). Führen wir den Proportionalitätsfaktor als Maß für die Größe der entsprechen-

[1]) Strenggenommen ist dieser Satz nur für den betrachteten Spezialfall bewiesen. Seine Verallgemeinerung für beliebige Längenverhältnisse ist aber ganz einleuchtend.

den Ladungen ein, so ergibt sich aus der Betrachtung des zweiten Falles, daß diese Größe *additiv* ist, d. h. daß die Wirkung zweier sich in demselben Punkt befindenden Ladungen gleich ist der Wirkung *einer* Ladung, deren Größe gleich der Summe der Größen der beiden Einzelladungen ist.

Diese Addivität, die hier nur für Ladungen derselben Gattung festgestellt wurde, kann auf entgegengesetzte Ladungen übertragen werden, indem man diese bei äquivalenter Größe durch entgegengesetzte Vorzeichen (— oder +) charakterisiert; die Zuordnung des positiven Vorzeichens der Ladungen der einen oder der anderen Gattung bleibt dabei ganz willkürlich.

Ist diese Zuordnung festgestellt und die Ladungseinheit gewählt, so kann man den folgenden Satz aussprechen: *die mechanische Wirkung eines elementaren Dipols ist bestimmt durch das Produkt*

$$p = el, \tag{1}$$

wo l seine Länge und e (> 0) die absolute Größe jeder seiner Ladungen bedeutet.

Die Länge des Dipols l kann man betrachten als den Betrag eines Vektors $\mathfrak{l}$, nämlich des Radiusvektors seines positiven „Poles" (d. h. der positiven Ladung) in bezug auf den negativen Pol. Dem entspricht es, da offenbar die Ladung e eine skalare Größe ist, daß wir einen elementaren Dipol durch den Vektor

$$\mathfrak{p} = e\mathfrak{l} \tag{1a}$$

charakterisieren können. Dieser Vektor, dessen Betrag durch (1) gegeben ist, heißt das *Moment*, oder das *elektrische Moment* des Dipols. Er bestimmt — in Verbindung mit anderen Größen, die wir weiter unten betrachten werden —, nicht nur den Betrag, sondern auch die *Richtung* der auf einen elementaren Dipol wirkenden und von ihm ausgeübten Kräfte.

§ 3. Systeme von elementaren Dipolen.

Es seien D_1 und D_2 zwei elementare Dipole mit (nach Betrag wie nach Richtung) *verschiedenen* Momenten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, die sich in demselben kleinen Raumgebiet V befinden. Da die mechanische Wirkung jedes von ihnen bei festgehaltener Orientierung nur vom Moment $\mathfrak{p}_i = e_i\mathfrak{l}_i$ ($i = 1, 2$) nicht aber von der Ladung e_i abhängt, so kann man setzen $e_i = 1$ (d. h. $e_1 = e_2 = 1$), und auf diese Weise die Verschiedenheit der Dipole ausschließlich auf die Verschiedenheit ihrer Länge zurückführen. Wir rücken sie nun aneinander, so daß das positive Ende des einen mit dem negativen Ende des anderen zusammenfällt (Abb. 6); die äußeren Wirkungen der entsprechenden Ladungen müssen sich dabei gegenseitig zerstören, und das betrachtete System wird äquivalent einem elementaren Dipol D mit der Länge $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2$, d. h. mit dem Moment $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$.

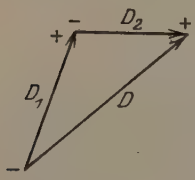

Abb. 6.

Dieses Resultat läßt sich leicht auf eine beliebige Anzahl von elementaren Dipolen verallgemeinern. Befinden sich diese in einem hinreichend kleinen Raumgebiet[1]), so *sind sie in Hinsicht auf ihre mechanische Wechselwirkung mit äußeren* (d. h. weitentfernten Dipolen) *äquivalent einem einzigen Dipol, dessen Moment gleich der geometrischen Summe ihrer elektrischen Momente ist.*

Umgekehrt kann man einen gegebenen elementaren Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}$ durch ein System von beliebig vielen (miteiander festverbundenen) elementaren Dipolen ersetzen, deren Momente $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ der Bedingung

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 \cdots = \mathfrak{p} = \int e \tau \, d\sigma$$

genügen.

Die obigen Sätze bleiben offenbar auch bei *nichtelementaren* Dipolen gültig (d. h. solchen, deren Länge nicht klein ist gegenüber ihrem Abstand von anderen mit ihnen zusammenwirkenden Dipolen). Dabei wird aber die mechanische Wirkung solcher Dipole durch Angabe ihrer Momente noch nicht bestimmt. Man kann jedoch einen nichtelementaren Dipol in eine *Kette von elementaren* zerlegen, welche ihn durch ihre Momente und *Lagen* vollständig charakterisieren. Verbindet man nämlich die Endpunkte A und B des betrachteten Dipols mit dem Moment $e \cdot AB$ durch eine gebrochene Linie mit unendlich kleinen geradlinigen Elementen $A P_1, P_1 P_2, \ldots P_n B$ und denkt sich in den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ die Ladungen $+e$ und $-e$ konzentriert, so erhält man eine Kette von elementaren Dipolen mit den Momenten $e A P_1, e P_1 P_2$ usw., (Abb. 7), deren geometrische Summe gleich $e A B$ ist. Dabei muß man aber beachten, daß in diesem Fall die einzelnen elementaren Dipole *nicht* unabhängig voneinander verschoben werden können — wenigstens nicht in einem Gebiete, dessen lineare Abmessungen mit der Länge $A B$ vergleichbar sind.

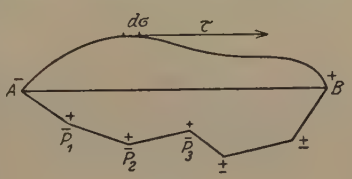

Abb. 7.

Die Gestalt der gebrochenen Linie $A P_1 P_2 \ldots B$ bleibt ganz willkürlich. Man kann speziell zum Grenzfall einer *Kurve* mit stetiger Krümmung übergehen; jedem Elemente $d\sigma$ dieser Kurve wird dabei ein elementarer Dipol mit dem Moment $d\mathfrak{p} = e\tau \, d\sigma$ zugeordnet, wo τ einen Einheitsvektor in der Richtung von $d\sigma$ („Tangentialvektor") bedeutet.

Mittels dieser Zerlegung wird das Problem der Bestimmung der Wechselwirkung zwischen nichtelementaren Dipolen auf das entsprechende Problem für elementare Dipole zurückgeführt. Dabei kann man jeden elementaren Dipol einfach als *einen Punkt* fassen; denn da nicht seine Länge sondern nur sein elektrisches Moment in Betracht

[1]) Von derselben linearen Ausdehnung wie ihre Länge.

kommen soll, kann man durch Vergrößerung der Ladung bei festgehaltenem Moment stets die Länge beliebig klein machen. — Die kinematische Beschreibung eines elementaren Dipols reduziert sich also auf die Angabe seiner „Lage", d. h. des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ des ihn darstellenden Punktes, und seiner „Orientierung", d. h. der Richtung seines elektrischen Moments (dessen Betrag wir als konstant betrachten werden).

§ 4. Die Statik eines elementaren Dipols; die elektrische Feldstärke.

Wir stellen uns vor, daß alle auf den betrachteten elementaren Dipol wirkenden Dipole festgehalten sind, während er selbst sich beliebig verschieben und drehen kann. Es fragt sich nun, wie die auf ihn wirkende äußere Kraft $\mathfrak{F}$ und das Drehmoment (Drehkraft) $\mathfrak{M}$ von seiner Lage ($\mathfrak{r}$) und Orientierung ($\mathfrak{p}$) abhängen.

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir annehmen, daß *diese Kraftwirkungen einen konservativen Charakter haben*, d. h. sich aus einer noch unbestimmten *Energiefunktion* $U(\mathfrak{r}, \mathfrak{p})$ ableiten lassen. Diese Annahme, die für das Folgende eine grundlegende Bedeutung hat, werden wir als *Energieprinzip* bezeichnen[1]).

Die Lage des betrachteten Dipols D werde zunächst festgehalten; er möge sich aber um den betreffenden Punkt P beliebig drehen. Aus dem Energieprinzip folgt dann, daß er sich nach einer bestimmten Richtung orientieren wird, die einem Minimum der Energie als Funktion von $\mathfrak{p}$ (bei $\mathfrak{r}$ = konst) entspricht. Von vornherein ist es möglich, daß es *mehrere* solche stabile Gleichgewichtsorientierungen gibt[2]).

Es sei nun PQ eine dieser Richtungen.

Fällt das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ des Dipols in die Richtung PQ, so wird die auf ihn wirkende Drehkraft gleich null. Wir stellen uns nun vor, daß der Dipol um einen Winkel θ aus dieser Richtung gedreht wird (Abb. 8), und ersetzen ihn durch zwei Dipole D_1 und D_2 mit den Momenten $p_1 = p \cos\theta$ und $p_2 = p \sin\theta$, die parallel bzw. senkrecht zu PQ stehen. Da nach dem oben Gesagten D_1 keine Drehkraft erfährt, muß die auf D ausgeübte Drehkraft $\mathfrak{M}$ mit der auf D_2 einwirkenden Drehkraft $\mathfrak{M}_2$ zusammenfallen.

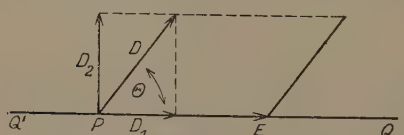

Abb. 8.

[1]) Das Energieprinzip bedeutet, daß die Arbeit, welche bei einer Verschiebung oder Drehung des Dipols durch die auf ihn wirkenden Kräfte und Drehkräfte geleistet wird, nur von seiner *Anfangs-* und *End*lage bzw. Orientierung abhängt, nicht aber von den Zwischenlagen und Orientierungen.

[2]) Wäre *keine* Gleichgewichtsorientierung vorhanden, so würde die bei der Rückkehr des Dipols in die ursprüngliche Orientierung geleistete Arbeit im allgemeinen von Null verschieden sein.

Bei genügend kleinen Werten von θ muß D offenbar das Bestreben haben, sich in die Richtung PQ einzustellen, d. h. das Drehmoment $\mathfrak{M}$ muß senkrecht zur Ebene (D, PQ) gerichtet sein — ganz unabhängig davon, ob es noch andere Gleichgewichtsrichtungen gibt oder nicht. Dasselbe kann man aber wegen der Gleichheit $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ von dem auf D_2 wirkenden Drehmoment sagen. Da aber der Winkel von D_2 mit der Geraden $Q'PQ$ ein Maximum hat, so können wir sofort schließen, daß PQ *die einzige stabile Gleichgewichtsrichtung* ist, d. h. die einzige Richtung, welche der Bedingung $U(\mathfrak{p}) =$ minimum entspricht.

Das Drehmoment $\mathfrak{M}_2$ muß offenbar dem elektrischen Moment von D_2, d. h. der Größe $p \sin\theta$ proportional sein. Bezeichnen wir den — von p und θ unabhängigen — Proportionalitätsfaktor durch E, so wird, wegen $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$,

$$M = Ep \sin\theta. \tag{2}$$

Der Betrag des Vektors $\mathfrak{M}$ ist also gleich dem Flächeninhalt eines durch den Vektor $\mathfrak{p}$ einerseits und eine von P nach Q gerichtete Strecke der Länge E andrerseits aufgespannten Parallelogramms.

Betrachtet man folglich E als den Betrag eines durch diese Strecke dargestellten Vektors $\mathfrak{E}$, so kann man den Vektor $\mathfrak{M}$ als das äußere Produkt der Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{E}$ bestimmen, nach der Gleichung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}. \tag{3}$$

Durch diese Formel ist die Vektorfunktion $\mathfrak{M}(\mathfrak{r}, \mathfrak{p})$ in zwei Faktoren zerlegt, von denen einer *nur* von $\mathfrak{p}$ (und zwar linear), der andere *nur* von $\mathfrak{r}$ — (auf eine noch ganz unbekannte Weise) — abhängt.

Es ist nun leicht, die entsprechende Zerlegung für die Energiefunktionen zu erhalten. — Die Arbeit, die *gegen* $\mathfrak{M}$ geleistet werden muß, um den Winkel θ um $d\theta$ zu vergrößern, ist gleich dem Produkt $M d\theta$; andererseits ist sie gleich der entsprechenden Energievermehrung dU. Nach (2) bekommen wir also $dU = Ep \sin\theta d\theta$, und folglich

$$U = -Ep \cos\theta + C,$$

wo C eine Konstante in bezug auf θ ist; sie kann aber, ebenso wie E, von $\mathfrak{r}$ abhängen. Um diese Abhängigkeit aufzuklären, denken wir uns neben dem betrachteten Dipol D einen anderen D' mit einem elektrischen Moment von demselben Betrag, aber von entgegengesetzter Richtung ($\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$). Seine potentielle Energie ist offenbar gleich

$$U' = +pE \cos\theta + C,$$

da $\theta' = \theta + \pi$ ist. Die potentielle Energie $U + U'$ des durch die beiden Dipole gebildeten Systems (in bezug auf andere „äußere" Dipole) reduziert sich also auf $2C$. Da aber das resultierende elektrische Moment dieses Systems gleich Null ist, so kann es *gar keine Kräfte* erfahren; deshalb muß die Größe C auch von $\mathfrak{r}$ unabhängig sein. Wir können folglich

$C = 0$ setzen; dementsprechend bekommen wir den folgenden allgemeinen Ausdruck für die Energie als Funktion von $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{r}$:

$$U = -pE\cos\theta = -\mathfrak{p}\mathfrak{E}. \tag{4}$$

Denkt man sich die Gestalt der Funktion $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ gegeben, so kann man die auf den Dipol wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ aus (4) nach dem Energieprinzip berechnen. Die Arbeit dieser Kraft bei einer Verschiebung des Dipols um die Strecke $d\mathfrak{r}$ und *festgehaltener Orientierung*, bestimmt sich nämlich aus der Gleichung

$$\mathfrak{F}\,d\mathfrak{r} = -dU = d(\mathfrak{p}\mathfrak{E}) = d\mathfrak{r}\cdot\operatorname{grad}(\mathfrak{p}\mathfrak{E})$$

(siehe Einleitung, § 10), d. h. wegen der Willkürlichkeit von $d\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{F} = \operatorname{grad}(\mathfrak{p}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{p}\operatorname{grad})\mathfrak{E} + \mathfrak{p}\times\operatorname{rot}\mathfrak{E} \tag{5}$$

[Einleitung, Formel (27)].

Der Vektor oder besser die Vektorfunktion $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$, welche die Wirkung aller „äußeren" Dipole auf den betrachteten, abgesehen von der Anwesenheit des letzteren in dem betreffenden Punkt, bestimmt, heißt die (äußere) *elektrische Feldstärke*. Mittels eines verschiebbaren und sich frei drehenden Dipols kann man diese Feldstärke nach Richtung und Betrag an Hand der Formel (2) experimentell ermitteln. Und zwar fällt die Richtung von $\mathfrak{E}$ mit derjenigen zusammen, in welcher der Dipol sich selbst einzustellen sucht; der entsprechende Betrag E ist gleich dem Verhältnis des größten Drehmoments, welches bei einer zur vorigen senkrechten Orientierung auf dem Dipol ausgeübt wird, zu seinem elektrischen Moment.

Es sei bemerkt, daß für $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{E}$ ($\theta = 90^0$) die Kraft $\mathfrak{F}$ verschwindet [nach (5)]. Dagegen verschwindet für $\mathfrak{p} \parallel \mathfrak{E}$ das Drehmoment $\mathfrak{M}$, während $\mathfrak{F}$ seine für die betreffende Lage des Dipols maximale Größe erreicht. Speziell für $\theta = 0$ fällt $\mathfrak{F}$ in die Richtung des raschesten Anwachsens von E, für $\theta = 180^0$ in die entgegengesetzte Richtung, d. h. die Richtung der raschesten Abnahme. Die erste dieser Orientierungen entspricht (bei festgehaltener Lage) dem stabilen, die zweite dem labilen Gleichgewicht [U = minimum bzw. U = maximum, nach (4)].

5. Der wirbelfreie Charakter des elektrischen Feldes und seine Wirkung auf einzelne Ladungen (Pole).

Die Kräfte, welche in einem gegebenen elektrischen Felde auf einen nichtelementaren Dipol wirken, können bestimmt werden durch Zerlegung dieses Dipols in eine Kette von elementaren (§ 3). Dabei brauchen wir nach dem Energieprinzip nur die potentielle Energie des betrachteten Dipols zu berechnen. Diese potentielle Energie U ist offenbar gleich der Summe der Energien, die den einzelnen elementaren Dipolen entsprechen[1]). Bilden diese eine Kurve σ (Abb. 7), so wird

[1]) Dabei handelt es sich selbstverständlich um ihre Energie in bezug auf äußere elektrische Systeme, nicht aber in bezug aufeinander.

$dU = -d\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{E} = -(\tau e d\sigma\,\mathfrak{E}) = -eE_\tau d\sigma$, wo $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke *an der betreffenden Stelle* und E_τ ihre Projektion auf $d\sigma$ bedeutet, und folglich

$$U = -e\int_A^B E_\tau d\sigma. \tag{6}$$

Die Integration vollzieht sich vom negativen zum positiven Ende des betrachteten Dipols.

Die auf den Dipol ausgeübte Kraftwirkung setzt sich offenbar zusammen aus zwei Kräften $\mathfrak{f}_A$ und $\mathfrak{f}_B$, welche auf seine Enden wirken. Stellen wir uns nun vor, daß diese Enden, d. h. die entsprechenden *Pole* (mit den Ladungen $-e$ und $+e$) sich aus den Punkten A, B nach den Nachbarpunkten A', B' verschieben. Dabei wird die Arbeit $\mathfrak{f}_A\delta\mathfrak{r}_A + \mathfrak{f}_B\delta\mathfrak{r}_B$ geleistet, wo $\delta\mathfrak{r}_A$ und $\delta\mathfrak{r}_B$ die unendlich kleinen Verrückungen AA' bzw. BB' bedeuten. Andererseits muß diese Arbeit nach dem Energieprinzip gleich der Verminderung der potentiellen Energie des Dipols sein, d. h. gleich der Differenz $-\delta U = -(U' - U)$ $= e\int_{A'}^{B'} E_{\tau'} d\sigma' - e\int_A^B E_\tau d\sigma$. Wegen der Willkürlichkeit der Kurven σ und σ' könnten wir die letztere als die durch die Strecken AA' und BB' gebildete Verlängerung des ersteren betrachten und dementsprechend $\int_{A'}^{B'} = \int_{A'}^{A} + \int_A^B + \int_B^{B'} = \int_A^B + \int_B^{B'} - \int_A^{A'}$ setzen (die Integranden sind der Einfachheit halber weggelassen). Es wird also

$$-\delta U = e\int_B^{B'} E_{\tau'} d\sigma' - e\int_A^{A'} E_{\tau'} d\sigma' = e(\mathfrak{E}_B\delta\mathfrak{r}_B) - e(\mathfrak{E}_A\delta\mathfrak{r}_A).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem ursprünglichen

$$-\delta U = \mathfrak{f}_B\delta\mathfrak{r}_B + \mathfrak{f}_A\delta\mathfrak{r}_A,$$

so ergibt sich:

$$\mathfrak{f}_B = e\mathfrak{E}_B, \quad \mathfrak{f}_A = -e\mathfrak{E}_A.$$

Die Kraft $\mathfrak{f}$, welche auf einen einzelnen Pol mit der Ladung e ausgeübt wird, ist folglich gleich

$$\mathfrak{f} = e\mathfrak{E}. \tag{7}$$

Diese Formel entspricht der üblichen Definition der elektrischen Feldstärke, als der Kraft, die im betreffenden Punkt auf die (positive) Ladungseinheit wirkt.

Die Energie des Dipols $(A\,B)$ ist eine ganz bestimmte Größe, die von seiner Zerlegung in elementare Dipole, d. h. von der Gestalt der Integrationskurve in (6) unabhängig bleiben muß. Verbindet man zwei solche Kurven σ_1 und σ_2 zu einer *geschlossenen* Kurve σ und integriert längs σ_1 in der positiven Richtung (von A nach B) und längs σ_2 in der negativen (von B nach A), so muß sich immer null ergeben. Wir kom-

men also zu dem Schluß, daß die Zirkulation des Vektors $\mathfrak{E}$ längs irgendeiner geschlossenen Kurve verschwindet, d. h.

$$\oint E_\tau d\sigma = 0.$$

Daraus folgt nach der *Stokes*schen Formel [(17), Einleitung], daß die elektrische Feldstärke *im ganzen Raum* der Bedingung

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = 0 \tag{8}$$

genügen muß. Diese Bedingung, die als eine direkte Folge des Energieprinzips anzusehen ist, drückt die Grundeigenschaft des elektrischen Feldes aus, nämlich seine *Wirbelfreiheit*. Da (8) identisch in r erfüllt ist, so kann man nach (18) (Einleitung) setzen

$$\mathfrak{E} = -\,\text{grad}\,\varphi, \tag{9}$$

wo φ eine noch unbestimmte Funktion bedeutet, die das *skalare* oder *elektrische Potential* heißt. — Dementsprechend bezeichnet man das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ als ein *wirbelfreies* oder *potentielles Feld*.

Die physikalische Bedeutung des Potentials φ leuchtet aus der Formel (6) ein. Es ist nämlich nach (9)

$$E_\tau = -\,\text{grad}_\tau\,\varphi = -\frac{d\varphi}{d\sigma}$$

und folglich

$$U = e\,(\varphi_B - \varphi_A) = e_B\varphi_B + e_A\varphi_A.$$

Die potentielle Energie eines einzelnen Pols ist demnach gleich

$$U = e\varphi. \tag{10}$$

Das elektrische Potential φ in irgendeinem Punkt P ist also gleich der potentiellen Energie einer (positiven) Ladungseinheit, die sich in diesem Punkt befindet, in bezug auf alle solche Ladungen, von denen dieses Potential herrührt.

Da die auf den betrachteten Pol wirkende Kraft $\mathfrak{f}$ gleich dem negativen Gradienten seiner potentiellen Energie sein muß, bekommen wir ferner $\mathfrak{f} = -\,\text{grad}\,U = -\,e\,\text{grad}\,\varphi$, oder nach (9) $\mathfrak{f} = e\mathfrak{E}$, d. h. die Formel (7).

§ 6. Die Zurückführung der Dipolwirkungen auf einzelne Pole.

Bei der üblichen Darstellung der Elektrostatik, die von der Betrachtung der Wechselwirkung einzelner Pole ausgeht, wird die Formel (7) am Anfang definitionsweise aufgestellt. Das Energieprinzip [in der Form (9)] wird aus der Annahme abgeleitet, daß die Kraft zwischen zwei elektrischen Polen die Richtung der sie verbindenden Geraden hat, d. h. eine „Zentralkraft" ist. Die Kraft und Druckkraft, welche auf einen Dipol ausgeübt werden, lassen sich dann berechnen aus den beiden Kräften, die auf seine einzelnen Pole wirken.

Im Falle eines *elementaren* Dipols mit unendlich kleiner Länge $P_1P_2 = \mathfrak{l}$, kann man bei der Berechnung des Drehmoments $\mathfrak{M}$ die

Kräfte $\mathfrak{f}_1 = e_1\mathfrak{E}_1 = -e\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{f}_2 = e_2\mathfrak{E}_2 = +e\mathfrak{E}_2$ als ihrem Betrage nach gleich und entgegengerichtet betrachten und folglich $\mathfrak{M} = \mathfrak{l} \times e\mathfrak{E}$ setzen, wo $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke in irgendeinem Punkt P des Dipols bedeutet (Abb. 9); auf diese Weise bekommen wir die Formel (3). Berücksichtigt man die Verschiedenheit der Kräfte $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{f}_1$, so ergibt sich die auf den Dipol wirkende Kraft als ihre geometrische Summe:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 = e\,(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1).$$

Wegen der Kleinheit von l kann man dabei setzen $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = (\mathfrak{l}\ \mathrm{grad})\,\mathfrak{E}$ (Einleitung, § 10) und folglich

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{p}\ \mathrm{grad})\,\mathfrak{E}. \qquad (11)$$

Diese Formel fällt mit (5) zusammen, wenn man noch die aus dem Energieprinzip folgende Bedingung $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$ beachtet.

Was die potentielle Energie eines elementaren Dipols anbetrifft, so reduziert sie sich auf die Summe der entsprechenden Energien seiner beiden Enden, d. h. $U = e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 = e\,(\varphi_2 - \varphi_1) = e\,(\mathfrak{l}, \mathrm{grad}\,\varphi) = -(\mathfrak{p}\mathfrak{E})$, im Einklang mit (4).

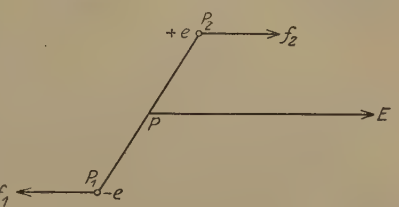

Abb. 9.

Obwohl diese (übliche) Betrachtungsweise etwas einfacher ist als die umgekehrte, die wir in den vorigen Paragraphen eingeschlagen haben, hat die letztere den Vorteil, daß sie sich unmittelbar auf die Wirkungen zwischen *elektrischen Strömen* übertragen läßt, wobei auch die Analogie und Verschiedenheit der beiden Wirkungsarten klarer zutage tritt.

Zweites Kapitel.

Elektrokinetische (magnetische) Wirkungen und Energieprinzip.

§ 1. Elektrische Ströme.

Jede geordnete Bewegung der Elektrizität in materiellen Körpern, bei der die entgegengesetzten Ladungen *sich relativ zueinander verschieben*, heißt ein *elektrischer Strom*. Ein elektrischer Strom kann demnach verursacht sein durch die Bewegung der entgegengesetzten Ladungen in entgegengesetzten Richtungen, oder durch die Bewegung der Ladungen einer bestimmten Gattung, unter vollkommener Ruhe der anderen. Der Fall, daß beide Ladungssorten sich in derselben Richtung mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, kann aufgefaßt werden als die Überlagerung einer der beiden oben erwähnten Fälle mit einer Gesamtbewegung des betreffenden materiellen Körpers — einer Gesamtbewegung, die in elektrischer Hinsicht ganz unwirksam bleibt.

Denkt man sich die entgegengesetzten Ladungen miteinander paarweise in elementare Dipole verknüpft, so reduziert sich der Stromvorgang in jedem Augenblick *auf die zeitliche Änderung der elektrischen Momente dieser Dipole.*

Es seien $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die Radiusvektoren der Enden P_1 und P_2 eines solchen Dipols in bezug auf einen festen Punkt O. Betrachten wir die ihn bildenden Ladungen $e_1 = -e$ und $e_2 = +e$ als konstant, so ergibt sich für die zeitliche Ableitung seines elektrischen Moments $\mathfrak{p} = eP_1P_2 = e(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)$

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = e(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1) = e_1\mathfrak{v}_1 + e_2\mathfrak{v}_2, \qquad (1)$$

wo $\mathfrak{v}_1 = \frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}$ und $\mathfrak{v}_2 = \frac{d\mathfrak{r}_2}{dt}$ die „absoluten" Geschwindigkeiten der beiden Ladungen, und $\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1$ ihre relative Geschwindigkeit bedeutet.

Das Produkt der Ladung eines Teilchens mit seiner Geschwindigkeit wollen wir im folgenden den *elektrischen Impuls* dieses Teilchens nennen (im Anschluß an den gewöhnlichen *mechanischen* Impuls, der gleich dem Produkt von *Masse* und Geschwindigkeit ist). Der Inhalt der Formel (1) läßt sich also folgendermaßen aussprechen: die zeitliche Ableitung des elektrischen Moments eines Dipols ist gleich der geometrischen Summe der elektrischen Impulse der ihn bildenden Pole.

Der auf die Volumeinheit des betrachteten Körpers bezogene elektrische Impuls heißt die *Stromdichte* (im betreffenden Punkte). Die Dichte des elektrischen Stromes $\mathfrak{J}$ kann auch definiert werden als die zeitliche Ableitung des elektrischen Moments $\mathfrak{P}$ der Volumeneinheit, d. h. der geometrischen Summe der Momente der Dipole, die sich im betrachteten Augenblick in einem sehr kleinen Volumelement befinden, dividiert durch die Größe dieses Volumelements.

Es ist also

$$\mathfrak{J} = \frac{d\mathfrak{P}}{dt}. \qquad (2)$$

Der Vektor $\mathfrak{P}$ wird gewöhnlich als die *elektrische Polarisation* des Körpers im betreffenden Punkt bezeichnet. Seine Einführung ist besonders dann zweckmäßig, wenn die positiven und negativen Ladungen, die sich in irgendeinem Volumelement befinden, immer in diesem Volumelement bleiben, d. h. sich voneinander nicht trennen lassen. Das ist der Fall bei den sog. *dielektrischen* Körpern, deren Moleküle als durch untrennbare Ladungen gebildete Dipole angesehen werden können.

Dagegen können bei den *Elektrizitätsleitern* (wie Elektrolyten und Metallen) die einzelnen Ladungen (Elektronen, Ionen) im ganzen Körpervolumen unabhängig voneinander herumwandern. In diesem Fall muß man, um den Begriff der Polarisation und die Beziehung (2) beibehalten zu können, sich vorstellen, daß die miteinander zu elementaren Dipolen verknüpften entgegengesetzten Ladungen von Zeit zu Zeit ausgetauscht werden, damit ihre gegenseitige Entfernung immer klein (gegenüber den Körperabmessungen) bleibt.

§ 2. Stationäre elektrische Ströme.

Wenn die Stromdichte in jedem Punkt des betrachteten Körpers zeitlich konstant bleibt (was offenbar nur bei Leitern stattfinden kann), so heißt der elektrische Strom *stationär* (oder auch „Gleichstrom").

In diesem Fall kann man sich vorstellen, daß die elektrischen Ladungen sich in *geschlossenen Kurven* bewegen, und daß die Ladungen, welche aus einem Volumelement nach einer Seite herausgehen, durch andere, die auf der entgegengesetzten Seite hineintreten, sofort ersetzt werden.

Stellen wir uns vor, daß es in der Volumeinheit N Teilchen mit der Ladung e gibt, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen. Der diesen Ladungen entsprechende Anteil der Stromdichte ist offenbar gleich $Ne\mathfrak{v}$. Es sei dS ein Flächenelement, dessen Normale $\mathfrak{n}$ den Winkel θ mit der Bewegungsrichtung (d. h. mit $\mathfrak{v}$) bildet (Abb. 10). Die Anzahl dv der Ladungen der betrachteten Sorte, welche durch dS in der Zeit dt hindurchgehen, ist gleich dem Produkt von N mit dem Volumen eines Zylinders mit der Grundfläche dS und der Höhe $vdt \cdot \cos\theta = (\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, dt = v_n dt$. Rechnet man diese Anzahl als positiv für $\theta < 90^0$ und negativ für $\theta > 90^0$, so wird

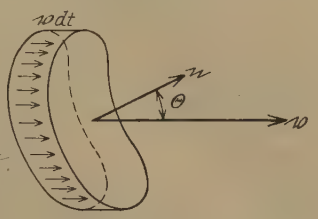

Abb. 10.

$$dv = N(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, dS dt.$$

Durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit e und Summation über alle Ladungssorten (mit verschiedenen e oder $\mathfrak{v}$), die sich im betrachteten Körper befinden — oder besser gesagt *bewegen* —, bekommen wir die totale *Elektrizitätsmenge*, die in der Zeit dt durch dS hindurchgeht:

$$dQ = \Sigma Ne(\mathfrak{v}\mathfrak{n})\, dS dt = (\Sigma Ne\mathfrak{v})\, \mathfrak{n} dS dt.$$

Es sei bemerkt, daß der Anteil der positiven Ladungen in diesem Elektrizitätsstrom durch dS positiv oder negativ ist, je nachdem diese sich in der Richtung der Normale $\mathfrak{n}$ ($\theta < 90^0$) oder in der entgegengesetzten Richtung ($\theta > 90^0$) bewegen; der entsprechende Anteil der negativen Ladungen ist umgekehrt negativ im ersten Falle und positiv im zweiten.

Die Summe $\Sigma Ne\mathfrak{v}$ ist offenbar nichts anderes als die oben definierte *Stromdichte* $\mathfrak{J}$. Die Elektrizitätsmenge $\frac{dQ}{dt}$, welche durch dS pro Zeiteinheit fließt, heißt die *Stärke* des entsprechenden Stromes. Die elektrische Stromstärke für eine beliebige Fläche drückt sich also durch das Integral aus:

$$I = \int J_n dS. \tag{3}$$

Im Falle einer geschlossenen Fläche muß diese Stromstärke gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen Abnahme der Elektrizitätsmenge in dem durch S begrenzten Volumen V sein (dabei bedeutet wie üblich $\mathfrak{n}$ die

äußere Normale). Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem Prinzip der Unzerstörbarkeit der elektrischen Ladungen (Kap. I, § 1). Bezeichnen wir die *elektrische Ladungsdichte*, d. h. die Summe Σe der Ladungen in der Volumeinheit, mit ϱ, so kann man den erwähnten „Erhaltungszusatz" in der Form

$$\oint J_n dS = -\frac{d}{dt}\int \varrho dV$$

ausdrücken. Mittels der *Gauß*schen Formel bekommen wir ferner

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{J} dV = -\frac{d}{dt}\int \varrho dV$$

oder da $\frac{d}{dt}\int \varrho dV = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV$ ist,

$$\int \left(\operatorname{div} \mathfrak{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) dV = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit des Volumens V muß der Integrand identisch verschwinden, so daß für das Erhaltungsgesetz der elektrischen Ladungen sich die folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{J} = 0. \qquad (4)$$

In dem uns interessierenden Fall einer *stationären* Elektrizitätsströmung ist $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ und folglich

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0 \qquad (4a)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die „Stromlinien", d. h. die das Vektorfeld $\mathfrak{J}$ darstellenden Kurven, *quellenfrei* sind, d. h. keine Anfangs- oder Endpunkte haben. Sie müssen also, sofern die elektrische Strömung in einem *begrenzten* Raum vor sich geht, *geschlossene Kurven* sein. Die Gesamtheit solcher Kurven, die durch eine ungeschlossene Fläche S (oder die sie begrenzende Linie σ) gehen, kann als ein Stromfaden oder „Ring" aufgefaßt werden; die Stromstärke $I = \int J_n dS$ behält denselben Wert für beliebige Querschnitte dieses „Ringes".

Jeden Körper, in welchem eine stationäre Elektrizitätsströmung stattfindet, kann man sich demnach in eine Menge von solchen „Stromringen" mit unendlich kleinen Querschnitten zerlegt denken, die in Hinsicht auf die *Stromverteilung* dieselbe Rolle spielen wie z. B. die gewöhnlichen (nach allen Seiten unendlich kleinen) Volumelemente für die Verteilung der elektrischen Ladung (oder der Polarisation). Wir werden solche unendlich dünne ringförmige Stromelemente als *lineare* elektrische Ströme bezeichnen.

Lineare Ströme im mathematischen Sinne des Wortes gibt es selbstverständlich nicht. Man kann aber einen in einem sehr dünnen Metalldraht fließenden elektrischen Strom — sofern seine Zusammenwirkung mit *anderen* solchen Strömen betrachtet wird — praktisch als linear

behandeln, ebenso wie wir im vorigen Kapitel die beiden Pole eines Dipols als Punktladungen behandelt haben.

§ 3. Das magnetische Moment eines linearen Stroms.

Die elektrischen Ströme, oder vielmehr die Körper, in welchen sie zirkulieren, üben aufeinander gewisse Wirkungen aus, die man als *elektrokinetische* oder *magnetische* bezeichnet. Diese Wirkungen lassen sich am einfachsten studieren bei *linearen* elektrischen Strömen — welche in dieser Hinsicht dieselbe Rolle spielen, wie die elektrischen Dipole bei dem Studium der elektrostatischen Wirkungen. Den elementaren Dipolen entsprechen dabei *elementare lineare Ströme*, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß die entsprechenden Stromlinien (die wir uns als unendlich dünne starre Drähte denken werden) *eben* und *sehr klein* gegenüber ihrer gegenseitigen Entfernung sind.

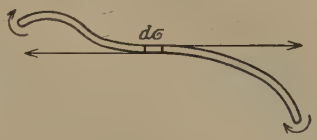

Abb. 11.

Wir beachten zunächst den folgenden ganz offenbaren Umstand. Zieht sich die Stromlinie auf einen Punkt zusammen, so muß ihre mechanische (magnetische) Wirkung verschwinden. Sie muß ebenfalls verschwinden, wenn die Stromlinie sich zu einer „Doppellinie" von endlicher Länge zusammenzieht, d. h. zu einer Linie, die aus zwei sich praktisch überlagernden Hälften besteht (Abb. 11), so daß die Summe der elektrischen Impulse in jedem Doppelelement dieser Linie ($d\sigma$) gleich null wird.

Daraus läßt sich leicht schließen, daß die für die mechanische Wirkung einer elementaren Stromlinie maßgebende geometrische Größe *nicht ihre Länge*, sondern der *Inhalt der von ihr begrenzten Fläche ist.*

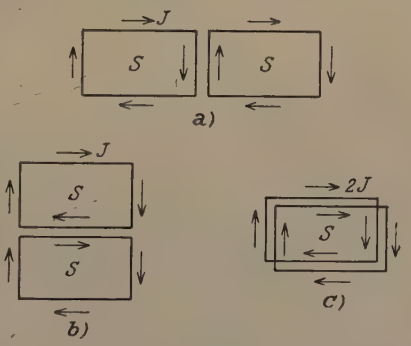

Abb. 12.

Wir stellen uns zunächst zwei vollständig identische elementare Stromlinien von rechteckiger Gestalt vor, die gleich orientiert sind und sich nebeneinander — in einem Gebiet V von ungefähr denselben Abmessungen wie ihre eigene Länge — befinden. Die mechanische Wirkung des von ihnen gebildeten Systems auf äußere (fernliegende) elektrische Ströme muß offenbar doppelt so groß sein wie die entsprechende Wirkung für jede der beiden betrachteten Stromlinien — und dies ganz *unabhängig von ihrer relativen Lage*[1]). Man kann sie speziell so aneinanderlegen, daß je zwei ihrer Seiten zusammenfallen würden (Abb. 12a, b).

[1]) Sofern sie im Gebiet V bleiben.

Diese zusammenfallenden Seiten bilden dabei eine Doppelstromlinie, deren mechanische Wirkung gleich null ist. Die anderen sechs Seiten bilden eine neue rechteckige Stromlinie, deren Gestalt in den Fällen *a* und *b* verschieden ist, die aber denselben Flächeninhalt $2\,S$ haben, wo S den Flächeninhalt der beiden einzelnen Stromlinien bedeutet. Damit ist gezeigt, daß die mechanische Wirkung einer elementaren Stromlinie *unabhängig von ihrer Gestalt und proportional ihrem Flächeninhalt ist*[1]).

Anstatt die oben betrachteten Stromlinien aneinanderzulegen, kann man sie überlagern, wie es in Abb. 12 c angedeutet ist. Dabei bekommen wir tatsächlich eine einzelne Stromlinie von gleicher Gestalt und gleichem Umfang wie die ursprünglichen, *aber mit einer doppelt so großen Stromstärke* $2\,I$.

Wir sehen also, daß die mechanische Wirkung, die eine elementare Stromlinie auf äußere (fernliegende) Ströme ausübt, oder von solchen Strömen erfährt, *der von ihr umschlossenen Fläche S und der Stromstärke I proportional* ist, d. h. durch das Produkt $I\,S$ bestimmt wird. Dieses Produkt, das dem elektrischen Moment eines (elementaren) Dipols entspricht, heißt das *magnetische Moment* des betrachteten Stromes (oder der Stromlinie).

Bei der Behandlung der Wechselwirkung von elektrischen Strömen ist es zweckmäßig, für die Stromstärke eine neue Einheit einzuführen, die wir erst später bestimmen werden. Das Verhältnis dieser neuen „elektrokinetischen" Einheit zur ursprünglichen „elektrostatischen" sei c. Dies bedeutet, daß der „elektrostatischen" Stärke eines Stromes I die elektrokinetische Stärke

$$i = \frac{I}{c} \tag{5}$$

entspricht.

Das magnetische Moment einer Stromlinie bestimmt sich also durch die Formel

$$m = iS. \tag{5a}$$

Ebenso wie im Falle eines Dipols kann man m als den Betrag einer *Vektorgröße* betrachten. Diese Vektorgröße definieren wir durch

$$\mathfrak{m} = iS\mathfrak{n}, \tag{5b}$$

wo $\mathfrak{n}$ die Normale zur Stromebene bedeutet; ihre Richtung soll dem durch die Stromrichtung bestimmten Umlaufssinn auf der Stromlinie σ nach der Rechtsschraubenregel zugeordnet werden. Das *magnetische Moment*

[1]) Dieser Beweis ist hier nur für rechteckig gestaltete Stromlinien ausgeführt; seine Verallgemeinerung für Stromlinien ganz willkürlicher Gestalt bietet aber keine Schwierigkeiten. Man kann nämlich jede solche Linie in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke (am Rande) zerlegen. Dabei wird ein Dreieck der Hälfte des entsprechenden Rechtecks (in bezug auf seine Wirkung) äquivalent.

einer ebenen Stromlinie ist also gleich ihrem geometrischen Moment $n S$ (vgl. Einleitung, § 4) *multipliziert mit der Stromstärke* i. Diese Definition läßt sich unmittelbar auf beliebige nicht ebene Stromlinien übertragen (siehe unten § 4).

Es sei bemerkt, daß die Umkehr der Stromrichtung bei gegebener Orientierung von σ offenbar dieselbe Folge wie die Umkehr der Orientierung haben muß — nämlich die Umkehr der Richtung der auf die Stromlinie wirkenden oder von ihr ausgeübten Kräfte und Drehkräfte. Dem entspricht nach (5b) die Umkehr des Vorzeichens von $\mathfrak{m}$. Man sieht daraus, daß das magnetische Moment einer elementaren Stromlinie ihre mechanische Wirkung („passive" und „aktive") nach *Betrag* und *Richtung* vollkommen bestimmen muß.

§ 4. Systeme von elementaren Strömen; nichtelementare Ströme.

Es seien σ_1 und σ_2 zwei elementare Stromlinien mit den magnetischen Momenten $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$, die sich in einem sehr kleinen Raumgebiet V befinden. Da die Gestalt dieser Linien (soweit unabhängig vom Flächeninhalt) und die Stromstärke für ihre mechanische Wirkung belanglos sind, ebenso wie ihre relative Lage in V, so kann man sie durch zwei aneinander liegende Parallelogramme mit denselben Stromstärken $i_1 = i_2 = 1$ ersetzen. Dabei erhalten wir das durch die Abb. 4 (Einleitung, § 4) angedeutete Bild. Durch Hinzufügung der beiden „Dreieckströme" $PQOP$ und $P'Q'O'P'$ mit entgegengesetzt gleichen Momenten zu den betrachteten „Parallelogrammströmen" $PQQ'P'P$ und $OPP'O'O$, bekommen wir einen einzigen resultierenden elementaren Strom, der durch das Parallelogramm $OQQ'O'O$ dargestellt ist. Das magnetische Moment dieses Stroms $\mathfrak{m}$ ist offenbar gleich der geometrischen Summe der Momente der beiden anderen Parallelogrammströme, d. h.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2.$$

Dieses Resultat läßt sich leicht auf eine beliebige Anzahl elementarer linearer Ströme verallgemeinern — sofern sich die betreffenden vtromlinien in genügender Nähe voneinander und in großer Entfernung Son anderen Strömen, mit denen sie in Wechselwirkung begriffen sind, befinden.

Ebenso wie wir im vorigen Kapitel (§ 3) einen nichtelementaren Dipol in eine Kette von elementaren zerlegt haben, kann man einen nichtelementaren linearen Strom, d. h. eine Stromlinie von willkürlicher Gestalt und Größe, durch ein *Netz von elementaren Stromlinien ersetzen.* Diese Ersetzung oder „Zerlegung" entspricht vollständig der schon in der Einleitung (§ 3) betrachteten Zerlegung geschlossener Kurven oder von ihnen begrenzter Flächen. Wir müssen uns nur diese Kurven als Träger von elektrischen Strömen *derselben Stärke*

denken und den Umlaufssinn auf jeder Kurve durch die Stromrichtung bestimmen.

Auf diese Weise wird die Frage nach der mechanischen Wirkung einer beliebigen nichtelementaren Stromlinie σ auf die Berechnung der entsprechenden Wirkung des sie ersetzenden Stromliniennetzes zurückgeführt. Dieses Stromliniennetz kann man sich auf eine ganz *beliebige* durch σ begrenzte Fläche S ausgespannt denken (Abb. 13). Dabei wird jede Netzlinie, *mit Ausschluß von* σ, als eine doppelte Stromlinie betrachtet, so daß die mechanische Wirkung des ganzen Stromnetzes immer gleich der Wirkung der Randlinie σ bleiben muß.

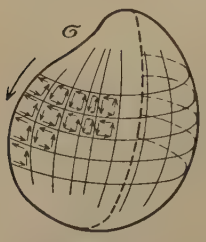

Abb. 13.

Das magnetische Moment einer elementaren Stromlinie, die das Flächenelement dS mit der Normale $\mathfrak{n}$ begrenzt, drückt sich nach (5b) durch

$$d\mathfrak{m} = i\mathfrak{n}dS$$

aus. Die geometrische Summe aller dieser Momente, d. h. das Integral

$$\mathfrak{m} = i\int \mathfrak{n}dS \qquad (6)$$

heißt das *magnetische Moment der betrachteten Stromlinie* σ. Dieser Vektor ist offenbar *gleich dem Produkt der Stromstärke i mit dem* schon früher (Einleitung, § 3) definierten *geometrischen Moment der Kurve* σ. Bei genügend kleinen Abmessungen dieser Kurve wird die mechanische Wirkung des entsprechenden Stroms vollständig durch den Vektor $\mathfrak{m}$ charakterisiert — auch dann, wenn σ *keine ebene* Kurve ist (wenn also der Strom kein „elementarer" in eigentlichem Sinn ist). Sonst muß man, um die totale Wirkung des betrachteten Stroms zu ermitteln, die entsprechenden Wirkungen für die ihn ersetzenden elementaren Ströme einzeln berechnen.

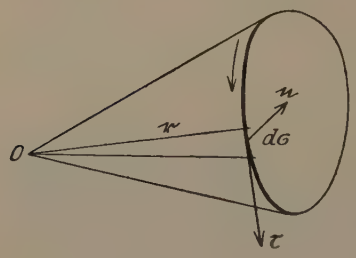

Abb. 14.

Da der Vektor $\mathfrak{m}$ oder $\int \mathfrak{n}dS$ nur von σ, nicht aber von der Gestalt der Fläche S abhängt, so scheint es naheliegend, ihn in der Form eines längs σ genommenen Linienintegrals auszudrücken. Diese Umformung ergibt sich einfach durch Spezialisierung der Fläche S. Und zwar wollen wir S als die Oberfläche eines *Kegels* betrachten, dessen Spitze in einem beliebigen Punkt O liegen möge (Abb. 14).

Da die Normale $\mathfrak{n}$ in allen Punkten eines durch O und $d\sigma$ bestimmten Dreiecks dieselbe Richtung behält, so kann man als Flächenelement dS den Flächeninhalt dieses Dreiecks nehmen. Beachten wir ferner, daß $\mathfrak{n}$ in die Richtung der äußeren Produkte $\mathfrak{r} \times \tau$ fällt, wo $\mathfrak{r}$ den Radius-

vektor eines Punktes von σ (bzw. $d\sigma$) bedeutet und τ den entsprechenden Tangentialvektor, so wird

$$n dS = \frac{1}{2} \mathfrak{r} \times \tau d\sigma$$

und folglich, nach (6)

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2} \oint \mathfrak{r} \times \tau i d\sigma . \tag{6a}$$

Dieser Ausdruck hat eine sehr einleuchtende physikalische Bedeutung. Denken wir uns für einen Augenblick die Stromlinie σ durch einen sehr dünnen Stromfaden (Draht) vom Querschnitte q ersetzt, so läßt sich die Stromstärke als das Produkt von q mit der *Stromdichte* $j = \frac{1}{c} J$ darstellen. Da ferner die Richtung von $\mathfrak{j}$ mit τ zusammenfällt und das Produkt $q d\sigma$ das Volum dV des entsprechenden Elementes des Stromfadens bedeutet, bekommen wir

$$\tau i d\sigma = \mathfrak{j} dV = \Sigma e \frac{\mathfrak{v}}{c}, \tag{6b}$$

d. h. das „Stromelement" $\tau i d\sigma$ ist gleich dem elektrischen Impuls der in diesem Element ($d\sigma$) vorhandenen Ladungen, ausgedrückt in der elektrokinetischen Ladungseinheiten, ebenso wie j. Das Integral $\oint \mathfrak{r} \times \tau i d\sigma$ kann man dementsprechend als das *elektrische Impulsmoment* oder den *elektrischen Drehimpuls* des betrachteten Stroms definieren — entsprechend der üblichen Definition des *mechanischen* Drehimpulses, wobei die Masse der materiellen Teilchen durch die Ladung ersetzt wird. Wie man aus der angeführten Überlegung sieht, ist dieser elektrische Drehimpuls, der in bezug auf irgendeinen Punkt (O) definiert werden muß, von der Wahl dieses Punktes unabhängig.

Das magnetische Moment eines linearen elektrischen Stroms ist also gleich der Hälfte des resultierenden elektrischen Impulsmoments der diesen Strom bildenden bewegten Ladungen.

§ 5. Die Statik der elektrischen Ströme; das magnetische Feld.

Da ein elementarer elektrischer Strom durch sein magnetisches Moment in Hinsicht auf seine Zusammenwirkung mit anderen Strömen vollständig bestimmt wird, so kann man diese Zusammenwirkung auf dieselbe Weise behandeln wie die der elementaren elektrischen Dipole. — Ebenso wie bei den letzteren werden wir von den Abmessungen der Stromlinie ganz absehen, also sie tatsächlich als einen Punkt behandeln, der kinematisch durch seine Lage ($\mathfrak{r}$) und die Orientierung des mit ihm verbundenen Vektors $\mathfrak{m}$, statisch durch die auf ihn wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ und Drehkraft $\mathfrak{M}$ charakterisiert wird. Wir werden ferner annehmen, daß auch in diesem Fall die beiden Kraftwirkungen sich aus einer Energiefunktion $U(\mathfrak{r}, \mathfrak{m})$ ableiten lassen, die wir die *magnetische Energie* des betrachteten elementaren Stroms relativ zu anderen Strömen, mit welchen er sich in Wechselwirkung befindet, nennen werden.

Unter diesen Umständen muß man offenbar für U, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ dieselben Ausdrücke wiederfinden, die im vorigen Kapitel für einen elementaren Dipol aufgestellt wurden, wenn an Stelle von $\mathfrak{p}$ — des elektrischen Moments — das magnetische Moment $\mathfrak{m}$, und an Stelle von $\mathfrak{E}$ — der elektrischen Feldstärke — die entsprechende magnetische Vektorgröße, die sog. *magnetische Feldstärke* $\mathfrak{H}$ — eingeführt wird. Wir bekommen also die folgenden, den Gleichungen (4), (3) und (5) Kap. I ganz analogen Formeln:

$$U = -\mathfrak{m}\mathfrak{H}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{F} = \operatorname{grad}(\mathfrak{m}\mathfrak{H}). \tag{9}$$

Man beachte, daß damit *gar nichts* über das Verhältnis der magnetischen und elektrischen Feldstärke, als Funktionen von $\mathfrak{r}$, zueinander ausgesagt wird. Die Vektorfelder $\mathfrak{E}(\mathfrak{r})$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{r})$ können von vornherein eine ganz verschiedene Struktur haben. Aus dem Energieprinzip läßt sich tatsächlich leicht ableiten, daß zwischen den beiden Feldern in dieser Hinsicht ein gewisser Gegensatz stattfindet.

Betrachten wir nämlich jetzt die magnetische Energie eines *nichtelementaren* Stroms in bezug auf andere Ströme, in deren Feld $\mathfrak{H}$ er sich befindet. Diese Energie U kann man offenbar bestimmen als die Summe der unendlich kleinen Beträge

$$dU = -\mathfrak{H}d\mathfrak{m} = -i\mathfrak{H}\mathfrak{n}dS = -iH_n dS,$$

die den einzelnen elementaren Strömen, durch welche der betreffende Strom ersetzt wird (§ 4), entsprechen. Es wird also

$$U = -i\int H_n dS. \tag{10}$$

Das Flächenintegral

$$\Phi = \int H_n dS \tag{10a}$$

bedeutet den „magnetischen Fluß" durch irgendeine Oberfläche, die durch die Stromlinie σ begrenzt ist; es spielt dieselbe Rolle wie das Linienintegral der elektrischen Feldstärke für die Energie eines nichtelementaren Dipols [Kap. I, Formel (6)].

Da die magnetische Energie eines gegebenen Stroms von der Art, auf welche man ihn in elementare Ströme zerlegt, und speziell von der Wahl der Oberfläche S, auf welche das Netz dieser elementaren Ströme aufgespannt gedacht wird, unabhängig ist, muß das Integral (10a) für zwei verschiedene Flächen S' und S'' denselben Wert haben. Durch Umkehr der Normalenrichtung auf einer dieser Flächen bekommen wir also $\int H_{n'} dS' + \int H_{n''} dS'' = 0$, d. h.

$$\oint H_n dS = 0,$$

wo S die durch S' und S'' gebildete geschlossene Fläche und n die entsprechende äußere (oder innere) Normale bedeutet.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man sich vorstellt, daß die Stromlinie σ sich auf einen Punkt zusammenzieht; dabei wird die Fläche S in (10) geschlossen und die Energie U offenbar gleich null.

Aus der Tatsache, daß der magnetische Fluß durch irgendeine geschlossene Fläche verschwindet, folgt nach der *Gauß*schen Formel ($\oint H_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{H}\, dV$), daß das magnetische Feld im ganzen Raume die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \tag{11}$$

erfüllen muß. Diese Bedingung ist eine direkte Folge des Energieprinzips und entspricht der Bedingung $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ für das elektrische Feld; sie bedeutet, daß das *magnetische Feld quellenfrei ist*, d. h. daß die „magnetischen Kraftlinien" im allgemeinen geschlossene Kurven sind.

Wegen des identischen Charakters der Gleichung (11) in bezug auf $\mathfrak{r}$, kann man in Hinsicht auf die Identität $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{F} = 0$ [Einleitung, Formel (18a)]

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{12}$$

setzen, wo $\mathfrak{A}$ eine noch unbestimmte Vektorfunktion bedeutet. Diese Vektorfunktion, die dem skalaren Potential φ entspricht, werden wir das *Vektorpotential* oder auch das *elektrokinetische Potential* nennen.

Es sei bemerkt, daß das Vektorpotential durch die magnetische Feldstärke *nicht eindeutig* bestimmt ist. Denn man kann zu $\mathfrak{A}$ den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion hinzufügen; da dessen Rotation identisch verschwindet, bleibt dabei $\mathfrak{H}$ ungeändert. Durch passende Wahl dieser skalaren Funktion kann man das Vektorpotential so bestimmen, daß es einer gegebenen skalaren Bedingung genügt, z. B. der Bedingung der Quellenfreiheit

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0\,. \tag{12a}$$

Setzt man (12) in (10) ein, so ergibt sich nach der *Stokes*schen Formel [Einleitung (17)]

$$U = -i \oint A_\tau d\sigma = -\oint \mathfrak{A}_\tau i d\sigma. \tag{13}$$

Durch diese Formel wird die magnetische Energie der betrachteten Stromlinie als eine Summe der Anteile ausgedrückt, die den *einzelnen Elementen dieser Linie* zugehören [und nicht den sie ersetzenden elementaren *Strömen*, wie bei der ursprünglichen Definition nach der Formel (10)]. Wir werden aber sofort sehen, daß eine solche Einteilung — im Gegensatz zu der entsprechenden Einteilung im Falle der elektrischen Dipole — nicht ohne weiteres erlaubt ist.

§ 6. Die Wirkung des magnetischen Feldes auf einzelne Stromelemente und bewegte Ladungen.

Wir wollen aber zunächst versuchen, die Größe

$$dU = -\mathfrak{A}\tau i d\sigma \tag{13a}$$

als die magnetische Energie des Stromelementes $d\sigma$ zu behandeln (es sei erinnert, daß der Vektor $i\tau d\sigma$ den elektrischen Impuls der in $d\sigma$ befindlichen Ladungen darstellt). Dann muß die auf dieses Stromelement wirkende Kraft $d\mathfrak{F}$ sich aus der Formel $d\mathfrak{F} = -\operatorname{grad}(dU)$, d. h.

$$d\mathfrak{F} = \operatorname{grad}(i\tau d\sigma\mathfrak{A}) = (i\tau d\sigma \operatorname{grad})\,\mathfrak{A} + i\tau d\sigma \times \operatorname{rot}\mathfrak{A}$$

berechnen lassen. Setzt man hier $\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$ und beachtet, daß der Vektor $(\tau d\sigma \operatorname{grad})\,\mathfrak{A}$ gleich der Differenz $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 = d\mathfrak{A}$ für die Endpunkte der Strecke $d\sigma$ ist, so kann man die obige Formel folgendermaßen schreiben:

$$d\mathfrak{F} = id\mathfrak{A} + i\tau \times \mathfrak{H} d\sigma. \tag{13b}$$

Bei der Integration längs der Stromlinie σ fällt das erste Glied der rechten Seiten von (13b) weg, da offenbar $\oint d\mathfrak{A} = 0$ ist. Die auf diese Linie wirkende Totalkraft ist also gleich

$$\mathfrak{F} = i\oint \tau d\sigma \times \mathfrak{H}.$$

Es ist also ganz gleichgültig — insofern wir diese Totalkraft betrachten — ob die entsprechende Elementarkraft durch (13b), oder durch die einfachere Formel

$$d\mathfrak{F} = i\tau d\sigma \times \mathfrak{H} \tag{14}$$

definiert worden ist.

Wir versuchen jetzt, diese Elementarkraft aus der Änderung der totalen Energie U abzuleiten, die sich bei einer sehr kleinen Verschiebung der betrachteten Stromlinie im magnetischen Feld ergibt. Dabei ist es nicht notwendig, diese Linie als starr anzusehen (wie wir es bei den elementaren Strömen getan haben); man kann sie vielmehr als einen biegsamen und dehnbaren Faden behandeln.

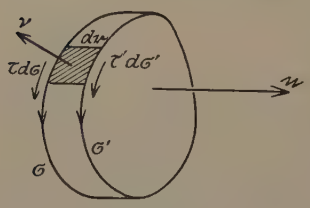

Abb. 15.

Die „ursprüngliche" und „verschobene" Stromlinie seien durch σ und σ' bezeichnet (Abb. 15), die entsprechenden Energien durch U und U'. Es sei ferner S' eine beliebige durch σ' begrenzte Fläche. Die entsprechende Fläche für σ kann man, da sie ganz willkürlich gewählt werden darf, durch Hinzufügung der bei der Verschiebung von σ beschriebenen (d. h. zwischen σ und σ' aufgespannten) Fläche Σ herstellen ($S = \Sigma + S'$) Dann wird nach (10)

$$U' - U = \delta U = \int i H_\nu d\Sigma,$$

wo ν die Normale zu $d\Sigma$ bedeutet. Als Flächenelement $d\Sigma$ wollen wir die durch das Linienelement $d\sigma$ beschriebene Fläche nehmen, d. h. den Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\tau d\sigma$ und $\delta\mathfrak{r}$ (die infinitesimale Verschiebung der verschiedenen Punkte von $d\sigma$ kann man in erster Näherung als gleich und gleichgerichtet betrachten). Da dabei $\nu d\Sigma = \tau d\sigma \times \delta\mathfrak{r}$ ist, so bekommen wir $H_\nu d\Sigma = \mathfrak{H}\nu\delta\Sigma = \mathfrak{H}\cdot(\tau d\sigma \times \delta\mathfrak{r}) = -\delta\mathfrak{r}\cdot(\tau d\sigma \times \mathfrak{H})$ und folglich

$$-\delta U = \oint (i\tau d\sigma \times \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{r}.$$

Dieser Ausdruck, der die Energieabnahme bei der betrachteten Verschiebung darstellt, muß offenbar gleich der gesamten Arbeit der auf die einzelnen Stromelemente wirkenden Elementarkräfte sein. Daraus ergibt sich

$$\oint i\tau d\sigma \times \mathfrak{H}\cdot\delta\mathfrak{r} = \oint d\mathfrak{F}\cdot\delta\mathfrak{r}.$$

In dieser Gleichung ist $\delta\mathfrak{r}$ als eine sehr kleine längs σ *stetig* veränderliche Vektorgröße anzusehen; sonst aber ist sie ganz willkürlich, da die Verschiebungen der verschiedenen (nicht aneinanderliegenden) Punkte von σ nach unserer Voraussetzung, unabhängig voneinander sind. Es sollen deshalb die einzelnen Elemente der obigen Integrale oder vielmehr die entsprechenden Faktoren von $\delta\mathfrak{r}$, einander gleich sein. Auf diese Weise bekommen wir

$$d\mathfrak{F} = i\tau d\sigma \times \mathfrak{H},$$

d. h. die Formel (14). Die frühere Formel (13b) erweist sich also als falsch[1]; die ihr zugrunde liegende Annahme einer magnetischen Energie der einzelnen Elemente einer Stromlinie müssen wir folglich auch als falsch anerkennen.

Diese „Unzerlegbarkeit" der magnetischen Energie einer geschlossenen Stromlinie erklärt sich durch die Tatsache, daß die den Strom bildende Bewegung der einzelnen elektrischen Ladungen, auch im Falle stationärer Ströme, *kein stationärer* — d. h. zeitunabhängiger — Vorgang ist. Die elektrische und magnetische Energie aber, wie sie oben definiert wurden, beziehen sich nur auf solche mechanischen Wirkungen, die von der Zeit explizite nicht abhängen.

Bei den einzelnen Stromelementen müssen wir also den Energiebegriff weglassen und nur die entsprechende elementare Kraft, welche durch die Formel (14) bestimmt wird, betrachten. Diese elementare Kraft kann man weiter darstellen als eine Summe von Einzelkräften, die den einzelnen das betreffende Stromelement bildenden Ladungen (Elektronen) entsprechen. Und zwar bekommen wir für ein Teilchen mit der Ladung e, das sich im magnetischen Feld mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

[1]) Es ist leicht einzusehen, daß das Integral $\oint d\mathfrak{A}\cdot\delta\mathfrak{r}$ im allgemeinen von null verschieden ist.

bewegt, nach (6b), die folgende „magnetische" oder „elektromagnetische" Kraft

$$\mathfrak{f} = e\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}. \tag{14a}$$

Es sei bemerkt, daß diese Kraft als eine elektrische Kraft behandelt werden kann, die durch ein *fiktives elektrisches Feld* von der Stärke

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H} \tag{14b}$$

bedingt wird.

Obwohl die Kraft (14a) sich nicht aus einer Energiefunktion ableiten läßt, kann man doch bei der Berechnung der totalen Energie *stationärer* Ströme (linearer und nicht linearer) den einzelnen bewegten Ladungen (Elektronen) eine fiktive magnetische Energie

$$u = -e\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{A} \tag{15}$$

zuschreiben [vgl. (13a)]. Es entspricht dieser fiktiven Energie eine Kraft $\mathfrak{f} = -\operatorname{grad} u = \frac{e}{c}(\mathfrak{v}\ \operatorname{grad})\ \mathfrak{A} + \frac{e}{c}\mathfrak{v} \times \operatorname{rot}\ \mathfrak{A}$, d. h.

$$\mathfrak{f} = \frac{e}{c}(\mathfrak{v}\operatorname{grad})\mathfrak{A} + \frac{e}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}, \tag{15a}$$

deren erster (falscher) Anteil bei der Summation in bezug auf alle — oder auch nur irgendeine geschlossene Stromlinie bildenden — Ladungen verschwinden muß.

Drittes Kapitel.

Die Struktur der elektrischen und magnetischen Felder in Verbindung mit dem Äquivalenzprinzip.

§ 1. Die Äquivalenz von elementaren Dipolen und Strömen.

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die mechanische Wirkung von Dipolen und Strömen nur sozusagen von der *„passiven"* Seite studiert, indem die „aktiven" Dipole und Ströme, von denen die betreffende Wirkung ausging, nur *indirekt* durch das von ihnen erzeugte elektrische bzw. magnetische Feld berücksichtigt wurden.

Um unser Hauptproblem — die Bestimmung der Wechselwirkung von Dipolen oder Strömen, d. h. von ruhenden oder bewegten Ladungen, zu lösen, müssen wir nun die Frage nach der Struktur der von ihnen erzeugten Felder untersuchen. Die Annahme, daß die erwähnte Wechselwirkung sich aus einer gegenseitigen potentiellen Energie ableiten läßt („Energieprinzip"), gestattete uns zwar, die allgemeinen Eigenschaften dieser Felder — die Wirbelfreiheit des elektrischen und die Quellenfreiheit des magnetischen — aufzustellen; damit aber war deren Bestimmung noch nicht beendet, sondern nur auf eine einfachere Auf-

gabe — die Bestimmung des skalaren Potentials φ und des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ zurückgeführt.

Ein weiteres Vorgehen gestattet uns das Energieprinzip nicht. Wir müssen es deshalb durch ein anderes Prinzip vervollständigen. Bevor wir aber dieses Prinzip formulieren, wollen wir einleitungsweise einige für unsere Darstellung unwesentliche, aber in historischer Hinsicht wichtige Bemerkungen machen. — Die auf einen elementaren elektrischen Strom mit dem Moment $\mathfrak{m}$ in einem gegebenen magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ ausgeübte Wirkung ist mit derjenigen Wirkung identisch, die ein elementarer elektrischer Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ in einem fiktiven elektrischen Feld $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$ erfahren würde. Statt des fiktiven elektrischen Feldes kann man sich einen fiktiven *magnetischen Dipol* denken, der aus zwei entgegengesetzten „magnetischen Polen" $\pm \mu$ in dem sehr kleinen Abstand l voneinander besteht, wobei

$$\mu l = \mathfrak{m}$$

ist, entsprechend der Beziehung $el = \mathfrak{p}$ für reelle elektrische Dipole. Dieser „elementare magnetische Dipol" oder „elementare Magnet" (M) soll also auf das reelle magnetische Feld $\mathfrak{H}$ ganz ebenso reagieren, wie der entsprechende elektrische Strom (S).

Nach dem Energieprinzip muß die auf S ausgeübte Wirkung entgegengesetzt gleich seiner Gegenwirkung auf die ;„äußere" das Feld $\mathfrak{H}$ erzeugenden Ströme S' sein (da beide Wirkungen sich aus derselben „gegenseitigen" potentiellen Energie ergeben). Will man das Energieprinzip auch auf den Magnet M, der den Strom S in „passiver" Hinsicht ersetzt, übertragen, so muß man behaupten, daß diese Ersetzung auch in aktiver Hinsicht bestehen bleibt, d. h. daß M dasselbe magnetische Feld ($\mathfrak{H}'$) wie S erzeugt.

Denkt man sich speziell S' als einen zweiten elementaren Strom, so kann man die obige Behauptung folgendermaßen aussprechen: die Wechselwirkung eines elementaren Magneten und eines elementaren Stroms ist mit der Wechselwirkung zweier elementarer Ströme oder zweier elementarer Magnete mit entsprechend gleichen Momenten identisch.

Es sei erinnert, daß die magnetischen Kraftwirkungen zuerst an sog. „natürlich magnetischen" Körpern oder „natürlichen Magneten" entdeckt sind; dabei wurden diese Magnete zunächst als reelle magnetische Dipole aufgefaßt, deren Eigenschaften identisch mit den Eigenschaften der elektrischen Dipole angenommen wurden (*Coulomb*). Die Untrennbarkeit entgegengesetzter „magnetischer Ladungen" erklärte man auf dieselbe Weise wie die Untrennbarkeit der entgegengesetzten elektrischen Ladungen in dielektrischen Körpern, nämlich durch die Annahme, daß die entgegengesetzten magnetischen Pole immer in denselben Molekülen der betreffenden Körper bleiben sollten. Nach dieser Theorie,

die von *Weber* herrührt, ist ein natürlicher Magnet als ein System von elementaren „molekularen" Magneten anzusehen.

Diese *Weber*schen „molekularen Magnete" wurden später, nachdem die magnetischen Wirkungen der elektrischen Ströme entdeckt und studiert waren, von *Ampère* durch äquivalente *„molekulare Ströme"* ersetzt, die man jetzt als kreisende Elektronen betrachtet und *Magnetonen* nennt.

Damit wurden die magnetischen „Pole" und „Dipole" als rein fiktive mathematische Gebilde anerkannt; trotzdem werden sie auch heute als ein für die Darstellung der elektrokinetischen Wechselwirkungen sehr nützliches — fast unentbehrliches — Hilfsmittel beibehalten.

Nach diesen geschichtlichen Bemerkungen, die keine direkte Beziehung zu unserem Gedankengang haben, wollen wir die fiktiven magnetischen Dipole wieder ganz außer acht lassen und das folgende *Äquivalenzprinzip* zwischen den elementaren elektrischen Dipolen und elektrischen Strömen aussprechen:

Bei passender Wahl des Verhältnisses c zwischen den elektrostatischen und elektrokinetischen Einheiten, ist die Wechselwirkung von elementaren elektrischen Dipolen identisch mit der Wechselwirkung von elementaren elektrischen Strömen, die sich in derselben relativen Lage befinden und deren magnetische Momente dieselbe (relative) Orientierung und numerische Größe haben wie die elektrischen Momente der entsprechenden Dipole.

Da die „passive" Äquivalenz von elementaren Dipolen und Strömen hinsichtlich ihres Verhaltens in gegebenen äußeren Feldern schon oben festgestellt wurde, so bedeutet das Äquivalenzprinzip, daß das magnetische Feld eines elementaren Stromes mit dem elektrischen Feld eines elementaren Dipols bei gleicher Lage, Orientierung und numerisch gleichen Momenten ($\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$), *vollständig übereinstimmt* ($\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$). Insbesondere muß betont werden, daß diese Übereinstimmung einen *asymptotischen Charakter* hat, in dem Sinn, daß sie nur für genügend entfernte Raumpunkte gilt. In der unmittelbaren Nähe der beiden Gebilde kann sie selbstverständlich nicht mehr bestehen. Betrachtet man aber diese Gebilde als unendlich klein, d. h. als punktförmig, so muß der Gültigkeitsbereich des Äquivalenzprinzips sich auf den ganzen Raum, mit Ausschluß solcher „singulärer" Punkte, erstrecken.

§ 2. Die Grundgleichungen des elektrischen und magnetischen Feldes im leeren Raum.

Die potentielle Energie U eines elementaren Dipols D in bezug auf mehrere andere Dipole D', D'' usw. muß offenbar gleich der Summe der Energien U', U'' usw. sein, welche die Wechselwirkung von D mit D', D'' ... *einzeln* charakterisieren. Bezeichnet man das elektrische

Moment von D mit $\mathfrak{p}$ und die von $D', D'' \ldots$ herrührende Feldstärke in dem Punkt P, wo sich D befindet, mit $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}'' \ldots$, so wird

$$U' = -(\mathfrak{p}\mathfrak{E}'), \quad U'' = -(\mathfrak{p}\mathfrak{E}'') \ldots$$

und folglich

$$U = U' + U'' + \cdots = -\mathfrak{p}(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \cdots).$$

Andererseits muß diese resultierende Energie gleich dem (negativen) inneren Produkt von $\mathfrak{p}$ mit der resultierenden Feldstärke $\mathfrak{E}$ sein. Daraus ergibt sich das (fast triviale) Resultat:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \cdots,$$

d. h. daß die resultierende Feldstärke sich vektoriell aus den elementaren Feldstärken zusammensetzt. Dieses Resultat gilt selbstverständlich auch für die magnetischen Feldstärken.

Jedes beliebige System von elektrischen Dipolen oder Strömen kann man durch ein System von elementaren, d. h. ihren Abmessungen nach unendlich kleinen Dipolen oder Strömen ersetzen, insofern der betrachtete Punkt, für welchen die resultierende (totale) Feldstärke bestimmt werden soll, ein *äußerer*, d. h. nicht geladener oder nicht durchströmter Punkt ist. Sonst aber kann sein Abstand von solchen „kritischen" oder „singulären" Punkten beliebig klein sein, denn die elementaren Dipole und Ströme kann man sich als unendlich klein gegenüber diesem Abstand denken.

Außerhalb der „singulären" Punkte ist es also möglich, die totale elektrische oder magnetische Feldstärke zu betrachten als eine geometrische Summe von unendlich vielen Anteilen, die *alle von elementaren Dipolen oder Strömen herrühren.*

Nach dem Energieprinzip müssen die elektrische und die magnetische Feldstärke *im ganzen Raum, einschließlich* der singulären Punkte, die Bedingungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$$

befriedigen.

Da $\operatorname{rot}(\mathfrak{F}' + \mathfrak{F}'' + \cdots) = \operatorname{rot}\mathfrak{F}' + \operatorname{rot}\mathfrak{F}'' + \cdots$ und $\operatorname{div}\mathfrak{F} = \operatorname{div}\mathfrak{F}' + \operatorname{div}\mathfrak{F}'' + \cdots$ ist, so folgt nach dem Äquivalenzprinzip, daß *außerhalb der singulären Punkte* auch die Gleichungen

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0 \tag{2}$$

bestehen müssen, die sich aus den obigen Energiegleichungen durch Vertauschung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ergeben.

Also ist außerhalb der singulären Punkte sowohl die elektrische als auch die magnetische Feldstärke wirbel- und quellenfrei. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß für solche singulären Punkte die obigen Gleichungen nicht mehr erfüllt sein können, d. h. *daß singuläre Punkte Quellen des elektrischen und Wirbel des magnetischen Feldes sind.*

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß nach den aus den Energiegleichungen folgenden Formeln $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ und $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$, die Gleichungen (1) und (2) äquivalent den folgenden Gleichungen für die Potentiale φ und $\mathfrak{A}$

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{3}$$

(*Laplace*sche Gleichung), und

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} = 0.$$

Die letzte Gleichung kann man durch eine Gleichung vom selben Typus wie (3) ersetzen

$$\nabla^2\mathfrak{A} = 0 \tag{4}$$

mit der Bedingung [vgl. Kap. II, Formel (12a)]

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0. \tag{4a}$$

Betrachten wir nun den Vektor $\varphi\mathfrak{E} = -\varphi\operatorname{grad}\varphi$. Da $\operatorname{div}\varphi\mathfrak{E} = \varphi\operatorname{div}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\operatorname{grad}\varphi = -\varphi\nabla^2\varphi - \mathfrak{E}^2$ ist, so erhalten wir durch Integration über ein ganz beliebiges Volumen V, unter Anwendung des *Gauß*schen Satzes,

$$-\oint\varphi E_n\,dS = \int\varphi\nabla^2\varphi\,dV + \int E^2\,dV, \tag{5}$$

wo S die das betrachtete Volumen umschließende Fläche bedeutet. Rücken wir diese Fläche ins Unendliche, d. h. erstrecken die Volumintegration über den ganzen Raum, so ergibt sich, unter der Voraussetzung, daß φ überall stetig bleibt und der Gleichung (3) genügt,

$$-\operatorname*{Lim}_{S\to\infty}\oint\varphi E_n\,dS = \int E^2\,dV.$$

Wir nehmen nun an, daß in unendlich entfernten Punkten φ und folglich E verschwinden, und zwar so, daß das Flächenintegral $\oint\varphi E_n\,dS$ unabhängig von der Gestalt der Fläche S zu null strebt. Da S proportional dem Quadrat der Entfernung (R) anwächst, so muß diese Annahme erfüllt werden, wenn φ umgekehrt proportional zu R (und folglich E umgekehrt proportional zu R^2) oder noch rascher mit der Entfernung abnimmt (siehe unten § 3). Dann muß das Volumintegral $\int E^2\,dV$ auch verschwinden, und da E^2 eine nicht negative Größe ist, so muß sie *identisch* gleich null sein. Die Existenz eines nicht verschwindenden elektrischen Feldes bei den erwähnten Voraussetzungen über das Potential φ und sein Verhalten in unendlich entfernten Punkten ist also mit dem identischen Bestehen der Gleichung (3) und folglich der Gleichung (1) unverträglich. Da aber außerhalb der singulären Punkte diese Gleichungen erfüllt sind, so müssen sie *in* diesen Punkten versagen.

Der entsprechende Beweis für das magnetische Feld läßt sich auf Grund der Gleichung (4) ebenso wie in dem obigen Falle ausführen, wenn man die Komponenten von $\mathfrak{A}$ einzeln betrachtet. Man kann aber

diesen Beweis auch ohne Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in seine Komponenten, auf Grund der Identität

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

vollziehen. Ersetzt man nämlich rot $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{H}$ und rot $\mathfrak{H}$ durch $-\nabla^2\mathfrak{A}$, so ergibt sich die folgende zu (5) ganz analoge Formel

$$\oint(\mathfrak{A}\times\mathfrak{H})_n\,dS = \int\mathfrak{A}(\nabla^2\mathfrak{A})\,dV + \int H^2\,dV, \tag{6}$$

woraus sich derselbe Schluß, und zwar unter denselben Voraussetzungen über das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ wie im Falle des skalaren Potentials φ, ziehen läßt.

§ 3. Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes für singuläre Punkte.

Wir stellen uns vor, daß die elektrische Ladung e in einem kleinen Volumen v, das sich auf einen Punkt Q zusammenziehen kann, konzentriert ist. Es sei $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, welche von *dieser* Ladung erzeugt wird. Es sei ferner V ein beliebiges Volumen, welches das Volumen v (bzw. den Punkt Q) enthält und S die es begrenzende Fläche.

Nach der *Gauß*schen Formel gilt die Beziehung

$$\oint E_n\,dS = \int\operatorname{div}\mathfrak{E}\,dV$$

oder, da außerhalb v $\mathfrak{E} = 0$ ist,

$$\oint E_n\,dS = \int\operatorname{div}\mathfrak{E}\,dv.$$

Daraus folgt, daß der elektrische Fluß durch eine geschlossene Oberfläche, die die betreffende elektrische Ladung enthält, von der Größe, Gestalt und Lage dieser Fläche (relativ zu v oder Q) nicht abhängt. Im Limes $v \to 0$ muß die elektrische Feldstärke in jedem Punkt von S bei gegebener Lage von Q eine ganz bestimmte Richtung und eine zu e proportionale Größe haben, so daß man

$$\oint E_n\,dS = C_1 e \tag{7}$$

setzen kann, wobei C_1 einen Proportionalitätskoeffizienten bedeutet. Nach dem Vorangehenden muß dieser Koeffizient von der Lage des Punktes Q unabhängig sein, insofern dieser innerhalb von S bleibt (S wird jetzt als eine feste Oberfläche betrachtet).

Wir stellen uns nun vor, daß es im Innern von S mehrere punktförmige Ladungen gibt. Bezeichnet man die Größe dieser Ladungen mit $e', e'', \ldots$ und die ihnen entsprechenden Feldstärken mit $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$ usw., so wird:

$$\oint E'_n\,dS = C_1 e', \qquad \oint E''_n\,dS = C_1 e'', \ldots$$

wo C_1 immer denselben Koeffizienten wie in (7) bedeutet.

Andererseits haben wir offenbar für die totale elektrische Ladung innerhalb S, $e = e' + e'' + \cdots$ und für die entsprechende resultierende Feldstärke $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \cdots$. Da ferner $E_n' + E_n'' + \cdots = E_n$ ist, so folgt durch Addition der obigen Gleichungen

$$\oint E_n dS = C_1 e,$$

d. h. eine Formel von derselben Gestalt wie (7), die aber eine allgemeinere Bedeutung hat, indem jetzt die im Innern von S befindliche Ladung auf eine ganz beliebige Weise in dem Volumen V verteilt werden kann.

Wir denken uns jetzt speziell eine *stetige Volumverteilung*, bei welcher ein unendlich kleines Volumelement dV eine ebenfalls unendlich kleine Ladung $de = \varrho dV$ (ϱ = räumliche Ladungsdichte) enthält. Dann ist $e = \int \varrho dV$ und folglich

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{E} dV = C_1 \int \varrho dV.$$

Daraus ergibt sich wegen der Willkürlichkeit von V die folgende Differentialgleichung des elektrischen Feldes für singuläre Punkte

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\nabla^2 \varphi = C_1 \varrho. \tag{8}$$

Diese Gleichung kann man als die Verallgemeinerung von (1) [bzw. (3)] betrachten. Sie bleibt auch dann gültig, wenn ϱ unendlich wird, d. h. im Falle einer nichtstetigen Verteilung der Elektrizität im Raum. Im letzteren Falle ist es aber vorteilhafter, nicht mit (8), sondern mit der entsprechenden Integralgleichung (7) zu operieren.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des magnetischen Feldes über und wollen uns zunächst vorstellen, daß dieses Feld $\mathfrak{H}$ durch einen sehr dünnen Stromfaden, der sich auch auf eine (geschlossene) Linie σ zusammenziehen kann, erzeugt wird. Durch Anwendung der *Stokes*schen Formel auf eine von σ verschiedene geschlossene Kurve σ', die σ *einmal umfaßt*, bekommen wir die Gleichung

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{H} ds,$$

wobei s denjenigen Anteil einer beliebigen durch σ' begrenzten Fläche S bedeutet, der aus dieser Fläche durch den Stromfaden ausgeschnitten wird (denn außerhalb des Stromfadens rot $\mathfrak{H} = 0$ ist).

Da man durch denselben Querschnitt des Fadens s eine Menge von Flächen S legen kann, die von verschiedenen Linien σ' begrenzt sind, und andererseits die durch dieselbe Linie σ' begrenzten Flächen den betrachteten Stromfaden an verschiedenen Stellen schneiden können, so folgt aus der obigen Formel: *erstens*, daß die Zirkulation des Vektors $\mathfrak{H}$ längs einer den Stromfaden einmal umfassenden Linie von seiner Größe, Gestalt und Lage (relativ zu σ) unabhängig ist, und *zweitens*, daß der

Fluß des Vektors rot $\mathfrak{H}$ durch verschiedene Querschnitte des Stromfadens denselben Wert hat.

Aus der ersten Folgerung ergibt sich ferner durch Überlegungen, die ganz analog sind den Überlegungen, welche uns zur Aufstellung der Formel (7) für eine beliebige Ladungsverteilung innerhalb der geschlossenen Oberfläche S geführt haben, die folgende zu (7) analoge Formel

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = C_2 i, \tag{9}$$

wo C_2 einen neuen Proportionalitätskoeffizienten und i die totale Stärke des durch σ' gehenden Stroms bedeutet, d. h. die algebraische Summe der Stromstärken für die verschiedenen von σ' umfaßten Stromfäden, mit dem Vorzeichen + oder — je nach der Richtung dieser Ströme in bezug auf den Umlaufssinn auf der Kurve σ'.

Denkt man sich speziell eine stetige Verteilung der Stromstärke mit der endlichen Raumdichte $\mathfrak{j}$, so wird

$$i = \int j_n dS,$$

d. h.

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = \int \mathrm{rot}_n \mathfrak{H} dS = C_2 \int j_n dS$$

und folglich wegen der Willkürlichkeit der Fläche S

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{H} = -\nabla^2 \mathfrak{A} = C_2 \mathfrak{j}. \tag{9a}$$

Diese Formel kann man als die Verallgemeinerung der Formel (2) [bzw. (4)] auf die singulären Punkte des magnetischen Feldes betrachten.

Es sei bemerkt, daß die Gleichung (9) mit der Identität div rot $\mathfrak{H} = 0$ wegen (4a), Kap. II, verträglich ist, *solange die betrachteten Ströme stationär sind*, was bisher immer vorausgesetzt wurde. Die oben erwähnte zweite Folgerung aus der Formel $\oint H_{\tau'} d\sigma' = \int \mathrm{rot}_n \mathfrak{H} ds$ — die Unabhängigkeit von $\int \mathrm{rot}_n \mathfrak{H} ds$ von der Wahl des Stromfadenquerschnitts s — entspricht der Gleichheit der Stromstärke $i = \int j_n ds$ für die verschiedenen Querschnitte dieses Stromfadens.

§ 4. Beziehung zwischen den Konstanten C_1 und C_2. Nichtelementare Ströme und Doppelschichten; nichtelementare Dipole und Solenoide.

Die Formeln (7) und (9) sind miteinander unmittelbar durch das Äquivalenzprinzip verknüpft. Deshalb muß die eine von ihnen sich aus der anderen ableiten lassen. Eine solche Ableitung wird uns gleichzeitig gestatten, das Verhältnis der beiden Konstanten C_1 und C_2 zu bestimmen.

Bisher haben wir uns einen elementaren Dipol vorgestellt als eine geradlinige *Strecke* mit entgegengesetzt geladenen Enden, und einen elementaren Strom als eine ebene *geschlossene Linie*. Diese geometrisch ganz verschiedenen Vorstellungen lassen sich gewissermaßen vereinigen zu demselben geometrischen Gebilde, nämlich zu einem geraden *Zylinder*, dessen Seitenfläche die Rolle der Stromlinie, während die Grundflächen die Rolle der Dipolenden spielen können. Durch Verminderung der Querdimensionen des Zylinders im Verhältnis zu seiner Länge bekommen wir einen unendlich dünnen Stab, der sich dem ursprünglichen streckenförmigen Bild eines Dipols nähert; andererseits bekommen wir durch Verminderung der Zylinderhöhe im Verhältnis zu seinen Querdimensionen eine unendlich dünne Scheibe, deren bandförmige Seitenfläche dem ursprünglichen linienförmigen Bild eines Stromes nahekommt. Bei der Ersetzung der Dipolenden durch zwei Zylindergrundflächen S' und S'' können wir uns die entsprechenden Ladungen $-e$ und $+e$ als *gleichförmig* über diese Flächen verteilt denken, also uns den Dipol als eine *Doppelschicht* mit der elektrischen *Flächendichte* $\pm\eta = \pm\frac{e}{S}(S = S' = S'')$ vorstellen.

Ebenfalls werden wir uns bei der Ersetzung der Stromlinie durch die Seitenfläche eines Zylinders denken, daß der Strom i über diese Fläche gleichförmig verteilt ist, d. h. daß durch die Längeneinheit der erzeugenden Geraden ein Strom von der Stärke $k = \frac{i}{l}$ fließt, wo l die Länge der Erzeugenden, d. h. die Höhe des Zylinders bedeutet; k heißt die *Flächendichte des elektrischen Stroms*.

Das elektrische Moment eines solchen „zylinderförmigen" Dipols $\mathfrak{p} = e\mathfrak{l}$ läßt sich dementsprechend auf die folgende Gestalt bringen

$$\mathfrak{p} = \eta S l \mathfrak{n} = i_p S \mathfrak{n}, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{l}}{l}$ die äußere Normale zur positiv geladenen Zylinderfläche S'' bedeutet, und

$$i_p = \eta l \tag{10a}$$

ist. Der Ausdruck (10) für $\mathfrak{p}$ ist offenbar identisch mit dem gewöhnlichen Ausdruck für das *magnetische* Moment eines elementaren Stroms mit der Stärke i_p, der längs der Seitenfläche des Zylinders (oder der entsprechenden Grundlinie) zirkuliert.

Betrachten wir andererseits einen wirklichen „Zylinderstrom" von der Stärke i, so läßt sich sein elektrisches Moment $\mathfrak{m} = iS\mathfrak{n}$ in der Gestalt

$$\mathfrak{m} = klS\mathfrak{n} = e_m\mathfrak{l} \tag{11}$$

ausdrücken, die dem gewöhnlichen Ausdruck für das elektrische Moment eines Dipols mit der Länge l und den Ladungen

$$e_m = kS \tag{11a}$$

entspricht.

Nach dem Äquivalenzprinzip kann man das magnetische Feld eines elementaren Stroms mit dem elektrostatischen Feld eines elementaren Dipols identifizieren; diesen „Ersatzdipol" werden wir uns als eine zylindrische Scheibe denken, die durch die Stromlinie σ begrenzt ist und dessen (unendlich kleine) Dicke l mit der Flächendichte $\pm \eta_m$ der seine beiden Seiten bedeckenden elektrischen Ladung durch die Formel (10a) oder

$$\eta_m l = i \qquad (10b)$$

verknüpft ist (Abb. 16).

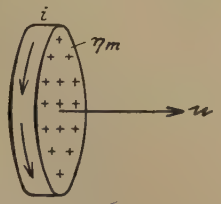

Abb. 16.

Betrachten wir umgekehrt das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ eines elementaren Dipols als das magnetische Feld eines elementaren Stromes, so ist es zweckmäßig, sich diesen „Ersatzstrom" in der Form eines unendlich dünnen zylindrischen Stabes vorzustellen, dessen Länge mit der Dipollänge l zusammenfällt und dessen (unendlich kleiner) Querschnitt S mit der Flächendichte k_p des Ersatzstromes durch die der Formel (11a) entsprechende Beziehung

$$k_p S = e \qquad (11b)$$

verknüpft ist ($\pm e$ sind die „wahren" elektrischen Ladungen des betrachteten Dipols); einen Strom von dieser Gestalt (Abb. 17) werden wir als *solenoidalen* Strom oder *Solenoid* bezeichnen.

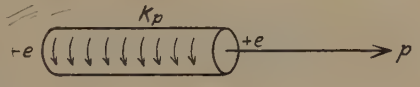

Abb. 17.

Wir stellen uns nun eine *nichtelementare* Stromlinie σ vor und ersetzen sie zunächst durch ein Netz von elementaren Strömen mit den magnetischen Momenten $d\mathfrak{m} = i\mathfrak{n}dS$, wobei S eine beliebige durch σ begrenzte Fläche bedeutet. Diese elementaren Ströme können wir ferner ersetzen durch „scheibenförmige" elektrische Dipole mit den Grundflächen dS' und dS'', die aus dS durch Verschiebung um die Strecke $\frac{l}{2}$ in der Richtung der negativen bzw. positiven Normale $\mathfrak{n}$ entstehen; die Flächendichte der entsprechenden Ersatzladungen bestimmt sich dabei durch die Beziehung (10b).

Die Länge l wollen wir der Einfachheit halber als für alle Flächenelemente dS gleich annehmen. Die Gesamtheit der den betrachtenden Strom ersetzenden „Scheibendipole" bildet also eine durch σ begrenzte elektrische *Doppelschicht* von unendlich kleiner Dicke l und unendlich großer Ladungsdichte $\eta_m = \frac{i}{l}$. *Außerhalb* dieser Doppelschicht fällt das durch sie erzeugte elektrische Feld $\mathfrak{E}$ mit dem durch den Strom i erzeugten magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ zusammen; innerhalb der Doppelschicht ist aber eine solche Übereinstimmung selbstverständlich nicht vorhanden. Um das elektrische Feld innerhalb der Doppelschicht, d. h.

zwischen den Flächen S' und S'' zu bestimmen, wenden wir zunächst die Formel (7) auf eine geschlossene Fläche S an, die ein kleines Stück *einer* der beiden Schichten, z. B. der negativen Schicht, enthält (Abb. 18). Bezeichnet man den zwischen S' und S'' liegenden und zu diesen Flächen parallelen Anteil von S durch s, und den anderen — äußeren — Anteil durch s', so wird nach (7)

$$\int E_n ds + \int E'_{n'} ds' = -C_1 \eta_m s.$$

Da η_m (wegen unserer Voraussetzung betreffs l) unendlich groß ist, während die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}'$ auf s' gleich der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist und folglich *endlich* bleiben muß, so können wir auf der linken Seite der obigen Gleichung das erste Glied weglassen und einfach

$$\int E_n ds = -C_1 \eta_m s$$

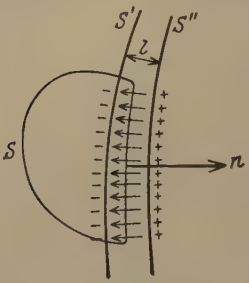

Abb. 18.

setzen. Daraus folgt wegen der Willkürlichkeit von s

$$E_n = -C_1 \eta_m.$$

Es ist ferner leicht einzusehen, daß die elektrische Feldstärke innerhalb der Doppelschicht der Normale $\mathfrak{n}$ parallel sein muß. Denn im entgegengesetzten Fall müßte das Linienintegral $\oint E_{\tau'} d\sigma'$ für eine geschlossene Kurve σ', die teils innerhalb, teils außerhalb der Doppelschicht liegt, einen von null verschiedenen Wert haben, was dem Energieprinzip widerspricht.

Wir kommen also zu dem Schluß, daß innerhalb der Doppelschicht die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ der Normalen $\mathfrak{n}$ parallel und gleich

$$E = -C_1 \eta_m \tag{12}$$

ist.

Das negative Vorzeichen in dieser Formel bedeutet, daß für $C_1 > 0$ der Vektor $\mathfrak{E}$ der Normalen entgegengerichtet ist; dagegen muß er für $C_1 < 0$ mit dieser Normalen gleichgerichtet sein.

Es sei nun σ' eine geschlossene Linie, die die betrachtete Stromlinie σ einmal umfaßt und folglich durch die sie ersetzende Doppelschicht einmal durchgeht. Den in dieser Schicht eingeschlossenen Anteil von σ'_1 bezeichnen wir durch σ'_i, den äußeren Anteil — durch σ'_a. Dann ist nach dem Energieprinzip

$$\oint E_{\tau'} d\sigma' = \int \mathfrak{E}\tau'_a d\sigma'_a + \int \mathfrak{E}\tau'_i d\sigma'_i = 0. \tag{12a}$$

Ferner haben wir nach (12)

$$\int \mathfrak{E}\tau'_i d\sigma'_i = -\eta_m \int \mathfrak{n}\tau'_i d\sigma'_i = \mp C_1 \eta_m l,$$

wobei das obere Vorzeichen dem positiven Umlaufssinn auf σ' in bezug

auf σ, d. h. $n\tau_i' > 0$ (Abb. 19), und das untere dem negativen Umlaufssinn entspricht. Wählt man den positiven Umlaufssinn auf σ', so wird nach (12a)

$$\int \mathfrak{E}\tau_a' d\sigma_a' = C_1 \eta_m l.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man nun $\eta_m l$ durch i und auf der linken $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$ ersetzen. Da ferner bei unendlich kleiner Dicke l der Doppelschicht das Integral $\int \mathfrak{H}\tau_i' d\sigma_i'$ verschwinden muß, kann man

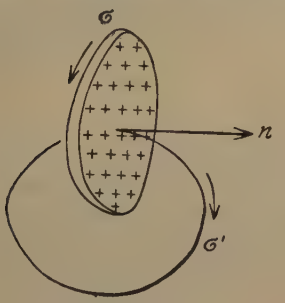

Abb. 19.

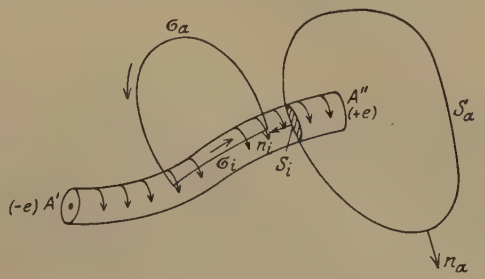

Abb. 20.

die Integration auf die ganze Linie σ' erstrecken. Auf diese Weise bekommen wir die Gleichung

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = C_1 i,$$

welche für $C_1 = C_2$ mit der schon oben aufgestellten Gleichung (9) zusammenfällt.

Die Gleichheit der Koeffizienten C_1 und C_2 kann man auch auf dem umgekehrten Wege beweisen, d. h. mittels der Ersetzung eines nichtelementaren elektrischen Dipols durch einen ihm äquivalenten solenoidalen Strom.

Es sei nämlich σ irgendeine vom negativen Ende des Dipols (A') zum positiven (A'') gezogene Kurve, längs welcher eine Kette von elementaren Dipolen mit den Momenten $d\mathfrak{p} = e\tau d\sigma$ gelegt ist. Sieht man diese Dipole als zylindrische Stäbe an, deren Achsen durch die entsprechenden Linienelemente $d\sigma$ gebildet werden, und ersetzt sie durch solenoidale Ströme, die auf den Seitenflächen dieser Zylinder fließen, so ergibt sich ein nichtelementares Stromsolenoid in der Gestalt einer unendlich dünnen Röhre, welche die Dipolenden miteinander verbindet (Abb. 20). Der Einfachheit halber wollen wir den Querschnitt dieser Röhre S als konstant betrachten. Bestimmt man dann die (ebenfalls konstante) Flächendichte dieses Ersatzstromes (k_p) durch die Beziehung (11b), so wird das durch ihn erzeugte magnetische Feld $\mathfrak{H}$ außerhalb der Röhre mit dem elektrischen Feld des betrachteten Dipols übereinstimmen[1]).

[1]) Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Stromrichtung der positiven Richtung auf der Achsenkurve σ (von A' nach A'') im Sinne der Rechtsschraubenregel entspricht.

Was die Richtung und Größe des magnetischen Feldes innerhalb des Solenoids anbetrifft, so kann man sie folgendermaßen bestimmen.

Es sei $\sigma_i + \sigma_a$ eine geschlossene Linie, die teils innerhalb der Röhre parallel zu ihrer Achse (σ_i), teils außerhalb — in einer ganz beliebigen Weise — verläuft. Nach der Formel (9), die wir jetzt als Ausgangsformel betrachten werden, bekommen wir in unserem Fall (wenn die Integrationsrichtung auf σ_i mit der positiven Richtung der Kurve σ zusammenfällt)

$$\int H_{\tau_i} d\sigma_i + \int H_{\tau_a} d\sigma_a = C_2 \varkappa_p \sigma_i.$$

Da außerhalb des Solenoids $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{E}$ ist und folglich endlich bleiben muß (mit Ausschluß der nächsten Umgebung der Dipolenden), und da ferner die Stromdichte $k_p = \frac{e}{S}$ unendlich groß ist, so reduziert sich die obige Gleichung auf $\int H_{\tau_i} d\sigma_i = C_2 \varkappa_p \sigma_i$ oder wegen der Willkürlichkeit von σ_i auf

$$H_{\tau_i} = C_2 \varkappa_p.$$

Hätte nun der Vektor $\mathfrak{H}$ innerhalb des Solenoids eine zu seiner Achse (σ) senkrechte Komponente, so müßte das Integral $\oint H_n dS$ für eine das Solenoid schneidende und in seinem Innern parallel zu seiner Achse laufende Fläche (deren Projektion auf die Ebene der Abb. 20 durch die Linie $\sigma_i + \sigma_a$ angedeutet wird) einen von null verschiedenen Wert haben was mit dem Energieprinzip im Widerspruch steht.

Daraus folgt, daß der Vektor $\mathfrak{H}$ innerhalb des Solenoids parallel zu dessen Achse für $C_2 > 0$ oder antiparallel für $C_2 < 0$ gerichtet ist und den konstanten Betrag

$$H = C_2 k_p \tag{13}$$

hat.

Wir betrachten jetzt eine geschlossene Fläche S'', die eins der beiden Enden des Solenoids, z. B. das dem positiven Ende des Dipols entsprechende, enthält. Bezeichnen wir den äußeren Anteil dieser Fläche mit S_a und den inneren (vom Solenoid ausgeschnittenen) mit S_i, so wird, nach dem Energieprinzip

$$\int H_{n_i} d S_i + \int H_{n_a} d S_a = 0$$

oder, wegen $\int H_{n_i} dS_i = -C_2 \varkappa_p S = -C_2 e$ (man beachte, daß die äußere Normale von S_i der Achsenkurve σ entgegengerichtet ist) und $\int H_{n_a} dS_a = \int E_{n_a} dS_a = \oint E_n dS''$,

$$\oint E_{n''} d S'' = C_2 e.$$

Diese Formel fällt mit der ursprünglichen Formel (7) zusammen, wenn $C_2 = C_1$ gesetzt wird.

§ 5. Die Bestimmung des elektrischen Feldes aus der Ladungsverteilung.

Es sei in einem Punkt P' die Ladung e' konzentriert. Aus *Symmetriegründen* folgt, daß das von dieser Ladung erzeugte Feld $\mathfrak{E}$ eine zum Punkt P' *radiale Symmetrie* besitzen muß[1]). Mit anderen Worten, auf einer Kugelfläche S, deren Zentrum mit P' zusammenfällt, muß $\mathfrak{E}$ einen konstanten Betrag haben und mit der äußeren oder der inneren Normalen gleichgerichtet sein. Wenden wir die allgemeine Formel $\int E_n dS = C_1 e$ auf unseren Fall an, so ergibt sich

$$E_n = \frac{C_1 e'}{4\pi R^2},$$

wo R den Kugelradius, d. h. die Entfernung der betrachteten Punkte P von P', bedeutet. Für $C_1 e' > 0$ ist der Vektor $\mathfrak{E}$ mit dem Radiusvektor $P'P = \mathfrak{R}$ gleichgerichtet, dagegen ist er für $C_1 e' < 0$ vom Punkte P nach P' gerichtet.

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist definitionsgemäß nichts anderes als die *Kraft*, welche im betrachteten Punkt auf die *positive* Ladungseinheit ausgeübt wird (oder *würde*, falls diese Ladungseinheit sich tatsächlich dort befände). Wir wollen — im Einklang mit den experimentellen Tatsachen — annehmen, daß die Richtung der von einer *positiven* Ladung erzeugten Feldstärke einer *Abstoßungskraft* entspricht[2]). Dies bedeutet, daß der Koeffizient C_1 *positiv* ist. Seine absolute Größe kann aber ganz beliebig gewählt werden; durch diese Größe wird die Größe der elektrischen Ladungseinheit festgestellt. Gewöhnlich setzt man

$$C_1 = 4\pi$$

und folglich

$$\mathfrak{E} = \frac{e' \mathfrak{R}}{R^3} = \frac{e' \mathfrak{R}_0}{R^2}, \tag{14}$$

wo $\mathfrak{R}_0 = \frac{\mathfrak{R}}{R}$ den die Richtung $P'P$ bestimmenden Einheitsvektor bedeutet.

Die Wechselwirkungskraft zweier Punktladungen e' und e, welche sich im Abstand R voneinander befinden, drückt sich dementsprechend durch die bekannte *Coulomb*sche Formel

$$f = \frac{e' e}{R^2} \tag{14a}$$

aus, wobei dem Fall $f > 0$ eine gegenseitige Abstoßung und dem Fall $f < 0$ eine Anziehung entspricht.

---

[1]) Dieses *Symmetrieprinzip* bedeutet die Gleichberechtigung oder die *Relativität* der verschiedenen Raumrichtungen. Wäre das elektrische Feld von e' in bezug auf P' nicht symmetrisch, so könnte man die verschiedenen Richtungen nicht als äquivalent betrachten.

[2]) D. h. daß Ladungen derselben Gattung sich gegenseitig abstoßen.

In theoretischen Untersuchungen setzt man oft nach *A. H. Lorentz* $C_1 = C_2 = 1$; damit werden statt der gewöhnlichen elektrostatischen und elektrokinetischen Einheiten andere sog. „rationelle" Einheiten eingeführt. Im folgenden werden wir ausschließlich die gewöhnlichen Einheiten ($C_1 = C_2 = 4\pi$) benützen.

Es sei O ein beliebiger fester Punkt und $OP' = \mathfrak{r}'$, $OP = \mathfrak{r}$ die Radiusvektoren der Punkte P' und P in bezug auf O. Der Radiusvektor $P'P = \mathfrak{R}$ stellt sich offenbar dar als die geometrische Differenz von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'. \tag{15}$$

Bei der Differentiation von $\mathfrak{R}$ oder irgendeiner Funktion von $\mathfrak{R}$ kann jeder der Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ die Rolle des Arguments spielen; der andere ist dabei als ein konstanter Parameter anzusehen. Betrachten wir den „Quellpunkt" P' (d. h. den Vektor $\mathfrak{r}'$) als fest und den „Aufpunkt" P, d. h. den Vektor $\mathfrak{r}$, als variabel, so bekommen wir „Aufpunktsableitungen" die wir allgemein durch das Symbol ∇ (grad, div, rot) bezeichnen werden. Zur Bezeichnung der entsprechenden „Quellpunktsableitungen" ($\mathfrak{r}'$ variabel, $\mathfrak{r}$ = konst) werden wir gestrichelte Symbole ∇' (grad', div', rot') gebrauchen. Es gilt dabei offenbar für jede Funktion von $\mathfrak{R}$ und für jede Differentiationsart die Beziehung:

$$\nabla' = -\nabla. \tag{15a}$$

Der Vektor $\frac{\mathfrak{R}}{R^3}$ ist, wie leicht einzusehen, gleich dem „Aufpunktgradienten" der Funktion $-\frac{1}{R}\left(\frac{\mathfrak{R}}{R^3} = -\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right)$. Daraus folgt nach (14) $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, wo

$$\varphi = \frac{e'}{R} \tag{16}$$

ist. Das ist der gewöhnliche Ausdruck für das *elektrische Potential* einer Punktladung, wenn man noch die „Grenzbedingung" hinzufügt, daß in *unendlicher Entfernung* ($R = \infty$) *dieses Potential verschwinden soll.*

Das Produkt von φ und der Größe e einer im Punkte P konzentrierten Ladung ist gleich der *gegenseitigen potentiellen Energie* der beiden Ladungen

$$U = \frac{e'e}{R}. \tag{16a}$$

Der negative Gradient dieser Größe in bezug auf $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{r}'$ stellt dabei die auf e seitens e', bzw. auf e' seitens e wirkende Kraft dar. Diese Kräfte sind nach (15a) entgegengerichtet und ihrem Betrage nach gleich $\frac{e'e}{R^2}$.

Bei der Anwesenheit von mehreren Ladungen $e_1', e_2', \ldots$ in den Punkten $P_1', P_2', \ldots$ ist die resultierende elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in dem betrachteten Aufpunkte P gleich der geometrischen Summe der Vektoren $\mathfrak{E}_k = e_k' \frac{\mathfrak{R}_k}{R_k^3}$ $(\mathfrak{R}_k = P_k'P)$ und das resultierende Potential der

algebraischen Summe der entsprechenden Potentiale $\varphi_k = \frac{e'_k}{R_k}$. Denkt man sich dabei die einzelnen Punktladungen durch eine kontinuierliche räumliche Verteilung der Elektrizität ersetzt, und bezeichnet die in dem Volumelement dV' haftende Ladung de' durch $\varrho' dV'$, so ergeben sich für $\mathfrak{E}$ und φ folgende Integralausdrücke

$$\mathfrak{E} = \int \varrho' \frac{\mathfrak{R}}{R^3} dV', \quad (17)$$

$$\varphi = \int \frac{\varrho'}{R} dV'. \quad (17a)$$

Bei der Integration wird $\mathfrak{r}$ als konstanter Parameter betrachtet und ϱ' als gegebene Funktion des Vektorarguments $\mathfrak{r}'$. Die Integration soll sich auf den ganzen Raum erstrecken; die Stellen ,wo $\varrho' = 0$ ist, bleiben dabei selbstverständlich belanglos. Man kann leicht verifizieren, daß das Integral (17) gleich dem nach $\mathfrak{r}$ genommenen negativen Gradienten des Integrals (17a) ist; dies folgt aus der Tatsache, daß die Differentiation nach dem Vektor $\mathfrak{r}$, ebenso wie die gewöhnliche Differentiation eines Integrals nach einem skalaren Parameter, unter dem Integralzeichen vollzogen werden kann.

Die Formel (17a) stellt offenbar die Lösung der Differentialgleichung (8) $\nabla^2 \varphi = -4\pi\varrho$ dar. Man kann sie in der Tat durch *direkte Integration* dieser Gleichung unter Berücksichtigung der *Grenzbedingungen* bekommen.

Wir stellen uns zunächst vor, daß die Ladungsdichte ϱ außerhalb eines bestimmten Punktes P' überall verschwindet. Dann kann das Potential φ in einem Punkt P offenbar nur von dem Abstand $P'P = R$ abhängen, d. h. es muß eine Funktion des Betrags des Vektors $\mathfrak{R}$, nicht aber seiner Richtung, sein. Da $\operatorname{grad} \varphi(R) = \frac{d\varphi}{dR} \frac{\mathfrak{R}}{R}$ ist [Einleitung (28)], so haben wir

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{d\varphi}{dR} \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dR} \right) = \frac{3}{R} \frac{d\varphi}{dR} + R \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dR} \right)$$

oder, wie leicht zu verifizieren ist,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R} \frac{d^2(R\varphi)}{dR^2}. \quad (18)$$

Setzt man

$$\frac{d^2(R\varphi)}{dR^2} = 0 \quad (18a)$$

für alle Punkte, mit eventuellem Ausschluß von P' $(R = 0)$, so folgt nach zweimaliger Integration $R\varphi = AR + B$, d. h.

$$\varphi = A + \frac{B}{R}. \quad (18b)$$

Die erste der beiden Integrationskonstanten bestimmt sich aus der Grenzbedingung $\varphi = 0$ für $R = \infty$ $(A = 0)$, die zweite — aus einer Be-

dingung der Form $\oint \operatorname{grad}_n \varphi \, dS = 4\pi e'$, wo e' die in P' konzentrierte Ladung bedeutet und S eine beliebige, diese Ladung einschließende (z. B. unendlich kleine) Oberfläche ist; dabei wird selbstverständlich $B = e'$.

Befindet sich der Punkt P in genügender Entfernung von P', so kann man den letzteren durch ein unendlich kleines Volumen mit der endlichen Ladungsdichte ϱ' ersetzen. Wegen des linearen Charakters der Gleichung $\nabla^2 \varphi = -4\pi\varrho$ ergibt sich dann ihre vollständige Lösung als die Summe der Elementarlösungen (18b), die von den einzelnen Elementarladungen $B = de' = \varrho' dV'$ herrühren, d. h. in der Form des Integrals (17a). Dabei wird vorausgesetzt, daß der Punkt P sich „im leeren Raum", d. h. außerhalb des geladenen Volumen befindet. Man kann aber leicht zeigen, daß bei *endlicher Volumdichte der elektrischen Ladung diese Voraussetzung unwesentlich ist.* Es sei nämlich v ein unendlich kleines Volumen, das den betrachteten „Aufpunkt" P enthält. Ist die elektrische Ladungsdichte ϱ in v *endlich*, so muß der Beitrag der ganzen in v enthaltenen Ladung ϱv zum Potential φ in P von der Größenordnung $\frac{v}{\sqrt[3]{v}} = v^{2/3}$ sein, also im Limes $v \to 0$ verschwinden.

Dasselbe Resultat ergibt sich in dem Fall, daß die elektrische Ladung auf eine durch P gehende *Fläche mit endlicher Flächendichte η verteilt ist*[1]), denn dabei wird der von einem Flächenelement s herrührende Beitrag zum Potential φ in einem Punkt dieses Elements von der Größenordnung $\frac{s}{\sqrt{s}} = \sqrt{s} \to 0$. Für eine Verteilung der Elektrizität mit endlicher *Liniendichte* ist aber die obige Voraussetzung (P im leeren Raum) wesentlich; das Potential einer geladenen Linie in den Punkten dieser Linie hat keinen bestimmten endlichen Wert — ebenso wie das Potential einer Punktladung in dem Quellpunkt selbst.

Ist die betrachtete Ladungsverteilung auf ein *Raumgebiet von endlicher Ausdehnung* beschränkt, so kann man die gesamte Ladung $e' = \int \varrho' dV'$ für unendlich ferne Aufpunkte als Punktladung behandeln und ihr Potential durch die Formel $\frac{e'}{R}$ approximieren. Damit wird die Bedingung erfüllt, die wir oben (§ 2) für das Verschwinden eines „ladungsfreien" elektrischen Feldes aufgestellt haben. Zu gleicher Zeit ergibt sich der Beweis dafür, daß die Gleichung (17a) die *einzige* Lösung der Gleichung $\nabla^2 \varphi = -4\pi\varrho$ *für den ganzen Raum*, die im Unendlichen wie $\frac{e'}{R}$ verschwindet, darstellt. Denn eine andere Lösung könnte man daraus nur durch Hinzufügung eines „ladungsfreien" Feldes bekommen.

---

[1]) Das Potential drückt sich in diesem Fall durch das Flächenintegral $\varphi = \int \frac{\eta' dS'}{R}$ aus.

§ 6. Bestimmung des magnetischen Feldes aus der Stromverteilung.

Das magnetische Feld, welches durch eine stationäre Elektrizitätsströmung von endlicher Raumdichte $\mathfrak{j}$ erzeugt wird, läßt sich aus den Gleichungen $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$, $\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathfrak{j}$, $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ bestimmen.

Wir betrachten zunächst die zweite dieser Gleichungen. Wegen ihrer vollkommenen Analogie mit der Gleichung $\nabla^2 \varphi = -4\pi\varrho$ für das skalare Potential, kann man sofort ihre Lösung in der Form (17a) hinschreiben, wobei φ durch $\mathfrak{A}$ und ϱ' — die elektrische Ladungsdichte — durch die elektrische Stromdichte $\mathfrak{j}'$ (im Punkte $\mathfrak{r}'$) — ersetzt werden muß.

Damit aber der sich auf diese Weise ergebende Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{j}'}{R} dV' \qquad (19)$$

das gesuchte Vektorpotential der betrachteten Elektrizitätsströmung darstellt, muß er noch der Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ genügen. Es ist nun leicht einzusehen, daß diese Forderung tatsächlich erfüllt ist. — Da „div" eine Differentiation in bezug auf $\mathfrak{r}$ bedeutet und $\mathfrak{j}'$ eine Funktion des Vektors $\mathfrak{r}'$ ist, so haben wir zunächst

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \int \operatorname{div} \frac{\mathfrak{j}'}{R} dV' = \int \mathfrak{j}' \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R} dV'.$$

Ferner ergibt sich nach (15a)

$$\mathfrak{j}' \operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\mathfrak{j}' \operatorname{grad}' \frac{1}{R} = -\operatorname{div}' \left(\frac{\mathfrak{j}'}{R}\right) + \frac{1}{R} \operatorname{div}' \mathfrak{j}'$$

und folglich

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int \operatorname{div}' \left(\frac{\mathfrak{j}'}{R}\right) dV' + \int \frac{\operatorname{div}' \mathfrak{j}'}{R} dV'.$$

In dem von uns betrachteten Fall einer *stationären* Elektrizitätsströmung muß die Divergenz von $\mathfrak{j}'$ verschwinden. Ist das durchströmte Raumgebiet von einer Fläche S' begrenzt, so muß auf dieser Fläche der Vektor $\mathfrak{j}'$ oder jedenfalls seine Normalkomponente $\mathfrak{j}'_{n'}$ auch verschwinden. Es ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int \operatorname{div}' \left(\frac{\mathfrak{j}'}{R}\right) dV' = -\int \frac{\mathfrak{j}'_{n'}}{R} dS' = 0.$$

Wir können jetzt aus (19) die magnetische Feldstärke berechnen. Es ist nämlich

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \int \operatorname{rot} \left(\frac{\mathfrak{j}'}{R}\right) dV' = -\int \mathfrak{j}' \times \operatorname{grad} \frac{1}{R} dV',$$

d. h.

$$\mathfrak{H} = \int \frac{\mathfrak{j}' \times \mathfrak{R}}{R^3} dV' = \int \frac{\mathfrak{j}' \times \mathfrak{R}_0}{R^2} dV' \qquad (19a)$$

ganz analog zur Formel (17).

Das Produkt $j' dV'$ stellt den elektrischen Impuls der im Volumelement dV' befindlichen Ladungen dar. Im Falle eines *linearen* Stroms muß man $j' dV'$ bekanntlich durch $i' \tau' d\sigma'$ ersetzen (wo i' die Stromstärke, $d\sigma'$ das betreffende Element der Stromlinie bedeutet); dabei nehmen die Formeln (19) und (19a) die folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{A} = i' \oint \frac{\tau' d\sigma'}{R}, \tag{20}$$

$$\mathfrak{H} = i' \oint \frac{\tau' \times \mathfrak{R}_0}{R^2} d\sigma'. \tag{20a}$$

Es sei bemerkt, daß die Formel (19) [und folglich auch (19a)] oder die entsprechende Formel für flächenverteilte elektrische Ströme, ebenso wie im Falle des skalaren Potentials, auch für solche Aufpunkte gültig bleibt, die sich innerhalb des durchströmten Volumens oder auf den durchströmten Flächen befinden (vorausgesetzt, daß die Raum- bzw. Flächendichte der Strömung einen endlichen Wert haben). Dagegen sind die Formeln (20) und (20a) nur für „äußere", d. h. außerhalb der Stromlinie liegende Punkte gültig.

Nach der Formel (13) des vorigen Kapitels kann man die gegenseitige potentielle Energie zweier linearer Ströme in der Form eines Doppelintegrals

$$U_m = - i' i \oint \oint \frac{(\tau' \tau)}{R} d\sigma' d\sigma = - i' i \oint \oint \frac{\cos\theta}{R} d\sigma' d\sigma \tag{20b}$$

darstellen, wobei θ den Winkel zwischen den Linienelementen $d\sigma'$ und $d\sigma$ bedeutet. Die Symmetrie dieser Formel bezüglich der gestrichenen und ungestrichenen Größen entspricht der Tatsache, daß die potentielle Energie von σ relativ zu $\sigma'(U_m)$ identisch ist mit der Energie U'_m von σ' relativ zu σ. Es gilt also

$$U_m = - i \int H_n dS = - i' \int H'_n dS' = U'_m. \tag{20c}$$

Die Elemente der Integrale (20) und (20a), d. h. die Vektoren $\frac{i' \tau'}{R} d\sigma'$ und $\frac{i' \tau' \times \mathfrak{R}_0}{R^2}$ sind offenbar als das unendlich kleine Potential ($d\mathfrak{A}$) und die unendlich kleine magnetische Feldstärke ($d\mathfrak{H}$) anzusehen, die von dem Stromelement $i' \tau' d\sigma'$ herrühren. Auf diese Weise bekommen wir das bekannte Gesetz von *Biot-Savart*

$$d\mathfrak{H} = i' d\sigma' \frac{\tau' \times \mathfrak{R}_0}{R^2}. \tag{21}$$

Dieses Gesetz, das wir zu gleicher Zeit mit seinem elektrostatischen Analogon — dem *Coulomb*schen Gesetz — auf Grund des Energie- und Äquivalenzprinzips theoretisch abgeleitet haben, betrachtet man gewöhnlich, ebenso wie das Gesetz von *Coulomb*, als eine experimentell festgestellte Grundtatsache.

Ersetzt man ein Stromelement durch eine Ladung e', die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ bewegt, also einen elektrischen Impuls $e'\mathfrak{v}'/c$ besitzt, so ergeben sich für das Vektorpotential und die Stärke des erzeugten magnetischen Feldes folgende Ausdrücke

$$\mathfrak{A} = \frac{e'\mathfrak{v}'}{cR} = \frac{\mathfrak{v}'}{c}\varphi\,, \tag{22}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e'}{c}\frac{\mathfrak{v}'\times\mathfrak{R}_0}{R^2} = \frac{\mathfrak{v}'}{c}\times\mathfrak{E}, \tag{22a}$$

wo φ das skalare (elektrostatische) Potential und $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke bedeuten, welche im betrachteten Aufpunkte von derselben Ladung herrühren.

Der Ausdruck (20b) für die gegenseitige potentielle Energie zweier Stromlinien ist offenbar gleich der Summe der entsprechenden Ausdrücke für verschiedene Ladungspaare

$$u_m = -\frac{e'\frac{\mathfrak{v}'}{c}\cdot e\frac{\mathfrak{v}}{c}}{R} = -\frac{\mathfrak{v}'\mathfrak{v}}{c^2}u, \tag{23}$$

wo $u = \frac{e'e}{R}$ die gegenseitige Energie der betreffenden Ladungen bedeutet. Man könnte dementsprechend die Größe u_m als ihre *gegenseitige magnetische Energie* betrachten.

Diese Interpretation erweist sich aber, wie schon oben (Kap. II, § 6) erörtert wurde, als unrichtig. Eine isolierte Ladung erzeugt nämlich bei ihrer Bewegung ein magnetisches Feld, das sich in jedem *festen* Aufpunkt mit der Zeit ändert, während alle unsere Überlegungen, die an das Energieprinzip anknüpften, sich auf *zeitlich konstante* Felder bezogen. Das Versagen des Energieprinzips für einzelne *bewegte* Ladungen kann man schon aus dem Nichtverschwinden der Divergenz von (22) erkennen. Und zwar ist

$$\operatorname{div}\left(e'\frac{\mathfrak{v}'}{c}\frac{1}{R}\right) = e'\frac{\mathfrak{v}'}{c}\operatorname{grad}\frac{1}{R} = -e\frac{\mathfrak{v}'}{c}\frac{\mathfrak{R}_0}{R^2}.$$

Dieses Versagen tritt aber ganz klar zutage, wenn wir aus (23) die von den beiden Ladungen aufeinander ausgeübten Kräfte berechnen. Nach den Formeln $\mathfrak{f} = -\operatorname{grad} u_m = +\operatorname{grad}' u_m = -\mathfrak{f}'$ bekommen wir

$$\mathfrak{f} = -\mathfrak{f}' = -\frac{e\,e'}{R^2}\frac{\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}'}{c^2}\mathfrak{R}_0\,. \tag{23a}$$

In Wirklichkeit ist die auf e seitens e' wirkende Kraft gleich

$$\mathfrak{f} = e\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H} = e\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\left(e'\frac{\mathfrak{v}'}{c}\times\frac{\mathfrak{R}_0}{R^2}\right),$$

d. h.

$$\mathfrak{f} = \frac{e\,e'}{R^2}\frac{\mathfrak{v}'(\mathfrak{v}\,\mathfrak{R}_0) - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}')}{c^2} \tag{23b}$$

und dementsprechend die auf e' seitens e wirkende Kraft

$$\mathfrak{f}' = -\frac{e\,e'}{R^2}\frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}'\mathfrak{R}_0) - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}')}{c^2}. \tag{23c}$$

Diese Kräfte genügen also dem Prinzip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung — das als unmittelbare Folge des Energieprinzips anzusehen ist — nicht. Sie werden entgegengesetzt gleich nur in dem Falle, daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ einander gleich sind, oder zu der Verbindungslinie $\mathfrak{R}$ senkrecht stehen.

Wenn diese beiden Bedingungen zugleich erfüllt sind, reduzieren sich die Formeln (23b) und (23c) auf (23a), und wir bekommen

$$\mathfrak{f} = -\mathfrak{f}' = -\frac{v^2}{c^2}\frac{e\,e'}{R^2}\mathfrak{R}_0 .$$

In diesem Falle sind die elektromagnetischen (oder „elektrokinetischen") Kräfte, welche durch die Bewegung der Ladungen erzeugt werden, den entsprechenden elektrostatischen entgegengerichtet und gleich dem Produkt mit dem Verhältnis $\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}$. Wir sehen also, daß zwei Ladungen (Elektronen), die sich mit derselben Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ senkrecht zu ihrer Verbindungslinie bewegen, aufeinander eine Totalkraft

$$\frac{e\,e'}{R^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

ausüben, die man als eine „geschwächte" elektrostatische Kraft deuten kann; für $v = c$ muß diese Totalkraft verschwinden, d. h. die elektrostatischen und elektrokinetischen Kräfte müssen sich gegenseitig kompensieren.

Dieses Resultat zeigt, daß die Größe c, welche zunächst im Anschluß an das Äquivalenzprinzip als das Verhältnis zwischen den elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten eingeführt war, die Bedeutung einer bestimmten *„kritischen" Geschwindigkeit* hat. Die tatsächliche Bestimmung des obigen Verhältnisses zeigt, daß $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek $= 300000$ km pro Sekunde ist. *Die „kritische Geschwindigkeit" fällt also genau mit der Lichtgeschwindigkeit zusammen.* Diese Übereinstimmung ist freilich nicht zufällig; sie weist vielmehr auf die elektromagnetische Natur der Lichterscheinungen einerseits und auf die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen andererseits hin. Diese Fragen werden wir im nächsten Abschnitt behandeln. Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß die obigen Formeln für einzelne Ladungen, die die zeitliche Änderung der erzeugten Felder unberücksichtigt lassen, als Näherungsformeln anzusehen sind, die nur für kleine Geschwindigkeiten $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ Geltung haben.

§ 7. Die graphische Darstellung des elektrischen und magnetischen Feldes.

Die Linien, welche nach ihrer Richtung und Dichte das elektrische Feld graphisch darstellen, werden „elektrische Kraftlinien" genannt; entsprechend heißen die das magnetische Feld darstellenden Linien „magnetische Kraftlinien".

Aus der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes, d. h. aus der Tatsache, daß die Bedingung $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$ *im ganzen Raum* erfüllt ist, folgt, daß die elektrischen Kraftlinien *ungeschlossene Linien sind* (für eine geschlossene Kraftlinie würde das Integral $\oint E_\tau d\sigma = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{E}\, dS$ einen von null verschiedenen Wert haben). Sie müssen deshalb in irgendwelchen Punkten beginnen und enden. Die Anzahl der elektrischen Kraftlinien, welche aus einem Volum V ausgehen oder nach diesem Volum zusammenlaufen, ist proportional dem elektrischen Fluß durch die dieses Volum begrenzende Oberfläche S, d. h. dem Integral $\oint E_n dS$ (die Kraftlinien, welche durch V hindurchgehen, geben zu diesem Integral keinen

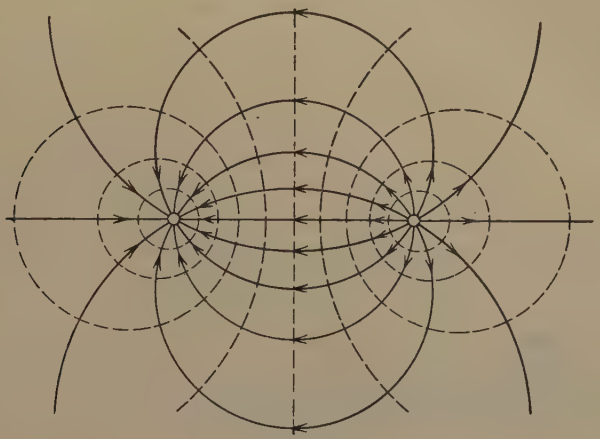

Abb. 21.

Beitrag). Aus der Gleichung $\oint E_n dS = 4\pi e$ oder der ihr äquivalenten Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho$ folgt, daß die Quellpunkte der elektrischen Kraftlinien mit den positiven Ladungen und die Sinkpunkte mit den negativen Ladungen zusammenfallen, und daß ferner die Anzahl der aus einer Ladung „divergierenden" bzw. nach dieser Ladung „konvergierenden" Linien der Größe e der Ladung proportional ist. Im „leeren Raum" können die elektrischen Kraftlinien weder beginnen noch enden.

In der unmittelbaren Nähe einer Punktladung ist das elektrische Feld praktisch ausschließlich durch *diese* Ladung bestimmt und von anderen entfernteren Ladungen unabhängig. Daher müssen wir hier dasselbe strahlenartige Kraftlinienbild finden, wie im Falle einer „isolierten" Punktladung; die Kraftlinien bilden ein nach allen Seiten gleichförmiges „Strahlenbündel". Aber in einiger Entfernung von e werden sie gekrümmt, je nach der Lage der anderen Ladungen. Entgegengesetzten Ladungen derselben absoluten Größe entspricht die gleiche Anzahl von divergierenden bzw. konvergierenden Linien. Im Fall eines Dipols müssen daher die aus dem positiven Ende herausgehenden Kraftlinien alle nach dem negativen Ende zusammenkommen (Abb. 21).

In diesem Fall — ebenso wie im allgemeinen Fall eines beliebigen neutralen Systems von elektrischen Ladungen — bleiben die elektrischen Kraftlinien sozusagen „innerhalb" dieses Systems: keine von ihnen geht ins Unendliche verloren. Wenn die Gesamtladung des Systems von null verschieden ist, muß eine dieser resultierenden Ladung entsprechende Anzahl von Kraftlinien ins Unendliche gehen (oder daraus kommen), und zwar auf dieselbe radialsymmetrische Art, als ob das betrachtete System auf eine Punktladung zusammengezogen wäre. Tatsächlich können solche Fälle nicht eintreten, da die Materie im ganzen neutral ist.

Neben den Kraftlinien kann man zur Veranschaulichung des elektrischen Feldes die zu diesen Linien orthogonalen „Äquipotential-" oder „Niveauflächen" betrachten, d. h. die Flächen $\varphi = \text{konst.}$ Der Abstand zweier solcher Flächen, die zwei wenig verschiedenen Werten des Potentials φ entsprechen, ist offenbar umgekehrt proportional der elektrischen Feldstärke in den betreffenden Punkten (wegen der Beziehung $E = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, wo ∂n die Länge der zwischen den beiden Flächen eingeschlossenen Normalen bedeutet). In der Nähe der einzelnen Punktladungen werden die Niveauflächen kugelförmig; bei wachsender Entfernung können sie sich beliebig deformieren — je nach der Lage der anderen Ladungen.

Im Gegensatz zu den elektrischen Kraftlinien müssen die *magnetischen Kraftlinien immer geschlossen sein.* Dies folgt unmittelbar aus der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes, d. h. aus der Gültigkeit der Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ für den ganzen Raum. Eventuell können die magnetischen Kraftlinien vom Unendlichen ins Unendliche gehen, d. h. sich „in einen unendlich entfernten Punkt" schließen; diesen Fall braucht man daher nicht besonders zu berücksichtigen. Aus den Beziehungen $\oint H_\tau d\sigma = 4\pi i$ oder $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j}$ folgt ferner, daß die magnetischen Kraftlinien im Falle einer stationären Elektrizitätsströmung die Stromlinien, welche wegen $\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ auch geschlossene Kurven sind, immer *umfassen.* Denn sonst würde das Integral $\oint H_\tau d\sigma$ längs einer geschlossenen Kraftlinie, die keine Stromlinie umfaßt, einen von null verschiedenen Wert haben, während die Stärke des durch diese Linie fließenden Stroms i gleich null ist. Mit anderen Worten: die Stromlinien kann man als die „Wirbelachsen" der magnetischen Kraftlinien betrachten, d. h. als ringförmige Achsen, welche durch die Kraftlinien — etwa wie ein Ring einer Kette von den Nachbarringen — umfaßt werden (Abb. 22).

Abb. 22.

In unmittelbarer Nähe eines Elements $\Delta\sigma'$ einer Stromlinie σ', d. h. in einem Abstand von $\Delta\sigma'$, der sehr klein im Vergleich mit der Länge dieses Elements und zugleich mit seinem Krümmungsradius ist, kann man das Element als eine „geradlinige Wirbelachse" behandeln. Aus Symmetriegründen folgt, daß die magnetischen Kraftlinien hier *kreisförmig* sein müssen; wir bekommen also als graphische Darstellung des magnetischen Feldes eine Schar von *koaxialen Kreisen*. Diese *„Zylindersymmetrie"* des magnetischen Feldes in der Umgebung eines Stromelements entspricht der Kugelsymmetrie des elektrischen Feldes in der Umgebung einer Punktladung.

Das Integral $\oint H_r d\sigma$ für eine solche kreisförmige Kraftlinie mit dem Radius r ist offenbar gleich $2\pi r H$ (die Integrationsrichtung muß dabei der Stromrichtung im Sinne der Rechtsschraubenregel entsprechen). Daraus folgt $2\pi r H = 4\pi i'$, wo i' die Stromstärke bedeutet, d. h.

$$H = \frac{2i'}{r}. \tag{24}$$

Die magnetische Feldstärke in der unmittelbaren Umgebung einer Stromlinie ist also der ersten Potenz des Abstandes umgekehrt proportional. Dieses Gesetz kann man als das Analogon des *Coulomb*schen Gesetzes für *Stromlinien* (in welche sich die stationären Ströme zerlegen lassen) betrachten. Die Bewegung *einzelner* Ladungen (Elektronen) stellt keinen stationären Vorgang dar, und das Gesetz von *Bio-Savart*, welches das magnetische Feld solcher Ladungen — oder Stromelemente — ohne Rücksicht auf seine zeitliche Änderung bestimmt, ist deshalb nur als ein Näherungsgesetz anzusehen. Sofern aber diese Stromelemente zu einem stationären linearen Strom zusammengestellt werden, muß die geometrische Summe ihrer *Biot-Savart*schen Feldstärken *genau* gleich der resultierenden (zeitlich konstanten) Feldstärke werden.

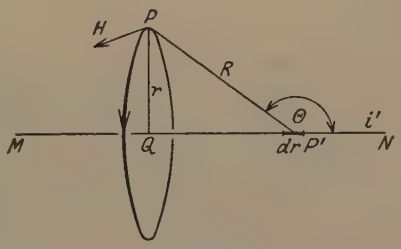

Abb. 23.

Die Formel (24) läßt sich aus der *Biot-Savart*schen Formel (21) für einen *unendlich langen* (im Vergleich mit r) *geradlinigen* Strom ableiten (Abb. 23). Es sei PO das Lot vom Aufpunkte P auf die Stromlinie MN, so daß nach unseren üblichen Bezeichnungen $OP = \mathfrak{r}$, $OP' = \mathfrak{r}'$, $P'P = \mathfrak{R}$ ist. Die vom Stromelement $d\sigma'$ erzeugte Feldstärke ist gleich, nach (21),

$$dH = i' d\sigma' \frac{\sin\theta}{R^2},$$

wo θ den Winkel $PP'N$ bedeutet. Da die Richtung von $d\mathfrak{H}$ für alle Stromelemente dieselbe ist (in dem betrachteten Punkt senkrecht zur

Papierebene, auf den Leser zu gerichtet), so reduziert sich die geometrische Integration auf die gewöhnliche: $H = \int dH$. Da $R = \frac{r}{\sin\theta}$ und $r' = -r\cot\theta$ ist, so haben wir $d\sigma' = dr' = -\frac{r}{\sin^2\theta}d\theta$, $dH = \frac{i'}{r}\sin\theta d\theta$ und folglich

$$H = \frac{i'}{r}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{2i'}{r}$$

in Übereinstimmung mit (24).

Das betrachtete magnetische Feld entspricht einem Vektorpotential der folgenden Form

$$\mathfrak{A} = -2\mathfrak{i}\lg\frac{r}{a} = 2\mathfrak{i}\lg\frac{a}{r}, \qquad (24a)$$

wo $\mathfrak{i}$ einen mit der Stromstärke nach Betrag und Richtung übereinstimmenden Vektor, r den Abstand des Aufpunktes von der Stromlinie (nicht von einem bestimmten Punkte derselben) und a eine willkürliche Konstante von der Dimension einer Länge bedeutet. In der Tat ergibt sich aus (24a) nach der allgemeinen Formel $\mathfrak{H} = \text{rot}\,\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{H} = -2\mathfrak{i}\times\text{grad}\lg\frac{r}{a} = 2\mathfrak{i}\times\frac{\mathfrak{r}}{r^2} = \frac{2\mathfrak{i}\times\mathfrak{r}_0}{r}.$$

Dieser Vektor stellt offenbar das oben betrachtete „zylindrische" Feld dar. Was die das Vektorpotential darstellenden Linien anbetrifft, so sind sie der Zylinderachse parallele Gerade. Daraus sieht man, daß in der nächsten Umgebung einer Stromlinie von ganz beliebiger Gestalt die „Vektorpotentiallinien" einen zu ihr parallelen „Faden" bilden. — Im allgemeinen sind sie aber zur anschaulichen Darstellung des magnetischen Feldes nicht geeignet.

§ 8. Die Felder und die Wechselwirkungen von elementaren Dipolen und Strömen.

Das elektrostatische („skalare") Potential φ eines beliebigen Dipols $P_1' P_2'$ in einem Aufpunkt P ist offenbar gleich der Summe der Potentiale seiner beiden Enden. Bezeichnet man die entsprechenden Ladungen mit $e_1 = -e'$ und $e_2 = +e'$ und setzt man ferner $P_1' P = \mathfrak{R}_1$, $P_2' P = \mathfrak{R}_2$, so wird:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = e'\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Im Falle eines *elementaren* Dipols, dessen Länge $P_1' P_2' = \mathfrak{l}'$ sehr klein gegenüber den Abständen R_1 und R_2 ist, hat man näherungsweise $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \mathfrak{l}'\,\text{grad}'\frac{1}{R}$ und folglich

$$\varphi = \mathfrak{p}'\,\text{grad}'\frac{1}{R} = -\mathfrak{p}'\,\text{grad}\frac{1}{R}, \qquad (25)$$

wo $\mathfrak{p}' = e\mathfrak{l}'$ das elektrische Moment des Dipols, und R seinen Abstand

vom Aufpunkt bedeutet. Indem wir diesen Abstand einführen, müssen wir die beiden Enden des Dipols als einen „Doppelpunkt" P' ($= P_1' P_2'$) behandeln. Einen solchen Doppelpunkt nennt man auch eine „Doppelquelle" des elektrischen Feldes.

Die durch die Symbole grad′ und grad angedeuteten Differentiationen beziehen sich in der üblichen Weise auf die Vektoren $\mathfrak{r}' = O\,P'$ und $\mathfrak{r} = O\,P$, wo O ein willkürlicher raumfester Punkt ist ($\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$). Führt man diese Differentiationen aus, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{R}}{R^3} = \frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{R}_0}{R^2} = \frac{p' \cos\theta}{R^2}, \tag{25a}$$

wo θ den Winkel zwischen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{R}$ bedeutet $\left(\mathfrak{R}_0 = \frac{\mathfrak{R}}{R}\right)$.

Nach den Formeln (30) und (31) (Einleitung), findet man ferner

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{R^3}\mathfrak{p}' + \frac{3}{R^5}\mathfrak{R}(\mathfrak{p}'\mathfrak{R}), \quad \text{d. h.}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{R^3}\{3\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p}') - \mathfrak{p}'\} = \frac{1}{R^3}\left\{\frac{3\mathfrak{R}(\mathfrak{R}\mathfrak{p}')}{R^2} - \mathfrak{p}'\right\} \tag{26}$$

Aus dieser Formel läßt sich erkennen, daß die elektrische Feldstärke im Punkte P in der Ebene $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{R}$ liegt; durch innere und äußere Multiplikation von (26) mit $\mathfrak{R}_0$ bekommen wir die radiale und azimutale Komponente des Vektors E (letztere in der Richtung des Anwachsens des Winkels θ):

$$E_R = \frac{2p'}{R^3}\cos\theta, \tag{26a}$$

$$E_\theta = \frac{p'}{R^3}\sin\theta. \tag{26b}$$

Das Verhältnis $\frac{E_\theta}{E_R} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta$ ist offenbar gleich dem Tangens des Winkels zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{R}$.

Ersetzt man in den Formeln (26), (26a), und (26b) $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{p}'$ durch $\mathfrak{m}'$, so werden sie nach dem Äquivalenzprinzip das durch *einen elementaren Strom* mit dem magnetischen Moment $\mathfrak{m}'$ erzeugte magnetische Feld bestimmen. Man kann also die entsprechende Feldstärke $\mathfrak{H}$ als den (negativen) Gradienten eines *skalaren magnetischen* Potentials $\varphi_m = \frac{\mathfrak{m}'\mathfrak{R}_0}{R^2} = -\mathfrak{m}'\operatorname{grad}\frac{1}{R}$ betrachten. — Andererseits muß diese Feldstärke sich in der allgemeinen Form $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ darstellen lassen, wo $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential des betrachteten elementaren Stroms bedeutet. Zur Bestimmung dieses Vektorpotentials kann man von der Tatsache ausgehen, daß es im ganzen Raum, *mit Ausschluß des Punktes* P' (wo der Strom konzentriert gedacht wird) die Differentialgleichung

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = -\operatorname{grad}\varphi_m = \operatorname{grad}\left(\mathfrak{m}'\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right)$$

befriedigen muß. Mit Rücksicht auf die Formeln (26) und (27) (Ein-

leitung), hat man wegen der Konstanz von $\mathfrak{m}'$

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{m}' \times \operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = -(\mathfrak{m}' \operatorname{grad})\operatorname{grad}\frac{1}{R} + \mathfrak{m}' \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{R}$$

$$\operatorname{grad}\left(\mathfrak{m}' \operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = (\mathfrak{m}' \operatorname{grad})\operatorname{grad}\frac{1}{R} + \mathfrak{m}' \times \operatorname{rot}\operatorname{grad}\frac{1}{R}.$$

Da nun die Ausdrücke $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\frac{1}{R}$ und $\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{R} = \nabla^2\frac{1}{R}$ beide verschwinden — der erste identisch, der zweite überall außerhalb des Punktes P' — so wird

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{m}' \times \operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = -\operatorname{grad}\left(\mathfrak{m}' \operatorname{grad}\frac{1}{R}\right).$$

Aus dem Vergleich dieser Gleichung mit der obigen Differentialgleichung für $\mathfrak{A}$, ergibt sich

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{m}' \times \operatorname{grad}\frac{1}{R} = \frac{\mathfrak{m}' \times \mathfrak{R}}{R^3} = \frac{\mathfrak{m}' \times \mathfrak{R}_0}{R^2}. \tag{27}$$

Diese Formel kann man selbstverständlich auch aus der allgemeinen Formel (20) für das Vektorpotential eines beliebigen linearen Stromes ableiten. — Es liege nämlich der Punkt O in der nächsten Nähe der betrachteten Stromlinie σ'. Dann gilt

$$\frac{1}{P'P} = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \simeq \mathfrak{r}' \operatorname{grad}'\frac{1}{r} = -\mathfrak{r}' \operatorname{grad}\frac{1}{r}$$

und folglich

$$\mathfrak{A} = -i' \oint d\sigma' \tau' \left(\mathfrak{r}' \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right).$$

Wir bemerken zunächst, daß $\tau' d\sigma' = d\mathfrak{r}'$ ist. Ferner haben wir, da der Vektor $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ bei der Integration konstant ($= \mathfrak{k}$) bleibt,

$$\oint d\mathfrak{r}' (\mathfrak{r}'\mathfrak{k}) + \oint \mathfrak{r}' (d\mathfrak{r}'\mathfrak{k}) = \oint d\{\mathfrak{r}' (\mathfrak{r}'\mathfrak{k})\} = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\oint d\mathfrak{r}' (\mathfrak{r}'\mathfrak{k}) = -\oint \mathfrak{r}' (d\mathfrak{r}'\mathfrak{k}) = \frac{1}{2}\oint \{d\mathfrak{r}' (\mathfrak{r}'\mathfrak{k}) - \mathfrak{r}' (d\mathfrak{r}'\mathfrak{k})\} = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{k} \times (d\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}')$$

$$= \mathfrak{k} \times \frac{1}{2}\oint d\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}',$$

d. h. nach (6a) Kap. II,

$$\mathfrak{A} = -i' \oint d\mathfrak{r}' (\mathfrak{r}'\mathfrak{k}) = \operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \frac{1}{2}\oint \mathfrak{r}' \times i\tau' d\sigma' = \operatorname{grad}\frac{1}{r} \times \mathfrak{m}',$$

in Übereinstimmung mit (27)[1].

[1]) Noch einfacher gelangt man zu dieser Formel mittels der Identität $\oint \tau' \psi d\sigma' = \int \mathfrak{n}' \times \operatorname{grad}' \psi dS'$ [siehe Einleitung, Formel (17a)]. Setzt man nämlich $\psi = \frac{1}{R}$, so ergibt sich, falls σ' sehr klein gegenüber R ist,

$$i\oint \frac{\tau}{R} d\sigma = \int \mathfrak{n}' \times \operatorname{grad}\frac{1}{R} dS' \simeq \operatorname{grad}\frac{1}{R} \times i\int \mathfrak{n}' dS' = \operatorname{grad}\frac{1}{R} \times \mathfrak{m}.$$

Wir stellen uns nun vor, daß im Aufpunkt P ein zweiter elementarer Dipol (oder Strom) mit dem Moment $\mathfrak{p}$ (bzw. $\mathfrak{m}$) sich befindet. Seine potentielle Energie relativ zu dem ersten Dipol $U = -\mathfrak{p}\mathfrak{E}$ läßt sich nach (26) in der Form

$$U = \frac{1}{R^3}\{(\mathfrak{p}\mathfrak{p}') - 3(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p})(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p}')\} = \frac{1}{R^3}\left\{\mathfrak{p}\mathfrak{p}' - \frac{3(\mathfrak{R}\mathfrak{p})(\mathfrak{R}\mathfrak{p}')}{R^2}\right\} \tag{28}$$

schreiben, deren Symmetrie in bezug auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ der Gleichheit der Energie jedes Dipols relativ zu dem anderen entspricht. Es ist also $U = -\mathfrak{p}\mathfrak{E} = -\mathfrak{p}'\mathfrak{E}'$, wo $\mathfrak{E}'$ die von dem zweiten Dipol im Punkte P' erzeugte Feldstärke bedeutet. Wir dürfen deshalb die Größe U einfach als die *gegenseitige potentielle Energie* der betrachteten Dipole bezeichnen.

Das auf den zweiten Dipol einwirkende *Drehmoment* läßt sich unmittelbar berechnen nach der Formel $\mathfrak{M} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}$; und zwar gilt

$$\mathfrak{M} = \frac{3(\mathfrak{p} \times \mathfrak{R}_0)(\mathfrak{p}'\mathfrak{R}_0) + \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}'}{R^3}, \tag{28a}$$

Die entsprechende *Kraft* drückt sich durch $\mathfrak{F} = (\mathfrak{p}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{F} = -\ \mathrm{grad}\ U$ aus. Setzen wir in die letzte Formel den Ausdruck (28) ein, so ergibt sich, nach einer einfachen Rechnung

$$\mathfrak{F} = \frac{3\mathfrak{R}}{R^5}(\mathfrak{p}\mathfrak{p}') + \frac{3}{R^5}\mathfrak{p}(\mathfrak{R}\mathfrak{p}') + \frac{3}{R^5}\mathfrak{p}'(\mathfrak{R}\mathfrak{p}) - \frac{15\mathfrak{R}}{R^7}(\mathfrak{R}\mathfrak{p})(\mathfrak{R}\mathfrak{p}')$$

oder

$$\mathfrak{F} = \frac{3}{R^4}\{\mathfrak{R}_0[\mathfrak{p}\mathfrak{p}' - 5(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p})(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p}')] + \mathfrak{p}(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p}') + \mathfrak{p}'(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p})\}. \tag{28b}$$

Ersetzt man in (28a) den Vektor $\mathfrak{R}$ durch den entgegengesetzten Vektor $\mathfrak{R}' = P\,P' = \mathfrak{r}' - \mathfrak{r} = -\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}_0' = -\mathfrak{R}_0$), so erhält man das Drehmoment $\mathfrak{M}'$ und die Kraft $\mathfrak{F}'$, welche auf den ersten Dipol seitens des zweiten wirken. Dabei ist $\mathfrak{M}' = -\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}' = -\mathfrak{F}$, im Einklang mit dem Prinzip der Gleichheit der „Wirkung und Gegenwirkung", das eine direkte Folge des Energieprinzips ist[1]).

Dieselben Resultate ergeben sich für die Wechselwirkung der elementaren Ströme; wir brauchen nur in den soeben abgeleiteten Formeln die elektrischen Momente $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ durch die magnetischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ zu ersetzen.

Diese Formeln bleiben in gewissem Sinne auch dann gültig, wenn man statt der elementaren Ströme einzelne *Magnetonen*, d. h. einzelne um bestimmte Mittelpunkte kreisende Elektronen betrachtet. Das magnetische Moment eines solchen Magnetons ist, nach (6a) und (6b) Kap. II, gleich

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\frac{e}{c}\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}, \tag{29}$$

wo $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor der Bahn und $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ die Geschwindigkeit be-

[1]) Es sei bemerkt, daß nach (28a) und (28b) die Drehkräfte der *dritten* und die Kräfte der *vierten* Potenz des gegenseitigen Abstandes umgekehrt proportional sind.

deuten. Der Betrag des Vektors $\frac{1}{2}\,\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$ ist gleich der *Flächengeschwindigkeit* des Elektrons, d. h. der durch den Radiusvektor pro Zeiteinheit beschriebenen Fläche. Geschieht die Bewegung des Elektrons unter der Wirkung einer zum Atommittelpunkt O gerichteten Anziehungskraft, so muß diese Flächengeschwindigkeit ebenso wie die Bahnebene konstant bleiben. In diesem Fall ($\mathfrak{m} = \text{konst}$) ist das „Magneton" einem *stationären* elementaren Strom vollständig äquivalent. Man muß nur unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$ usw. die *zeitlichen Mittelwerte* der entsprechenden Größen für eine oder einige Umdrehungen des betreffenden Elektrons verstehen und die während einer Umdrehung auftretenden Schwankungen unberücksichtigt lassen (vgl. Kap. VII, § 9).

§ 9. Das skalare Potential eines nichtelementaren linearen Stromes.

Der Begriff des skalaren magnetischen Potentials, den wir oben auf elementare Ströme angewandt haben, läßt sich auf nichtelementare lineare Ströme übertragen. Dazu müssen wir zunächst den betrachteten Strom (i', σ') durch ein Netz von elementaren Strömen ersetzen. Das skalare Potential eines elementaren Stromes mit dem magnetischen Moment $d\mathfrak{m} = i'\mathfrak{n}'dS'$ ist nach (25a) gleich

$$d\varphi_m = i' \frac{\cos\theta}{R^2} dS';$$

dabei bedeutet θ den Winkel zwischen der Normalen $\mathfrak{n}$ und dem von dS' nach dem Aufpunkte P gezogenen Radius $\mathfrak{R}$. Das Produkt $dS' \cos\theta$ ist also gleich der Projektion des Flächenelements dS' auf eine dieses Flächenelement scheidende Kugelfläche mit dem Zentrum P. Das Verhältnis $\frac{dS'\cos\theta}{R^2}$ ist demnach nichts anderes, als der *räumliche Winkel* $d\Omega'$, unter dem dS' von P aus erscheint. Durch Integration bekommen wir folglich

$$\varphi_m = i'\,\Omega'. \tag{30}$$

Es sei bemerkt, daß das Vorzeichen von $d\Omega'$ positiv bzw. negativ ist, je nachdem das entsprechende Flächenelement von der positiven oder negativen Seite gesehen wird.

Man kann Ω' unabhängig von der Gestalt der Fläche S' definieren als den räumlichen Winkel, welcher von einem von P *nach der Stromlinie* σ' gehenden Strahlenkegel gebildet wird. Dabei muß man aber beachten, daß ein solcher Kegel tatsächlich *zwei* komplementäre räumliche Winkel begrenzt, nämlich Ω' und $4\pi - \Omega'$. Zur Bestimmung des Potentials (30) dürfen beide Winkel benützt werden, je nachdem die Fläche S' auf der der einen oder auf der anderen Seite des Aufpunktes P liegt, aber mit *entgegengesetztem Vorzeichen*. Ersetzt man also die Fläche S' durch eine andere S'' (Abb. 24), so muß man den Winkel $\Omega' > 2\pi$ durch $\Omega'' = -(4\pi - \Omega') = \Omega' - 4\pi$ ersetzen.

Diese Regel bleibt auch dann gültig, wenn man den Aufpunkt P von einer Seite einer gegebenen Fläche S' nach der anderen verschiebt. Bei einer Verschiebung von der negativen nach der positiven Seite springt Ω' um den Betrag 4π. Dies entspricht einer sprunghaften Änderung des Potentials φ_m um $4\pi i'$. Will man dieses Potential als eine *stetige* Größe behandeln, so muß man sich den Durchgang durch die Fläche S' *gesperrt* denken. Dann kann man von der positiven Seite nach der negativen nur auf dem Umweg einer „fast" geschlossenen Linie σ gehen, welche die Stromlinie tatsächlich einmal umfaßt. Da dabei $H_\tau d\sigma = -\operatorname{grad}_\tau \varphi_m d\sigma = -\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} d\sigma = -d\varphi$ ist, so folgt $\int H_\tau d\sigma = \int d\varphi = 4\pi i'$. Dieses Resultat haben wir schon im § 3 und besonders in § 4 erhalten, wobei wir anstatt des magnetischen Feldes des betreffenden Stromes das elektrische Feld der entsprechenden elektrischen Doppelschicht betrachteten. Die oben eingeführte „Sperrfläche" ist nichts anderes als die „Doppelfläche" dieser Schicht.

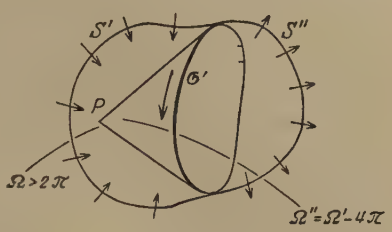

Abb. 24.

Nach der Formel (12) ist die elektrische Feldstärke innerhalb einer solchen Doppelschicht gleich $4\pi\eta$ (wo η die Flächendichte der elektrischen Ladung bedeutet) und ist von der positiven zur negativen Seite gerichtet. Das elektrische Feld außerhalb der Doppelschicht ergibt sich nach (30) aus dem skalaren Potential

$$\varphi = i_e' \Omega'. \qquad (30a)$$

wo $i_e' = \eta l$ das elektrische Moment pro Flächeneinheit der Schicht ist.

Eine elektrische Doppelschicht braucht nicht notwendig durch eine geschlossene Kurve σ' begrenzt zu sein. Sie kann auch geschlossen sein, d. h. durch zwei ineinander liegende geschlossene Flächen mit entgegengesetzten Ladungen gebildet werden. Diesen Fall kann man offenbar als den Grenzfall einer verschwindenden Grenzkurve bei nicht verschwindender Fläche S' betrachten. Daraus folgt unmittelbar, daß außerhalb der geschlossenen Doppelschicht die elektrische Feldstärke verschwinden muß. — Was das Potential φ anbetrifft, so wird es im Außenraum gleich null, und in dem inneren Raum gleich der konstanten Größe $\pm 4\pi i$; das obere Vorzeichen gilt dabei für den Fall, daß die innere Fläche positiv geladen ist, das negative Zeichen für den entgegengesetzten Fall.

§ 10. Elektrische und magetische Polarisation und Polarisationspotentiale.

Ein *neutrales* System von elektrischen Ladungen, das sich in einem begrenzten Volumen befindet, kann man sich ersetzt denken (und zwar

im allgemeinen auf unendlich viele Weisen) durch ein äquivalentes System von elementaren elektrischen Dipolen, die auch dasselbe Volumen erfüllen. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die elektrischen Ladungen in dem betrachteten Volumen V und auf der es begrenzenden Oberfläche S kontinuierlich mit der Dichte ϱ bzw. η verteilt sind. Dementsprechend muß in dem äquivalenten Dipolsystem *das elektrische Moment* kontinuierlich verteilt sein. Die Volumdichte dieses Moments heißt die *elektrische Polarisation*. Bezeichnet man sie mit $\mathfrak{P}$, so bedeutet das Produkt $\mathfrak{P}\,dV$ das resultierende Moment der elementaren Dipole, die sich im Volumelement dV befinden.

Wir wollen nun die Beziehung zwischen ϱ und $\mathfrak{P}$ aufstellen. Dies kann auf zwei Weisen geschehen — nämlich erstens durch Vergleich der auf die beiden Systeme in einem gegebenen äußeren Felde ($\mathfrak{E}'$) ausgeübten Wirkung, und zweitens durch Vergleich der von ihnen außerhalb V erzeugten Felder ($\mathfrak{E}$). Das wirkliche System werden wir mit C und das Ersatz-(Dipol-)system mit D bezeichnen.

Die potentielle Energie von C bezüglich des äußeren Feldes drückt sich durch die Formel

$$U = \int \varphi' \varrho\, dV + \oint \varphi' \eta\, dS$$

aus, wo φ' das Potential dieses Feldes ist. Für die potentielle Energie von D haben wir andererseits

$$U = -\int \mathfrak{E}'\, \mathfrak{P}\, dV.$$

Setzt man hier $\mathfrak{E}' = -\operatorname{grad} \varphi'$ ein, so wird nach der Identität

$$\operatorname{div} \varphi' \mathfrak{P} = \varphi' \operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{P} \operatorname{grad} \varphi',$$

$$U = \int \operatorname{div} (\varphi' \mathfrak{P})\, dV - \int \varphi' \operatorname{div} \mathfrak{P}\, dV = \oint \varphi'\, P_n\, dS - \int \varphi' \operatorname{div} \mathfrak{P}\, dV.$$

Damit C und D tatsächlich äquivalent seien, müssen also die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\varrho = -\operatorname{div} \mathfrak{P}, \tag{31}$$

$$\eta = P_n. \tag{31a}$$

Wir wollen nun verifizieren, ob dabei die von C und D erzeugten Felder auch identisch (außerhalb S) werden. Das Volumelement dV' (Radiusvektor $\mathfrak{r}'$), als ein Dipol mit dem Moment $\mathfrak{P}'\,dV'$ betrachtet, erzeugt in einem äußeren Aufpunkte mit dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$ das Potential $\mathfrak{P}'\,dV' \cdot \operatorname{grad}' \frac{1}{R}$, wo $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ ist. Das vollständige Potential von D drückt sich durch das Integral

$$\varphi = \int \mathfrak{P}' \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\, dV'$$

aus. Mittels der Identität

$$\operatorname{div}'\left(\frac{\mathfrak{P}'}{R}\right)=\frac{1}{R}\operatorname{div}'\mathfrak{P}'+\mathfrak{P}'\operatorname{grad}'\frac{1}{R}$$

läßt sich dieses Integral in der Form darstellen

$$\varphi=\oint\frac{P'_n}{R}dS'-\int\frac{\operatorname{div}'\mathfrak{P}'}{R}dV'.$$

Dies ist aber nach (31) und (31a) nichts anderes als das Potential von C:

$$\varphi=\oint\frac{\eta' dS'}{R}+\int\frac{\varrho' dV'}{R}.$$

Ersetzt man ferner $\operatorname{grad}'\frac{1}{R}$ durch $-\operatorname{grad}\frac{1}{R}$, so wird, da $\mathfrak{P}'$ nur von $\mathfrak{r}'$, nicht aber von $\mathfrak{r}$ abhängt,

$$\mathfrak{p}'\operatorname{grad}'\frac{1}{R}=-\mathfrak{P}'\operatorname{grad}\frac{1}{R}=-\operatorname{div}\frac{\mathfrak{P}'}{R},$$

und folglich

$$\varphi=-\int\operatorname{div}\frac{\mathfrak{P}'}{R}dV'=-\operatorname{div}\int\frac{\mathfrak{P}'}{R}dV'.$$

Den Vektor

$$\mathfrak{Z}=\int\frac{\mathfrak{P}'}{R}dV' \qquad (32)$$

wollen wir das *elektrische Polarisationspotential* nennen (er heißt gewöhnlich der *Hertz*sche Vektor). Das skalare Potential φ drückt sich durch $\mathfrak{Z}$ auf dieselbe Weise aus wie ϱ durch $\mathfrak{P}$, nämlich

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathfrak{Z}. \qquad (32a)$$

Das Polarisationspotential eines elementaren Dipols mit dem Moment $\mathfrak{p}$ ist offenbar gleich

$$\mathfrak{Z}=\frac{\mathfrak{p}}{R}. \qquad (32b)$$

Ganz analoge Betrachtungen und Formeln lassen sich in bezug auf ein System von *stationären Strömen* aufstellen. Ersetzt man in den vorhergehenden Überlegungen ϱ durch $\mathfrak{j}$ (Stromdichte im Volumen V), und η durch $\mathfrak{k}$ (Stromdichte auf die Fläche S), so ergibt sich für die potentielle Energie des betrachteten Systems in einem äußeren magnetischen Feld $\mathfrak{H}'$ mit dem Vektorpotential $\mathfrak{A}'$

$$U=-\int\mathfrak{A}'\cdot\mathfrak{j}dV-\oint\mathfrak{A}'\cdot\mathfrak{k}dS.$$

Wir führen nun ein Ersatzsystem D, das aus elementaren *magnetischen* Dipolen besteht, die in dem Volumen V kontinuierlich verteilt sind. Die „magnetische Polarisation", d. h. das auf die Volumeinheit bezogene magnetische Moment, bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$. Dann muß die potentielle

Energie von D durch die Formel

$$U = -\int (\mathfrak{H}' \mathfrak{M})\, dV$$

ausgedrückt werden.

Mittels der Identität

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}' \times \mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \operatorname{rot} \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}' \operatorname{rot} \mathfrak{M}$$

[Einleitung, Formel (25)] bekommen wir, wegen $\operatorname{rot} \mathfrak{A}' = \mathfrak{H}'$,

$$-\int (\mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{M})\, dV = -\int \operatorname{div}(\mathfrak{A}' \times \mathfrak{M})\, dV - \int \mathfrak{A}' \operatorname{rot} \mathfrak{M}\, dV,$$

d. h.

$$U = -\int \mathfrak{A}' \operatorname{rot} \mathfrak{M}\, dV - \oint (\mathfrak{A}' \times \mathfrak{M})_n\, dS.$$

Die Äquivalenz von C und D ist also durch die Bedingungen:

$$\mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{M} \tag{33}$$

und

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{n} \tag{33a}$$

gesichert [die letzte Formel ergibt sich mit Rücksicht auf die Identität $(\mathfrak{A}' \times \mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{M} \times \mathfrak{n})$.

Das Vektorpotential eines elementaren Stromes (oder magnetischen Dipols) mit dem Moment $\mathfrak{M}' dV'$ ist gleich $\mathfrak{M}' dV' \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R}$. Das magnetische Feld unseres Ersatzsystems (außerhalb S) ist folglich durch die Formel

$$\mathfrak{A} = \int \mathfrak{M}' \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\, dV' \tag{34}$$

bestimmt. Diese Formel läßt sich leicht auf die Gestalt

$$\mathfrak{A} = \oint \frac{\mathfrak{M}' \times \mathfrak{n}}{R}\, dS' + \int \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{M}'}{R}\, dV \tag{34a}$$

transformieren, die wegen (33) und (33a) mit der entsprechenden Formel für das Stromsystem C übereinstimmt. Den Ausdruck (34) für $\mathfrak{A}$ kann man folgendermaßen schreiben

$$\mathfrak{A} = -\int \mathfrak{M}' \times \operatorname{grad} \frac{1}{R}\, dV' = \int \operatorname{rot} \frac{\mathfrak{M}'}{R}\, dV' = \operatorname{rot} \int \frac{\mathfrak{M}'}{R}\, dV'.$$

Definiert man den Vektor

$$\mathfrak{Z}^* = \int \frac{\mathfrak{M}'}{R}\, dV' \tag{35}$$

als das *magnetische Polarisationspotential* des betrachteten Stromsystems, so kann man daraus das gewöhnliche Vektorpotential durch eine zu (33) ganz analoge Formel

$$\mathfrak{A} = \operatorname{rot} \mathfrak{Z}^* \tag{35a}$$

bestimmen. Die Polarisationspotentiale $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}^*$ genügen offenbar den Differentialgleichungen

$$\nabla^2 \mathfrak{Z} = -4\pi \mathfrak{P}, \tag{36}$$

$$\nabla^2 \mathfrak{Z}^* = -4\pi \mathfrak{M}. \tag{36a}$$

Es sei bemerkt, daß trotz der Ähnlichkeit der Formeln

$$\varrho = -\operatorname{div} \mathfrak{P} \quad \text{und} \quad \mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{M}$$

mit den entsprechenden Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j},$$

die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von den Vektoren $-4\pi\mathfrak{P}$ und $4\pi\mathfrak{M}$ *im allgemeinen ganz verschieden* sind. Man muß nämlich beachten, daß letztere außerhalb der Oberfläche S verschwinden, während die ersteren dies nicht tun. Weiter genügen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ den „Energiegleichungen" $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$, während die Größen $\operatorname{rot} \mathfrak{P}$ und $\operatorname{div} \mathfrak{M}$ unbestimmt bleiben. In der Tat sind die Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ *nur* durch die Gleichungen $\operatorname{div} \mathfrak{P} = -\varrho$, $\operatorname{rot} \mathfrak{M} = \mathfrak{j}$ und die Grenzbedingungen $\mathfrak{P}_n = \eta$, $\mathfrak{M} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{k}$ definiert. Man kann deshalb zu $\mathfrak{P}$ einen beliebigen Vektor von der Gestalt $\operatorname{rot} \mathfrak{F}$ und zu $\mathfrak{M}$ einen beliebigen wirbelfreien Vektor hinzufügen — insofern dadurch die Grenzbedingungen nicht verletzt werden. Nur in dem ausgezeichneten Falle, daß die elektrische und magnetische Feldstärke selbst auf der Oberfläche S die Bedingungen

$$(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n}) = -4\pi\eta \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{H} \times \mathfrak{n} = 4\pi\mathfrak{k} \tag{37}$$

befriedigen, kann man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ *innerhalb* S mit den entsprechenden Werten von $-\frac{\mathfrak{E}}{4\pi}$ und $\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}$ identifizieren, d. h.

$$4\pi\mathfrak{P} = -\mathfrak{E}, \quad 4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \tag{37a}$$

setzen.

Viertes Kapitel.

Darstellung willkürlicher Systeme durch Multipole. Potentialtheorie.

§ 1. Definition eines Multipols.

Wir haben bisher den Begriff des elementaren Dipols in einem etwas unscharfen Sinne benutzt, indem wir die Länge eines solchen Dipols als „klein" gegenüber seinem Abstand von anderen Dipolen vorausgesetzt hatten. Wir wollen nun diesen unscharfen physikalischen Begriff durch den folgenden, ganz scharfen, aber rein mathematischen Begriff ersetzen (oder besser ergänzen):

Die Länge des Dipols (l) soll *unendlich klein* und die Ladungen ($\pm e$) *unendlich groß* sein, derart, daß sein Moment ($p = e\,l$) einen *endlichen Wert* hat. Zum Unterschied von den reellen physikalischen Dipolen,

die immer eine endliche Länge haben, und aus Ladungen von endlicher Größe bestehen, wollen wir einen solchen Dipol als *mathematischen Dipol* bezeichnen.

Einen mathematischen Dipol muß man also eigentlich als ein *punktförmiges* Gebilde — einen *Doppelpunkt* — betrachten, ebenso wie eine einzige Punktladung. Sie unterscheiden sich voneinander einfach dadurch, daß im letzten Falle mit dem betreffenden Punkt eine skalare Größe (die Ladung), im ersten Fall dagegen eine vektorielle Größe (das Moment) verknüpft ist.

Zwei (mathematische) Dipole mit entgegengesetzt gleichen unendlich großen Momenten, die sich in einem unendlich kleinen Abstand voneinander befinden, kann man wiederum als einen *Punkt*, und zwar als einen *vierfachen* Punkt, auffassen. Ein solcher vierfacher Punkt heißt *Quadrupol*. Ein mathematischer Quadrupol entsteht also aus 4 Ladungen von der gleichen oder entgegengesetzt gleichen Größe $\pm e$, welche die Ecken eines Parallelogramms mit unendlich kleinen Seiten l_1, l_2 bilden (Abb. 25). Dabei wird vorausgesetzt, daß das Produkt el_1l_2, welches dem Moment eines Dipols entspricht, einen endlichen Wert besitzt.

Wenn man in einem Quadrupol die positiven Ladungen mit den negativen vertauscht, so ergibt sich der *entgegengesetzte* Quadrupol. Zwei

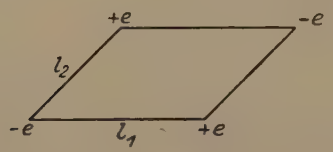

Abb. 25.

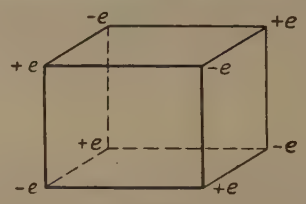

Abb. 26.

entgegengesetzte Quadrupole, die relativ zueinander um eine unendlich kleine Strecke l_3 verschoben sind, wobei das Produkt $el_1l_2l_3$ endlich bleibt, bilden einen *achtfachen* Punkt oder *Oktupol*.

Einen Oktupol kann man sich also als ein unendlich kleines Parallelepiped vorstellen, an dessen Ecken die Ladungen $\pm e$ (in der Reihenfolge $+ - + \ldots$) sitzen (Abb. 26).

Durch Wiederholung des oben geschilderten Prozesses gelangt man zu *mehrfachen* Punkten oder Multipolen beliebig hoher Ordnung. Einen 2^n-fachen Punkt, d. h. einen Pol n-ter Ordnung kann man allgemein definieren, als ein quasi-punktförmiges System, das aus zwei entgegengesetzten Polen $(n-1)$-ter Ordnung in unendlich kleiner Entfernung voneinander besteht. Lösen wir diese Pole $(n-1)$-ter Ordnung in Pole niederer Ordnung auf, so bekommen wir letzten Endes 2^n unendlich große Ladungen $\pm e$, die um unendlich kleine Strecken l_1, l_2, $\ldots l_n$ relativ zueinander verschoben sind; das Produkt $el_1l_2 \ldots l_n$ muß dabei einen endlichen Wert haben.

Die n Vektoren $\mathfrak{l}_1\ \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_n$ können im allgemeinen beliebige Richtungen im Raum haben. Sie können aber alle in derselben Ebene oder auch auf derselben Geraden liegen. Im letzten Fall heißt der betreffende Multipol *axial*.

Als *Moment* des Poles n-ter Ordnung definiert man die Größe

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \frac{1}{n!}(e\, l_1 l_2 \ldots l_n), \tag{1}$$

welche, wie wir sehen werden, den *Betrag* eines *Tensors n-ten Ranges* darstellt. Dieser Tensor ist die sinngemäße Verallgemeinerung des vektoriellen Momentes eines „Pols 1-ter Ordnung", d. h. eines Dipols. Er wird durch die Größe $\mathfrak{p}^{(n)}$ und die n Einheitsvektoren $\frac{\mathfrak{l}_i}{l_i} = \mathfrak{a}_i$ bestimmt. Die in der Richtung dieser Vektoren gezogenen Geraden heißen die *Achsen* des betrachteten Pols. Eine Punktladung kann man als einen Pol „nullter Ordnung" definieren.

§ 2. Das Feld und die Energie von Multipolen.

Es sei P' der (mehrfache) Quellpunkt des elektrischen Feldes und P der Aufpunkt, für welchen das Potential φ dieses Feldes zu berechnen ist.

Im Falle eines einfachen Punktes, d. h. einer Punktladung e', haben wir

$$\varphi^{(0)} = \frac{e'}{R}.$$

Wir stellen uns nun vor, daß diese Ladung in den Nachbarpunkt P_1' verschoben wird, während in P' die entgegengesetzte Ladung $-e'$ sich befindet. Im Limes $P'P_1' = \mathfrak{l}_1' = \mathfrak{a}_1' l_1' \to 0$ und $e' \mathfrak{l}_1' = \mathfrak{p}'^{(1)}$ endlich, bekommen wir einen Doppelpunkt, d. h. einen mathematischen Dipol, dessen Potential durch die bekannte Formel

$$\varphi^{(1)} = (\mathfrak{l}_1' \operatorname{grad}')\varphi^{(0)} = (\mathfrak{p}'^{(1)} \nabla')\frac{1}{R} = \mathfrak{p}'^{(1)}(\mathfrak{a}_1' \nabla')\frac{1}{R}$$

— und zwar nicht näherungsweise, sondern ganz exakt — ausgedrückt wird.

Verschiebt man diesen Dipol aus P' nach dem Nachbarpunkt P_2' und setzt zugleich im Punkte P' den entgegengesetzten Dipol ein, so entsteht im Limes $P'P_2' = \mathfrak{l}_2' = \mathfrak{a}_2' l_2' \to 0$ bei $\mathfrak{p}'^{(1)} l_2' = \frac{1}{2}\mathfrak{p}'^{(2)} =$ endlich, ein 4-facher Punkt, d. h. ein Quadrupol. Sein Potential in P ergibt sich aus $\varphi^{(1)}$ auf dieselbe Weise, wie das letztere aus $\varphi^{(0)}$, d. h. durch die Formel

$$\varphi^{(2)} = (\mathfrak{l}_2' \nabla')\varphi^{(1)} = \frac{\mathfrak{p}'^{(2)}}{2} \cdot (\mathfrak{a}_2' \nabla')(\mathfrak{a}_1' \nabla')\frac{1}{R}.$$

From Taylor's series expansion

Bezeichnet man allgemein das Potential eines bestimmten Pols $(n'-1)$-ter Ordnung $D^{(n'-1)}$ mit $\varphi^{(n'-1)}$, so erhält man für das Potential $\varphi^{(n')}$ des Pols n'-ter Ordnung $D^{(n')}$, der durch Verschiebung von

$D^{(n'-1)}$ um die unendlich kleine Strecke $\mathfrak{l}'_{n'} = \mathfrak{a}'_{n'}\mathfrak{l}'_{n'}$ und Hinzufügung des entgegengesetzten Poles in P' entsteht, den Ausdruck

$$\varphi^{(n')} = (\mathfrak{l}'_{n'}\nabla')\,\varphi^{(n'-1)} \tag{2}$$

oder, nach (1),

$$\varphi^{(n')} = \frac{\mathfrak{p}'^{(n')}}{n'!}(\mathfrak{a}'_{n'}\nabla')(\mathfrak{a}'_{n'-1}\nabla')\ldots(\mathfrak{a}'_1\nabla')\frac{1}{R}. \tag{2a}$$

Aus dieser Formel kann man sofort schließen, daß das elektrische Feld eines Pols n-ter Ordnung von der Reihenfolge und von der Größe der einzelnen infinitesimalen Verschiebungen $\mathfrak{l}'_1, \mathfrak{l}'_2, \ldots \mathfrak{l}'_n$ unabhängig ist; es wird durch den skalaren Parameter $\mathfrak{p}'^{(n)}$ und die Gesamtheit der n Einheitsvektoren $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \ldots \mathfrak{a}'_n$ („Axen") vollständig bestimmt.

Befindet sich im Punkte P eine Ladung e, so bekommen wir für ihre potentielle Energie in bezug auf irgendein System von elektrischen Ladungen, die in P das Potential φ erzeugen, das Produkt

$$U^{(0)} = e\varphi\,.$$

Durch Verschiebung der Ladung um die unendlich kleine Strecke $\mathfrak{l}_1$ und Hinzufügung der entgegengesetzten Ladung in P bekommt man für $e\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}^{(1)}\mathfrak{a}_1 =$ endlich, einen Dipol, dessen Energie durch

$$U^{(1)} = (\mathfrak{l}_1\nabla)\,U^{(0)} = (\mathfrak{p}_1\nabla)\varphi = \mathfrak{p}^{(1)}(\mathfrak{a}_1\nabla)\varphi$$

ausgedrückt wird[1]). Da $\nabla\varphi = -\mathfrak{E}$ ist, so kann man die obige Formel in der üblichen Gestalt $U^{(1)} = -\mathfrak{p}_1\mathfrak{E}$ schreiben. — Ersetzt man in dieser Überlegung die Ladung e durch einen Pol $(n-1)$-ter Ordnung, so bekommt man, anstatt des Dipols einen Pol n-ter Ordnung $D^{(n)}$ mit der potentiellen Energie

$$U^{(n)} = (\mathfrak{l}_n\nabla)\,U^{(n-1)} \tag{3}$$

oder

$$U^{(n)} = \frac{\mathfrak{p}^{(n)}}{n!}(\mathfrak{a}_n\nabla)(\mathfrak{a}_{n-1}\nabla)\ldots(\mathfrak{a}_1\nabla)\varphi_0, \tag{3a}$$

wo $\mathfrak{p}^{(n)}$ das Moment dieses Pols und $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n$ die entsprechenden „Achsenvektoren" bedeuten.

Speziell ergibt sich für $\varphi = \varphi^{(n')}$ nach (2a) und (3a) die folgende Formel für die gegenseitige potentielle Energie der Pole $D^{(n')}$ und $D^{(n)}$:

$$U^{(n',n)} = \frac{\mathfrak{p}'^{(n')}\mathfrak{p}^{(n)}}{n'!\,n!}(\mathfrak{a}'_1\nabla')\ldots(\mathfrak{a}'_{n'}\nabla')(\mathfrak{a}_1\nabla)\ldots(\mathfrak{a}_n\nabla)\frac{1}{R}. \tag{4}$$

Dabei gilt

$$\nabla' = -\nabla \tag{4a}$$

so daß für die tatsächliche Berechnung von $U^{(n',n)}$ die Differentialoperationen $(\mathfrak{a}'_1\nabla')$ usw. durch $-(\mathfrak{a}'_1\nabla)$ usw. [oder $(\mathfrak{a}_1\nabla)$ durch $-(\mathfrak{a}_1\nabla')$] ersetzt werden können.

---

[1]) Es sei erinnert, daß $\nabla =$ grad eine Differentiation nach $\mathfrak{r}$ und $\nabla' =$ grad' eine Differentiation nach $\mathfrak{r}'$ bedeutet, wo $\mathfrak{r}' = OP$, $\mathfrak{r}' = OP'$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ ist.

Für $n' = n = 1$ bekommen wir aus (4) den schon bekannten Ausdruck (28) Kap. III für die potentielle Energie zweier Dipole. Er unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen von der potentiellen Energie einer Punktladung gegenüber einem Quadrupol (das Produkt $p_1 p'_1$ muß dabei durch $-p^{(2)}e'$ oder $-p'^{(2)}e$ ersetzt werden).

Mittels der Formeln

$$\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{R}) = \mathfrak{a}\,(= \text{konst}), \quad \nabla R^{-n} = -n R^{-(n+2)}\mathfrak{R}$$

und der allgemeinen Regel für die Differentiation des Produkts mehrerer Faktoren lassen sich die Ausdrücke (2a) und (4) für beliebige n' und n ohne Schwierigkeit berechnen. Dabei bekommt man für $\varphi^{(n)}$ eine Formel von der Gestalt

$$\varphi^{(n)} = p^{(n)} \frac{(-1)^n}{R^{n+1}} Y^{(n)}, \tag{5}$$

wo $Y^{(n)}$ eine nur von der Richtung (nicht aber von der Größe) des Vektors $\mathfrak{R}$, d.h. nur von dem *Einheitsvektor* $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} : R$ abhängige Funktion bedeutet. Diese Funktion besteht aus einer Anzahl von Summanden, die sich aus lauter Faktoren des Typus $\mathfrak{a}_i \mathfrak{R}_0 = \cos(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{R}_0)$ oder $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = \cos(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ zusammensetzen. In bezug auf die Größen $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n$ ist $Y^{(n)}$ eine *symmetrische* homogene Funktion vom Grade n. Es ist z. B. mit den Abkürzungen $(\mathfrak{a}_i \mathfrak{R}_0) = \lambda_i$, $(\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_n) = \lambda_{ik}$:

$$Y^{(1)} = \lambda_1,$$

$$Y^{(2)} = \frac{1}{2}(3\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}),$$

$$Y^{(3)} = \frac{1}{6}(15\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 3\lambda_1\lambda_{23} - 3\lambda_2\lambda_{31} - 3\lambda_3\lambda_{12}),$$

$$Y^{(4)} = \frac{1}{24}\{105\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - 15(\lambda_2\lambda_3\lambda_{14} + \lambda_3\lambda_1\lambda_{24} + \lambda_1\lambda_2\lambda_{34} + \lambda_1\lambda_4\lambda_{23} + \lambda_2\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_3\lambda_4\lambda_{12}) + 3(\lambda_{14}\lambda_{23} + \lambda_{24}\lambda_{31} + \lambda_{31}\lambda_{12})\}$$

und allgemein

$$Y^{(n)} = \frac{1}{n!}\{1\cdot 3 \ldots (2n-1)\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n - 1\cdot 3 \ldots (2n-3)\Sigma\lambda_{12}\lambda_3 \ldots \lambda_n + 1\cdot 3 \ldots (2n-5)\Sigma\lambda_{12}\lambda_{34}\lambda_5 \ldots \lambda_n \ldots\}, \tag{5a}$$

wo $\Sigma\lambda_{12}\lambda_3 \ldots \lambda_n$ usw. die Summe aller aus dem hingeschriebenen durch Vertauschung der Indizes hervorgehenden Glieder bedeutet. Der Beweis von (5a) läßt sich unmittelbar durch Übergang von $Y^{(n)}$ zu $Y^{(n+1)}$ unter Berücksichtigung der erwähnten Symmetrieeigenschaft erbringen.

Die Anzahl aller Glieder, die aus $\lambda_{12}\lambda_{34} \ldots \lambda_{2k-1,\,2k}\lambda_{2k+1}\lambda_{2k+2} \ldots \lambda_n$ durch verschiedene Permutationen der Zahlen 1, 2, ... $2k$ entstehen, ist offenbar gleich $\frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$. Die Anzahl der Glieder in der Summe $\Sigma\lambda_{12} \ldots \lambda_{2k-1,\,2k}\lambda_{2k+1} \ldots \lambda_n$ ist demnach gleich

$$\frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{2\cdot 4 \ldots 2k}.$$

In dem Falle eines Multipols mit n zusammenfallenden Achsen

($\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$; $\lambda_{ik} = 1$) bekommen wir also den folgenden Ausdruck für $Y^{(n)}$

$$Y^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \sum_{k=0}^{2k \leq n} (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-2k+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k \cdot (2n-1)\ldots(2n-2k+1)} \lambda^{n-2k}. \tag{5b}$$

Die Funktionen (5b) heißen *Legendre*sche *Polynome*. Die allgemeineren Funktionen (5a) nennt man gewöhnlich *Kugelfunktionen* oder auch *harmonische Funktionen* n-ter Ordnung. Als Argumente dieser Funktionen betrachtet man aber nicht die Kosinusse $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, sondern die Winkel θ, ψ, welche die Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{R}$ in bezug auf irgendein sphärisches Koordinatensystem festlegen (θ-Winkel zwischen $\mathfrak{R}$ und Polarachse, ψ — Asimut der Meridianebene von $\mathfrak{R}$). Bezeichnet man die entsprechenden Winkel für die Achsen des betrachteten Multipols durch θ_i, ψ_i ($i = 1, 2, \ldots . n$), so wird nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\lambda_i = \cos\theta_i \cos\theta + \sin\theta_i \sin\theta \cos(\psi - \psi_i)$$

und

$$\lambda_{ik} = \cos\theta_i \cos\theta_k + \sin\theta_i \sin\theta_k \cos(\psi_i - \psi_k).$$

§ 3. Darstellung beliebiger elektrischer Systeme durch Multipole.

Es sei S' ein System von elektrischen Ladungen, die sich innerhalb einer Kugel K' vom Radius a' mit dem Mittelpunkt P' befinden. Das elektrische Potential φ von S' in einem Punkte P, der außerhalb der Kugel liegt, drückt sich dann durch die Summe aus

$$S' \frac{\varepsilon'}{Q'P},$$

wo $Q'P$ den Abstand der Ladung ε' vom Aufpunkt P bedeutet (dabei benutzen wir S' als Summationszeichen für die Ladungen des betrachteten Systems). Bezeichnet man die Koordinaten von ε' in bezug auf P', d. h. die Komponenten des Vektors $P'Q'$ in einem ganz beliebigen (rechtwinkligen) Koordinatensystem, durch ξ_1', ξ_2', ξ_3' und die entsprechenden Koordinaten von P' und P durch x_1', x_2', x_3' bzw. x_1, x_2, x_3, so wird

$$(Q'P)^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i' + \xi_i' - x_i)^2$$

und folglich nach dem *Taylor*schen Satz

$$\frac{1}{Q'P} = \frac{1}{R} + \sum_i \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i'} \xi_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i' \partial x_k'} \xi_i' \xi_k' + \frac{1}{3!} \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i' \partial x_k' \partial x_l'} \xi_i' \xi_k' \xi_l' + \cdots$$

wobei wie früher

$$R = \sqrt{\sum_i (x_i' - x_i)^2}$$

den Abstand $P'P$ bedeutet.

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in $\varphi = S' \frac{e'}{Q'P}$ bekommen wir für φ die folgende Reihe

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \cdots + \varphi^{(n)} + \cdots, \tag{6}$$

mit

$$\varphi^{(0)} = \frac{e'}{R}, \quad \varphi^{(1)} = \sum_i \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i'} e_i', \quad \varphi^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{i,k} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i' \partial x_k'} e_{ik}', \ldots \tag{6a}$$

wo die Koeffizienten e', e_i', e_{ik}', ... durch die Formeln

$$e' = S' \varepsilon', \quad e_i' = S' \varepsilon' \xi_i', \quad e_{ik}' = S' \varepsilon \xi_i' \xi_k, \ldots \tag{6b}$$

definiert sind.

Die Größe $\varphi^{(n)}$ wird das Potential n-ter Ordnung des betrachteten Systems genannt; wir werden sie in der Form

$$\varphi^{(n)} = \sum \frac{e'(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{\partial^n\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1'^{n_1} \partial x_2'^{n_2} \partial x_3'^{n_3}} \quad (n_1 + n_2 + n_3 = n) \tag{7}$$

schreiben, mit

$$e'(n_1, n_2, n_3) = S' \varepsilon' \xi_1'^{n_1} \xi_2'^{n_2} \xi_3'^{n_3} \tag{7a}$$

Für große Werte von n ist diese Schreibweise viel bequemer als die vorangehende (6a, 6b).

Da der Punkt P *außerhalb* der S' einschließenden Kugel liegt, d. h. die Abstände $P'Q'$ kleiner als $P'P = R$ sind, muß die Reihe (6) absolut und gleichmäßig konvergieren. Diese Reihe kann man ansehen als die Entwicklung von φ nach negativen Potenzen des Abstandes R. Und zwar ist $\varphi^{(n)}$ der $(n+1)$-ten Potenz von R umgekehrt proportional. Dementsprechend setzen wir

$$\varphi^{(n)} = \frac{H_n}{R^{n+1}}, \tag{8}$$

wo H_n nicht mehr von der Größe des Vektors $\mathfrak{R} = P'P$, sondern nur von seiner Richtung abhängt. Diese Abhängigkeit drückt sich durch die Formel

$$H_n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e'(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} [n_1, n_2, n_3] \tag{8a}$$

aus, wo

$$[n_1, n_2, n_3] = R^{n+1} \frac{\partial^n\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1'^{n_1} \partial x_2'^{n_2} \partial x_3'^{n_3}} \tag{8b}$$

die einfachsten Funktionen der betrachteten Art sind. Sie können direkt durch die Kosinusse $\lambda_i' = \frac{x_i - x_i'}{R}$ bestimmt werden.

Die Parameter (6b) oder (7a), welche die elektrischen Eigenschaften des betrachteten Systems bestimmen, mögen als „elektrische Momente" von der Ordnung $n = n_1 + n_2 + n_3$ (relativ zum gegebenen Achsen-

system) bezeichnet werden. Das Moment nullter Ordnung ist nichts anderes als die resultierende elektrische Ladung des Systems (e'); die Momente erster Ordnung sind die Komponenten eines Vektors, der dem Moment eines elementaren (mathematischen) Dipols im Punkte P' entspricht; die Momente zweiter Ordnung sind Komponenten eines Tensors, welcher einen elementaren Quadrupol bestimmt; in derselben Weise bedeuten die Momente n-ter Ordnung die Komponenten eines *symmetrischen Tensors n-ten* Ranges, der einem Multipol n-ter Ordnung entspricht.

Jeder Summand in dem Ausdruck (7) stellt nach (2a) das Potential eines Multipols n-ter Ordnung dar, dessen Achsen in drei zueinander senkrechte Richtungen fallen und dessen Moment gleich $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\,e'(n_1, n_2, n_3)$ ist. Die Anzahl dieser Summanden beträgt offenbar $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Wegen der Identität

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_2'^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_3'^2}=0$$

müssen aber zwischen den Funktionen $\frac{\partial^n\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1'^{n_1}\,\partial x_2'^{n_2}\,\partial x_3'^{n_3}}$ oder $[n_1, n_2, n_3]$ $\frac{n(n-1)}{2}$ identische Beziehungen von der Form $\frac{\partial^{n-2}\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1'^{k_1}\,\partial x_2'^{k_2}\,\partial x_3'^{k_3}}=0$,

d. h. $$[k_1+2, k_2, k_3]+[k_1, k_2+2, k_3]+[k_1, k_2, k_3+2]=0$$
$$(k_1+k_2+k_3=n-2)$$

bestehen. Mittels dieser Beziehungen ist es möglich, die $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Parameter $e'(n_1, n_2, n_3)$, welche $\varphi^{(n)}$ oder H_n bestimmen, durch

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=2n+1$$

unabhängige Parameter auszudrücken, und zwar in der Weise, daß (7) die Gestalt (5) (bei $n'=n$) annimmt, d. h. daß H_n in der Form einer Kugelfunktion n-ter Ordnung (5a), multipliziert mit einem passend gewählten Koeffizienten ($e'^{(n)}$) dargestellt wird. Denn die Anzahl der unabhängigen Parameter, welche das Potential eines Multipols n-ter Ordnung bestimmen, ist genau gleich $2n+1$ (je zwei Parameter für jede Achse $\mathfrak{a}_k'$, z. B. die Winkel θ_k, ψ_k, und das resultierende Moment $e'^{(n)}$).

Setzt man also

$$(\mathfrak{a}_k'\nabla')=\alpha_{k_1}'\frac{\partial}{\partial x_1'}+\alpha_{k_2}'\frac{\partial}{\partial x_2'}+\alpha_{k_3}'\frac{\partial}{\partial x_3'},$$

wo α_{k_1}', α_{k_2}', α_{k_3}' die Richtungskosinusse des Einheitsvektor $\mathfrak{a}_k'$ bedeuten ($\alpha'^2_{k_1}+\alpha'^2_{k_2}+\alpha'^2_{k_3}=1$), so ist es immer möglich, diese Richtungskosinusse

und den Parameter $e'^{(n)}$ so zu bestimmen, daß die Identität

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e'(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1'^{n_1} \partial x_2'^{n_2} \partial x_3'^{n_3}} = \frac{p'^{(n)}}{n!} (\mathfrak{a}_1' \nabla')(\mathfrak{a}_2' \nabla') \ldots (\mathfrak{a}_n' \nabla') \frac{1}{R}$$

besteht, d. h. daß man statt der wirklichen elektrischen Momente $e'(n_1, n_2, n_3)$ andere, nur $2n+1$ unabhängige Parameter enthaltende Momente von der Form

$$p(n_1 n_2 n_3) = p'^{(n)} \sum \overset{n_1}{\Pi} \alpha_{k_1, 1} \overset{n_2}{\Pi} \alpha_{k_2, 2} \overset{n_3}{\Pi} \alpha_{k_3, 3}$$

einführen kann.

Diese Tatsache kann man auch folgendermaßen aussprechen: das elektrische Feld eines beliebigen Systems von elektrischen Ladungen ist außerhalb einer es einschließenden Kugel vollkommen identisch mit dem Feld eines Systems von Multipolen verschiedener Ordnung, die im Mittelpunkt der Kugel konzentriert sind.

Die tatsächliche Bestimmung dieser Multipole mittels der Parameter $e'(n_1, n_2, n_3)$ ist im allgemeinen für $n > 1$ eine sehr schwierige Aufgabe, auf deren Lösung hier nicht eingegangen werden kann. Nur für $n = 0$ und $n = 1$ ist sie einfach lösbar. Und zwar gilt $e = S'\varepsilon'$, und ferner

$$\varphi^{(1)} = \sum_i \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i'} e_i' = \Sigma e_i' \nabla' \frac{1}{R} = (\mathfrak{p}' \nabla') \frac{1}{R},$$

wo $\mathfrak{p}'$ den Vektor mit den Komponenten $e_i' = S'\varepsilon'\xi_i'$ bedeutet, woraus folgt $p'^{(1)} = |\mathfrak{p}'|$ und $\mathfrak{a}' = \frac{\mathfrak{p}'}{|\mathfrak{p}'|}$.

Es sei bemerkt, daß nach dem oben bewiesenen Satz eine Anzahl beliebiger Multipole *derselben Ordnung*, die sich in *demselben Punkt* befinden, durch einen einzigen „resultierenden" Multipol ersetzt werden kann. Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes für elementare Dipole (Kap. I, § 3); es ist aber nicht möglich, eine einfache Vorschrift für die Bestimmung der Achsen und des Moments eines resultierenden Multipols n-ter Ordnung (bei $n > 1$) aus den Achsen und Momenten der einzelnen „Summanden" zu geben.

Es ist ferner zu beachten, daß die elektrischen Momente eines gegebenen Systems im allgemeinen *nicht eindeutig* bestimmt sind, sondern von der Wahl des Kugelmittelpunktes (P') abhängen. Das Moment n-ter Ordnung ist von dieser Wahl nur dann unabhängig, wenn die Momente aller niedrigen Ordnungen (d. h. die Parameter $p'^{(n-1)}, p'^{(n-2)}, \ldots p'^{(0)} = e'$) sämtlich verschwinden.

Ähnliche Resultate hinsichtlich der Darstellbarkeit des Feldes eines beliebigen elektrischen Systems durch Multipole verschiedener Ordnung lassen sich für die *potentielle Energie* eines solchen Systems in einem gegebenen äußeren Felde herleiten.

Es sei S ein System von elektrischen Ladungen (ε), die innerhalb einer Kugel K enthalten sind. Das System S', welches das betrachtete Feld erzeugt, soll sich dabei *außerhalb K* befinden. Dann muß das Potential dieses Feldes innerhalb K der *Laplace*schen Gleichung $\nabla^2\varphi = 0$ genügen.

Die potentielle Energie von S (bezüglich S') ist offenbar gleich der Summe der entsprechenden Energien für die einzelnen Ladungen, d. h.

$$U = S\varepsilon\varphi(Q),$$

wo $\varphi(Q)$ den Wert des Potentials in dem die Ladung ε enthaltenden Punkt Q bedeutet. Bezeichnet man die Koordinaten von Q relativ zu P (d. h. die Komponenten des Vektors PQ) mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und entwickelt $\varphi(Q)$ nach Potenzen von ξ_1, ξ_2, ξ_3, so ergibt sich die folgende Reihe für U

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \cdots + U^{(n)} \tag{9}$$

mit

$$U^{(0)} = e\varphi, \quad U^{(1)} = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} e_i, \quad U^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{ik} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} e_{ik}, \cdots \tag{9a}$$

und

$$e = S\varepsilon, \quad e_i = S\varepsilon\xi_i, \quad e_{ik} = S\varepsilon\xi_i\xi_k \tag{9b}$$

oder in anderer Schreibweise

$$U^{(n)} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \frac{\partial^n\varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}, \tag{10}$$

mit

$$e(n_1, n_2, n_3) = S\varepsilon\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_3^{n_3}. \tag{10a}$$

Die Parameter (9b) oder (10a) sind dieselben elektrischen Momente des betrachteten Systems, welche dessen eigenes Feld außerhalb K bestimmen. Wegen der *Laplace*schen Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 0$$

müssen zwischen den Ableitungen n-ter Ordnung von φ nach x_1, x_2, x_3 genau dieselben identischen Beziehungen gelten, wie zwischen den entsprechenden Ableitungen von R nach x_1', x_2', x_3' (siehe oben). Daraus folgt, daß die Energie n-ter Ordnung $U^{(n)}$ sich in der Form (3a)

$$U^{(n)} = \frac{p^{(n)}}{n!}(a_1\nabla)(a_2\nabla)\ldots(a_n\nabla)\varphi$$

darstellen läßt, d. h. mit der potentiellen Energie eines Multipols n-ter Ordnung in dem Kugelzentrum P identisch ist — und zwar *desselben Multipols*, welcher außerhalb der Kugel K ein mit den Potential n-ter Ordnung von S identisches Potential erzeugt. Zusammenfassend können wir also folgendes behaupten: ein beliebiges System von elektrischen Ladungen, das von den anderen Systemen durch eine (es enthaltende

und jene ausschließende) Kugelfläche getrennt werden kann, ist hinsichtlich seiner Wechselwirkung mit jenen Systemen vollständig äquivalent einer Anzahl von Multipolen verschiedener Ordnung, die im Kugelmittelpunkt konzentriert sind.

Bei der tatsächlichen Bestimmung der Wechselwirkung zweier solcher Systeme ist es aber zweckmäßiger, diese Multipole explizite nicht einzuführen, sondern mit den Ausdrücken zu operieren, welche das Potential des einen Systems (S') und die potentielle Energie der anderen (S) als Funktion der Komponenten ihrer elektrischen Momente $e'(n_1', n_2', n_3')$ bzw. $e(n_1, n_2, n_3)$ bestimmen (da diese Momente als *bekannte* Größe angesehen werden dürfen).

Setzen wir in (10a) $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots$ nach (6) und (7) ein, so erhalten wir für U die Doppelreihe

$$U = \Sigma U^{(n, n')}, \tag{11}$$

wobei $U^{(n, n')}$ derjenigen Form entspricht, die $U^{(n)}$ annimmt, wenn das Potential φ gleich $\varphi^{(n')}$ gesetzt wird.

Wegen der Beziehung

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_i'}$$

können wir mit Hilfe des Symbols (8b) schreiben:

$$U^{(n, n')} = \frac{(-1)^{n'}}{R^{n+n'+1}} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1'+n_2'+n_3'=n'}} \sum \frac{e(n_1, n_2, n_3) \cdot e'(n_1', n_2', n_3')}{n_1! n_2! n_3!} \frac{}{n_1'! n_2'! n_3'!} [n_1+n_1', n_2+n_2', n_3+n_3'] \tag{11a}$$

Bezeichnen wir den Koeffizienten von $\frac{1}{R^{n+n'+1}}$ in der angeführten Gleichung mit $H_{n, n'}$, und setzen

$$\sum_{n+n'=k} H_{n,n'} = I_k \tag{11b}$$

ein, so wird:

$$U = \frac{I_0}{R} + \frac{I_1}{R^2} + \frac{I_2}{R^3} + \cdots \tag{11c}$$

Es sei erinnert, daß U nicht bloß die Energie von S relativ zu S', sondern zugleich die Energie von S' relativ zu S darstellt (dieser Tatsache entspricht die Symmetrie von (11a) bezüglich „gestrichener" und „ungestrichener" Parameter). Diese *gegenseitige Energie* der beiden Systeme stellt sich nach (11c) dar in Form einer nach negativen Potenzen ihres gegenseitigen Abstandes — genauer des Abstandes der Mittelpunkte der sie einschließenden Kugelflächen — fortschreitenden Reihe, deren Koeffizienten von der Orientierung der beiden Systeme relativ zueinander und zu ihrer Verbindungslinie ($\mathfrak{R}$) abhängen (mit Ausschluß von I_0, das einfach gleich dem Produkte ee' der resultierenden Ladungen von S und S' ist).

Die Koeffizienten $H_{n,o}$, $H_{n,o}$, sind mit den früher eingeführten Kugelfunktionen H_n bzw. H_n, identisch [vgl. Formel (5)].

§ 4. Harmonisch konjugierte Systeme; elektrisches Potential innerhalb einer Kugel.

Zwei Punkte Q und Q' heißen „harmonisch konjugiert" in bezug auf die Kugelfläche K, wenn sie auf einer durch das Kugelzentrum P gehenden Geraden auf derselben Seite von P derart liegen, daß

$$\varrho\,\varrho' = a^2 \qquad (12)$$

ist, wo $\varrho = PQ$, $\varrho' = PQ'$ und a der Kugelradius ist.

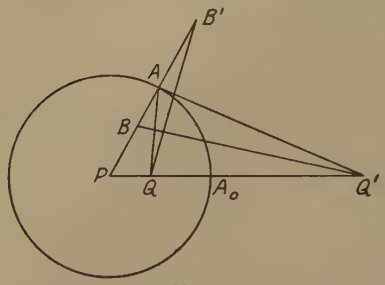

Abb. 27.

Der eine Punkt (z. B. Q) muß folglich innerhalb und der andere (Q') außerhalb K liegen. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden PQQ' mit der Kugeloberfläche durch A_0 (Abb. 27), so läßt sich (12) in der Form

$$\frac{PA_0}{PQ} = \frac{PQ'}{PA_0}$$

schreiben. Durch Subtraktion von 1 auf jeder Seite dieser Gleichung bekommen wir

$$\frac{PA_0 - PQ}{PQ} = \frac{PQ' - PA_0}{PA_0},$$

d. h.

$$\frac{QA_0}{PQ} = \frac{A_0Q'}{PA_0}$$

oder

$$\frac{QA_0}{Q'A_0} = \frac{\varrho}{a}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß diese Proportion nicht nur für den Punkt A_0, sondern für irgend einen Punkt A der Kugeloberfläche bestehen bleibt. Zum Beweis betrachten wir die Dreiecke PQA und $PQ'A$. Wegen $PA = a$ wird nach (12)

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PA}{PQ'}.$$

Da außerdem diese Dreiecke einen gemeinsamen Winkel (bei P) haben, müssen sie kongruent sein. Daraus aber folgt

$$\frac{QA}{PQ} = \frac{Q'A}{PQ'},$$

d. h.

$$\frac{QA}{Q'A} = \frac{\varrho}{a}, \qquad (12a)$$

Stellen wir uns also in Q und Q' zwei gleichnamige elektrische Ladungen ε und ε' vor, die zueinander in dem Verhältnis

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\varrho}{a} = \frac{a}{\varrho'} \tag{12b}$$

stehen, so müssen ihre Potentiale $\frac{\varepsilon}{QA}$ bzw. $\frac{\varepsilon'}{Q'A}$ *für alle Punkte* A der Kugeloberfläche *einander gleich sein.*

Es seien nun B und B' zwei harmonisch konjugierte Punkte auf der Geraden PA. Aus den Gleichungen $PB \cdot PB' = a^2$ und $PQ \cdot PQ' = a^2$ ergibt sich

$$\frac{PB}{PQ'} = \frac{PQ}{PB'},$$

Die Dreiecke PQB' und $PQ'B$ müssen folglich, da sie einen gemeinsamen Winkel bei P haben, auch kongruent sein. Es ist also $QB' : PB' = Q'B : Q'P$ und $QB' : PQ = Q'B : BP$, d. h. mit den Bezeichnungen $PB = R, PB' = R'$,

$$\frac{QB'}{Q'B} = \frac{R'}{\varrho'} = \frac{\varrho}{R}. \tag{13}$$

Bezeichnet man ferner die elektrischen Potentiale von ε in B' und ε' in B durch $\varphi' = \frac{\varepsilon}{QB'}$, bzw. $\varphi = \frac{\varepsilon'}{Q'B}$, so wird nach (13) und (12b)

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{R'}{a} = \frac{a}{R}. \tag{13a}$$

Diese Formel zeigt, daß das Verhältnis $\varphi' : \varphi$ unabhängig ist von der Richtung der Gerade PA_0, auf welcher die beiden „konjugierten Ladungen" sich befinden und von der Lage der letzteren auf dieser Geraden — insofern die Beziehung (12) erfüllt ist. Betrachtet man also ein beliebiges System S von Ladungen ε innerhalb der Kugel K, und das entsprechende „konjugierte" System S' von äußeren Ladungen ε', so müssen die Potentiale φ und φ', die von S' in B und S in B' erzeugt werden, ebenso wie die Potentiale der einzelnen konjugierten Ladungen miteinander in der Beziehung (13a) stehen.

Das Potential φ' läßt sich außerhalb K, nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen, in eine Reihe

$$\varphi' = \frac{H_0}{R'} + \frac{H_1}{R'^2} + \frac{H_2}{R'^3} + \cdots = \sum \frac{H_n}{R'^{n+1}},$$

entwickeln, wo $H_0, H_1, H_2 \ldots$ nur von der Richtung der Geraden PA abhängen. Dementsprechend bekommen wir für φ

$$\varphi = \frac{H_0}{a} + H_1 \frac{R}{a^3} + H_2 \frac{R^2}{a^5} \cdots = \sum H_n \frac{R^n}{a^{2n+1}}, \tag{14}$$

d. h. eine nach positiven Potenzen von R fortschreitende Reihe (wobei $R < a$ ist). Für den Grenzfall $R = R' = a$ fallen beide Reihen selbstverständlich zusammen.

Die Kugelfunktionen H_n sind nach (8a) bestimmt durch die elektrischen Momente $e'(n_1, n_2, n_3) = S\varepsilon\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_2^{n_3}$ des „inneren Systems" S. Man kann sie aber leicht durch die entsprechenden Parameter des „äußeren" Systems S' ausdrücken. Denn nach (12b) ergibt sich, wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 die Komponenten der Vektoren ϱ bzw. ϱ' bedeuten:

$$S\varepsilon\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\xi_3^{n_3} = S'\varepsilon' \begin{matrix} a \\ \varrho' \end{matrix} \left(\frac{a^2}{\xi'_1}\right)^{n_1} \left(\frac{a^2}{\xi'_2}\right)^{n_2} \left(\frac{a^2}{\xi'_3}\right)^{n_3},$$

d. h.

$$e'(n_1, n_2, n_3) = a^{2n+1} S' \frac{\varepsilon'}{\varrho'} \xi_1'^{-n_1}\xi_2'^{-n_2}\xi_3'^{-n_3}. \tag{14a}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel

$$H_n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e'(n_1,n_2,n_3)}{n_1!\,n_2!\,n_3!}[n_1, n_2, n_3] \tag{14b}$$

ein, so bekommt man nach (14) eine Darstellung des „inneren" Potentials φ, welche direkt von der Beschaffenheit des erzeugenden äußeren Systems abhängt. Dabei kann diese Beschaffenheit (d. h. die Lage und Größe der Ladungen ε') ganz beliebig sein, denn jedem äußeren System von Ladungen läßt sich immer ein konjugiertes inneres System zuordnen.

Durch Einsetzen von (14) in die Formeln (9) und (10), wobei S ein ganz beliebiges inneres System bedeuten mag, bekommt man einen neuen Ausdruck für die gegenseitige potentielle Energie der beiden Systeme S und S'. Diese neue Darstellung der Energie ist *allgemeiner* als die frühere, welche durch die Formeln (11) bis (11c) gegeben ist, denn die Reihe (11) konvergiert nur in dem Falle, daß S und S' durch *zwei* sich nicht schneidende Kugelflächen voneinander getrennt werden können (die Summe der Kugelradien $a + a'$ muß kleiner als der Abstand R ihrer Mittelpunkte sein). Dagegen ist die neue Darstellung — mit *einer* Kugelfläche — auch dann gültig, wenn die äußeren Ladungen ebenso wie die inneren beliebig nahe an der Kugeloberfläche K liegen.

Führt man anstatt $e'(n_1, n_2, n_3)$ die Parameter

$$E'(n_1, n_2, n_3) = S'\frac{\varepsilon'}{\varrho'}\xi_1'^{-n_1}\xi_2'^{-n_2}\xi_3'^{-n_3} \tag{15}$$

ein und ersetzt die Funktionen H_n durch

$$h_n = H_n a^{2n+1} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{E'(n_1,n_2,n_3)}{n_1!\,n_2!\,n_3!}[n_1, n_2, n_3] \tag{15a}$$

so bekommt man für φ den Ausdruck

$$\varphi = h_0 + h_1 R + h_2 R^2 + \cdots = \Sigma h_n R^n.$$

Dabei aber darf der Abstand R den Kugelradius nicht übersteigen: die Reihe (15b) ist im allgemeinen nur in dem Bereiche $R < a$ konvergent.

Die Koeffizienten dieser Reihe h_n sind Kugelfunktionen n-ter Ordnung, d. h. nach (5a) Polynome n-ten Grades der Richtungskosinus λ des Vektors $\mathfrak{R} = PB$. Daraus folgt, daß $h_n R^n$ eine ganze homogene Funktion n-ten Grades der Komponenten dieses Vektors ist, die wir durch x_1, x_2, x_3 bezeichnen wollen. (Diese Tatsache läßt sich auch direkt einsehen, wenn man beachtet, daß definitionsgemäß

$$[n_1, n_2, n_3] = R^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \text{ ist).}$$

Da die Ableitungen $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}$ in (10) sich auf den Kugelmittelpunkt ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) beziehen, darf man darin φ durch das einzige Glied $h_n R^n$ ersetzen; die anderen Glieder — von niederer und höherer Ordnung — geben zu den Ableitungen n-ter Ordnung keinen Beitrag. Dabei ergibt sich nach (10) und (15a)

$$U^{(n)} = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1'+n_2'+n_3'=n}} \sum \frac{e(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3} \frac{E'(n_1', n_2', n_3')}{n_1'!\, n_2'!\, n_3'!} [n_1, n_2, n_3; n_1', n_2', n_3'] \tag{16}$$

mit

$$[n_1, n_2, n_3; n_1', n_2', n_3'] = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \left(R^{2n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x_1^{n_1'} \partial x_2^{n_2'} \partial x_3^{n_3'}} \right) \right\}_{R=0} \tag{16a}$$

Die angeführte Darstellung der Energie ($U = U^{(0)} + U^{(1)} - \cdots$) hat zunächst gegen die frühere den Nachteil, die Abhängigkeit der Energie von der *Lage* des Systems S, d. h. des Mittelpunktes der es einschließenden Kugel, nicht zum Ausdruck zu bringen. — Falls das betrachtete System als Ganzes innerhalb dieser Kugel (d. h. ohne auf das äußere System zu stoßen) verschoben werden darf, läßt sich diese Abhängigkeit folgendermaßen bestimmen. Man denke sich S in einer möglichst kleinen Kugel K eingeschlossen. Der Mittelpunkt dieser Kugel sei nun P und der Mittelpunkt der sie enthaltenden großen Kugel sei O. Bezieht man die Koordinaten der äußeren Ladungen wie früher auf O und die der inneren auf P, so bleiben die Parameter $E'(n_1' n_2' n_3')$ unverändert, während statt der konstanten Parameter $e(n_1, n_2, n_3)$ die Größen

$$S\varepsilon(x_1 + \xi_1)^{n_1}(x_2 + \xi_2)^{n_2}(x_3 + \xi_3)^{n_3}$$

eingeführt werden müssen. Diese Funktionen sind Polynome n-ten Grades in x_1, x_2, x_3 (Koordinaten von P relativ zu O) deren Koeffizienten, von Zahlenfaktoren abgesehen, gleich den neuen (konstanten) Werten der elektrischen Momente von S sind.

Wie wir oben gesehen haben, kann man ein „inneres System" von elektrischen Ladungen durch eine Anzahl von Multipolen im Kugelmittelpunkt ersetzen. Dementsprechend ist es möglich, das konjugierte

äußere System S' (hinsichtlich des von ihm innerhalb der Kugel erzeugten Feldes) durch eine Anzahl von *unendlich entfernten Ladungen* zu ersetzen, die zu den gewöhnlichen Multipolen harmonisch konjugiert sind. Dabei entspricht einem Multipol n-ter Ordnung, der außerhalb der Kugelfläche K das Feld

$$\varphi' = p^{(n)} (a_1 \nabla)(a_2 \nabla) \ldots (a_n \nabla) \frac{1}{R'} = (-1)^n p^{(n)} \frac{Y_n}{R'^{n+1}}$$

erzeugt, ein System von unendlich fernen Ladungen die *innerhalb* K das Feld

$$\varphi' = (-1)^n p^{(n)} \frac{Y_n R^n}{a^{2n+1}}$$

erzeugen.

Z. B. entsprechen einem mathematischen Dipol zwei entgegengesetzte Ladungen, die auf demselben Durchmesser (in entgegengesetzten Richtungen) liegen, und innerhalb der Kugel das Potential

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}}{a^3}$$

bedingen. Dabei bedeutet $\mathfrak{p}$, wie üblich, das elektrische Moment des Dipols. Es sei bemerkt, daß dieses Potential einem *homogenen* Feld von der Stärke $\mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{p}}{a^3}$ entspricht.

§ 5. Äquivalente Flächenladung.

Aus den Ergebnissen der letzten zwei Paragraphen soll nun das Folgende beachtet werden: ein bestimmtes elektrisches Feld innerhalb oder außerhalb einer geschlossenen Fläche kann durch *verschiedene* Ladungsverteilungen außerhalb bzw. innerhalb dieser Fläche erzeugt werden.

Dieser Satz gilt allgemein für ganz beliebige geschlossene (oder unendliche) Flächen[1]) und ist eine direkte Folge des *Coulomb*schen Gesetzes oder der damit äquivalenten *Laplace*schen Gleichung. Man kann ferner beweisen, daß für *irgendeine* (wirkliche) Verteilung der elektrischen Ladungen auf einer Seite der betrachteten Fläche K eine äquivalente (d. h. dasselbe Feld auf der anderen Seite erzeugende) Verteilung der Elektrizität auf *dieser Fläche* selbst existiert. Die gegenseitige Energie zweier elektrischer Systeme S und S', die durch K voneinander getrennt sind, läßt sich also immer als die gegenseitige Energie zweier mit K zusammenfallender elektrisierter Flächen berechnen.

In dem Spezialfall einer Kugelfläche läßt sich dieser Satz ganz einfach beweisen. Es seien S und S' zwei *harmonisch konjugierte* Systeme (inneres und äußeres); dann fallen die von ihnen erzeugten Potentiale — äußeres φ' und inneres φ — auf der Kugelfläche selbst miteinander zu-

[1]) Eine unendliche Fläche, z. B. eine Ebene, kann als eine sich im Unendlichen schließende Fläche behandelt werden.

sammen. Man kann also sagen, daß diese Potentiale beim Durchgang durch die Oberfläche stetig ineinander übergehen. Es ist somit möglich, sie aufzufassen als die äußeren und inneren Werte des Potentials eines und desselben Systems von elektrischen Ladungen Σ. Da ferner außerhalb der Kugel die Gleichung $\nabla^2\varphi' = 0$ und innerhalb $\nabla^2\varphi = 0$ gilt, so können diese Ladungen nur auf der Grenzfläche K liegen. Ihr Vorhandensein muß sich durch einen Sprung der Normal- (d. h. Radial-)komponente der elektrischen Feldstärke beim Durchgang durch K äußern. Durch Anwendung der allgemeinen Formel $\oint E_n dS = 4\pi e$ auf einen unendlich kleinen Zylinder, welcher das Element dS der Kugelfläche enthält und dessen Seitenfläche dazu senkrecht steht (Abb. 28), bekommen wir bei festgehaltenem dS und bei verschwindender Höhe des Zylinders

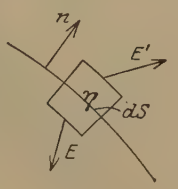

Abb. 28.

$$E_n' - E_n = 4\pi\eta, \tag{17}$$

wo $\eta = \frac{de}{dS}$ die Flächendichte der Elektrizität auf dem Element dS bedeutet, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}$ die elektrischen Feldstärken auf der äußeren und inneren Seite von dS und $\mathfrak{n}$ die von innen nach außen, d. h. in der Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{R}$ gezogene Normale[1]). Da $\mathfrak{E}' = -\nabla'\varphi'$ und $\mathfrak{E} = -\nabla\varphi$ ist, kann man die Formel (17) folgendermaßen schreiben:

$$\eta = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - \frac{\partial\varphi'}{\partial R'}\right)_{R=R'=a}.$$

Durch Einsetzen der Reihe (14) für φ und der entsprechenden Reihe für φ' bekommen wir

$$\eta = \sum_n \frac{2n+1}{4\pi a^{n+2}} H_n. \tag{17a}$$

Dies ist die gesuchte äquivalente Flächenverteilung der elektrischen Ladung, und zwar für jedes der beiden konjugierten Systeme S und S' im entsprechenden Raumgebiet. Für $n = 0$, $H_0 = e$ (Pol nullter Ordnung) ergibt sich speziell $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$, d. h. eine gleichförmige Verteilung der Ladung e. Wir bekommen also das bekannte Resultat, daß eine gleichförmig geladene Kugelfläche dieselbe äußere Wirkung ausübt, als ob die ganze Ladung in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre[2]). Für $n = 1$ und $H_1 = p\cos\theta$ (Dipol mit dem Moment $\mathfrak{p}$; θ-Winkel zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{R}$) wird ebenso

$$\eta = \frac{3}{4\pi}\frac{p\cos\theta}{a^2}. \tag{17b}$$

Die totale Ladung $\oint \eta\, dS$ ist dabei gleich null.

---

[1]) Vgl. die Formel (12), Kap. III, für die elektrische Feldstärke innerhalb einer *Doppelschicht*.

[2]) Dem äußeren Potential $\varphi' = \frac{e}{R'}$ entspricht dabei das innere $\varphi = \frac{e}{a} = \text{konst.}$

Wir nehmen nun an, daß die Systeme S und S' nicht konjugiert, sondern voneinander ganz unabhängig sind, wobei das innere durch die Kugelfunktionen H_n, das äußere durch H_n' charakterisiert wird. Dann kann man ihre gegenseitige Energie in der Form

$$U = \oint \varphi \eta \, dS$$

darstellen, wobei das Integral über die Kugelfläche erstreckt wird.

Mittels der Formeln (17a) und $\varphi = \sum \frac{H'_{n'}}{a^{n'+1}}$ (für $R = a$) bekommen wir ferner

$$U = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_n \sum_{n'} \frac{2n+1}{a^{n+n'+1}} \oint H_n H'_n \, dS \,. \tag{18}$$

Diese Darstellung der Energie muß offenbar identisch sein mit der Darstellung, die im letzten Paragraph angeführt war [siehe Formel (16)]. Daraus folgt aber, daß die doppelte Reihe (18) sich auf die einfache Reihe

$$U = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_n \frac{2n+1}{a^{2n+1}} \oint H_n H'_n \, dS \tag{18a}$$

reduzieren läßt, d. h., daß für $n' \neq n$

$$\oint H_n H'_{n'} \, dS = 0 \tag{18b}$$

ist. Diese Beziehung, die leicht direkt verifiziert werden kann, drückt die „Ortogonalitätseigenschaft" der Kugelfunktionen verschiedener Ordnung aus.

Wählt man eine beliebige Folge von Kugelfunktionen $H_0, H_1, H_2, \ldots$ die derart normiert sind, daß

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int H_n^2 \, dS = 1 \tag{19}$$

gilt, so kann man eine beliebige gegebene Verteilung der Elektrizität auf der Kugel η nach diesen Funktionen entwickeln, d. h. in der Form

$$\eta = \sum_0^\infty C_n H_n \tag{19a}$$

darstellen, wobei die Koeffizienten C_n sich nach der Formel

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int \eta H_n \, dS = \sum_p^\infty \frac{C_n}{4\pi a^2} \int H_n H'_n \, dS \,,$$

d. h.

$$C_n = \frac{1}{4\pi a^2} \int \eta H_n \, dS \,, \tag{19b}$$

berechnen lassen.

Wir gehen jetzt zum Beweis des am Anfang dieses Paragraphen formulierten allgemeinen Satzes über.

Es sei S eine geschlossene Oberfläche und φ' das Potential, welches außerhalb S durch ein inneres System von Ladungen erzeugt wird. Die Werte von φ' auf der Oberfläche selbst seien durch $\bar{\varphi}$ bezeichnet.

Damit φ' als das Potential einer Verteilung der Elektrizität auf S mit der Flächendichte η angesehen werden darf, muß eine Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ existieren, die das Potential derselben Ladungsverteilung *innerhalb S* darstellt. Diese Funktion muß offenbar den folgenden Bedingungen genügen:

1. *Innerhalb S* bleibt sie nebst ihrer ersten Ableitung ($\nabla\varphi =$ negative elektrische Feldstärke) stetig, während die zweite Ableitung verschwindet ($\nabla^2\varphi = 0$).

2. *Auf der Oberfläche S* nimmt φ die gegebenen Werte $\bar{\varphi}$ (d. h. die entsprechenden Oberflächenwerte von φ') an.

Man kann nun beweisen, daß eine solche Funktion sich immer (für beliebige Gestalt von S und beliebige $\bar{\varphi}$-Werte) — und zwar *auf eine eindeutige Weise* — auffinden läßt (*Dirichletsches Prinzip*).

Setzt man in der allgemeinen Formel $\oint F_n dS = \int \operatorname{div} \mathfrak{F} dV$ $\mathfrak{F} = \psi\nabla\varphi$ ein, so wird

$$\oint \psi \nabla_n \varphi dS = \int \psi \nabla^2 \varphi dV + \int \nabla\psi \cdot \nabla\varphi dV . \tag{20}$$

In dem Spezialfall $\psi = \varphi$ bekommen wir die schon früher benutzte Formel (5) Kap. III

$$\int (\nabla\varphi)^2 dV = + \int \varphi \nabla_n \varphi dS - \oint \varphi \nabla^2 \varphi dV , \tag{20a}$$

woraus sich ergibt, daß bei $\nabla^2\varphi = 0$ und $\bar{\varphi} = 0$,

$$\varphi = 0$$

im ganzen Volum V ist.

Wir sehen zunächst von der Bedingung $\nabla^2\varphi = 0$ ab und betrachten die Änderung ΔJ, welche das Integral $J = \oint (\nabla\varphi)^2 dV$ erfährt, wenn die Funktion φ durch $\varphi + \delta\varphi$ ersetzt wird.

Aus der Identität

$$(\nabla(\varphi + \delta\varphi))^2 = (\nabla\varphi)^2 + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi + (\nabla\delta\varphi)^2$$

folgt

$$\Delta J = 2\int \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi dV + \oint (\nabla\delta\varphi)^2 dV$$

oder nach (20) mit $\psi = \delta\varphi$

$$\Delta J = \int (\nabla\delta\varphi)^2 dV - 2\int \delta\varphi \nabla^2\varphi dV + 2\oint \delta\varphi \nabla_n \varphi dS . \tag{20b}$$

Setzt man nun innerhalb der Oberfläche S $\nabla^2\varphi = 0$ und vergleicht mit φ nur solche Funktionen $\varphi + \delta\varphi$, die auf S dieselben Werte $\bar{\varphi}$ wie φ annehmen, d. h. für welche $\delta\bar{\varphi} = 0$ ist, so bekommt man für ΔJ einen wesentlich positiven Wert. Die Bedingung $\nabla^2\varphi = 0$, durch welche

wir oben die gesuchte Potentialfunktion definierten, ist also völlig äquivalent mit der folgenden: die *Funktion φ soll das Integral J zum Minimum machen.* Daß unter allen Funktionen, welche auf S die gegebenen Randwerte $\bar{\varphi}$ annehmen, eine solche Funktion überhaupt existiert, darf als eine ganz einleuchtende Tatsache angesehen werden. Der Umstand, daß es nur *eine* solche Funktion gibt, läßt sich folgendermaßen einsehen: Wäre $\varphi + \delta\varphi$ eine andere Funktion derselben Art, so müßte $\delta\bar{\varphi} = 0$ und $\nabla^2(\delta\varphi) = 0$ sein; daraus aber würde nach (20a) folgen (wobei φ durch $\delta\varphi$ zu ersetzen ist), daß $\nabla(\delta\varphi)$ und $\delta\varphi$ im ganzen Volum V verschwinden.

Ist die Funktion φ gefunden, so kann man die gesuchte Flächendichte der Elektrizität auf S durch die Formel (17) definieren — ebenso wie in dem oben betrachteten Falle der Kugelfläche. Die tatsächliche Bestimmung dieser Funktion bildet aber im allgemeinen, d. h. für eine beliebige Gestalt von S und beliebige Randwerte $\bar{\varphi}$, eine sehr schwierige analytische Aufgabe.

§ 6. Die Greensche Funktion.

Diese Aufgabe läßt sich aber auf eine einfachere zurückführen — nämlich auf die Bestimmung einer Hilfsfunktion, die *nur* von der Gestalt der Oberfläche S abhängt, nicht aber von den Randwerten $\bar{\varphi}$; mittels dieser Funktion kann das Potential φ in der Form eines Flächenintegrals über S dargestellt werden.

Es sei P^* irgendein Punkt innerhalb S und Σ eine sehr kleine, diesen Punkt einschließende Oberfläche.

Erstreckt man die in der Formel (20) angedeutete Volumintegration nicht auf das ganze Volumen V, sondern nur auf den zwischen S und Σ liegenden Teil V^*, so ergibt sich auf der linken Seite von (20) die Differenz

$$\oint \psi \nabla_n \varphi \, dS - \oint \psi \nabla_\nu \varphi \, d\Sigma ,$$

wo ν die äußere Normale zu Σ bedeutet.

Vertauscht man in (20) die Funktionen φ und ψ und nimmt ferner an, daß innerhalb V^* beide, ebenso wie ihre Gradienten und zweiten Ableitungen, endlich bleiben, so bekommt man durch Substraktion

$$\oint (\psi \nabla_\nu \varphi - \varphi \nabla_\nu \psi) \, d\Sigma = \oint (\psi \nabla_n \varphi - \varphi \nabla_n \psi) \, dS - \int (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) \, dV^* . \tag{21}$$

In dem Spezialfall, daß $\nabla^2\varphi$ und $\nabla^2\psi$ innerhalb V^* verschwinden, ergibt sich somit:

$$\oint (\psi \nabla_\nu \varphi - \varphi \nabla_\nu \psi) \, d\Sigma = \oint (\psi \nabla_n \varphi - \varphi \nabla_n \psi) \, dS . \tag{21a}$$

Diese Gleichung ist selbstverständlich auch dann gültig, *wenn die Hilfsfunktion ψ ebenso wie $\nabla\psi$ und $\nabla^2\psi$ innerhalb der Fläche Σ unendlich wird.* Wir können z. B. $\psi = \frac{1}{R}$ setzen, wo R den Abstand des Punktes P^* von irgendeinem Punkte P des Volums V^* bedeutet. In der Tat, betrachtet man ψ als Funktion des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ von P, so bleibt sie und ihr Gradient $\nabla\psi$ innerhalb V^* endlich, während $\nabla^2\psi = 0$ ist. Wir gehen jetzt zum Grenzfall über, daß die Fläche Σ sich auf den Punkt P^* zusammenzieht. Dabei wird

$$\operatorname{Lim} \oint \psi \nabla_\nu \varphi \, d\Sigma = 0,$$

denn Σ nimmt quadratisch in R ab, und ferner

$$\operatorname{Lim} \int \varphi \nabla_\nu \psi \, d\Sigma = \varphi^* \cdot \operatorname{Lim} \oint \nabla_\nu \frac{1}{R} \, d\Sigma = -4\pi\varphi^*,$$

denn $\frac{1}{R}$ kann als das Potential einer Einheitsladung in P betrachtet werden[1]). Wir bekommen also nach (21)

$$\varphi^* = \oint \frac{1}{R} \frac{\nabla_n \varphi}{4\pi} \, dS - \oint \frac{\varphi}{4\pi} \nabla_n \frac{1}{R} \, dS. \tag{21b}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Formel stellt das Potential einer Flächenladung mit der Dichte $\frac{\nabla_n \varphi}{4\pi}$ dar, und das zweite das Potential einer Doppelschicht, deren elektrisches Moment pro Flächeneinheit $\frac{\varphi}{4\pi}$ beträgt (siehe Kap. III, § 9). Es ist leicht einzusehen, daß ein solches System im Außenraum das Potential *Null* (d. h. kein elektrisches Feld) erzeugen würde. Denn ersetzt man P^* durch einen außerhalb S liegenden Punkt P', so muß die Funktion $\psi = \frac{1}{R}$ (R = Abstand $P'P$) in dem ganzen von S eingeschlossenen Volum V endlich und stetig bleiben. In diesem Fall aber müssen die linke und rechte Seite von (21) verschwinden, denn die Integrale $\oint \psi \nabla_n \varphi \, dS$ und $\oint \varphi \nabla_n \psi \, dS$ werden zwei äquivalente Transformationen des Volumintegrals $\int (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi) \, dV$. Diese Tatsache kann man physikalisch auch so deuten: beim Durchgang durch die Doppelschicht mit dem (auf die Flächeneinheit bezogenen) Moment $\varkappa$ macht das Potential einen Sprung vom Betrage $4\pi\varkappa$. Ist nun auf der inneren Seite von S

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{\bar{\varphi}}{4\pi},$$

so muß auf der äußeren Seite $\varphi' = 0$ sein.

Die Formel (21a) ist zur Darstellung des Potentials φ im Innern von S aus dem Grunde nicht ganz geeignet, weil sie neben den Randwerten von φ (die gleich den entsprechenden Randwerten des äußeren Potentials φ'

[1]) φ^* bedeutet den Wert von φ im Punkte P^*.

sein müssen) noch die Randwerte des Gradientes $\nabla\varphi$ *innerhalb* S enthält — während diese Randwerte nur *außerhalb* S als bekannt angesehen werden dürfen. Um sich von diesen unbekannten Randwerten zu befreien, führt man in (21) statt $\frac{1}{R}$ eine andere Funktion ψ der beiden Argumente $\mathfrak{r}$ (Radiusvektor des Punktes P) und $\mathfrak{r}^*$, die für unendlich kleine Abstände PP^* mit $\frac{1}{R}$ identisch wird (bis auf belanglose endlich bleibende Glieder), für alle $\mathfrak{r}$ ebenso wie $\frac{1}{R}$ der *Laplace*schen Gleichung $\nabla^2\psi = 0$ genügt, und für solche $\mathfrak{r}$, die zu Punkten der Fläche S gehören, verschwindet. Dann bekommt man statt (21a) die Formel

$$\varphi(\mathfrak{r}^*) = -\frac{1}{4\pi}\oint \bar{\varphi}\,\nabla_n\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^*)\,dS, \tag{21c}$$

die zur Berechnung des Potentials im Innern von S aus seinen Randwerten dienen kann[1]). Die oben definierte Funktion $\psi(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}^*)$ heißt die *Green*sche Funktion der Fläche S. Man kann leicht beweisen, daß sie ebenso wie $\frac{1}{R}$ *symmetrisch* in den beiden Argumenten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ ist. Zum Beweis betrachten wir das Integral

$$\int \nabla\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}_1^*)\cdot\nabla\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}_2^*)\,dV^*,$$

wo $\mathfrak{r}_1^*$, $\mathfrak{r}_2^*$ zwei innerhalb S liegende Punkte bedeuten und V^* das von S einerseits und von diese Punkte einschließenden kleinen Flächen Σ_1 und Σ_2 andererseits begrenztes Volum ist. Dann ergibt sich mittels der Transformation (20) statt (21) die Gleichung

$$\oint(\psi_1\nabla_{\nu_1}\psi_2 - \psi_2\nabla_{\nu_1}\psi_1)\,d\Sigma_1 + \oint(\psi_1\nabla_{\nu_2}\psi_2 - \psi_2\nabla_{\nu_2}\psi_1)\,d\Sigma_2$$
$$= \oint(\psi_1\nabla_\nu\psi_2 - \psi_2\nabla_\nu\psi_1)\,dS,$$

wo zur Abkürzung $\psi_1 = \psi(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1^*)$ und $\psi_2 = \psi(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_2^*)$ gesetzt ist. Das

[1]) In dem einfachen Fall, wo das äußere Potential φ' durch eine Punktladung e, die sich im Punkte $P(\mathfrak{r})$ innerhalb S befindet, erzeugt wird, haben wir $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}' = \frac{e}{R}$ ($R = PP^*$), so daß die Formel (21) sich auf

$$\varphi(\mathfrak{r}) = -\frac{e}{4\pi}\oint\frac{1}{R}\nabla_n\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^*)\,dS$$

reduziert. Dies entspricht einer Flächenverteilung der Elektrizität mit der Dichte

$$\eta = -\frac{e}{4\pi}\nabla_n\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^*)$$

Dabei ist der totale Wert der äquivalenten Flächenladung

$$\oint\eta\,dS = -\frac{e}{4\pi}\oint\nabla_n\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^*)\,dS$$

wie leicht einzusehen, genau gleich e.

rechtsstehende Integral verschwindet wegen der Grenzbedingung $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = 0$, und die linksstehenden reduzieren sich im Limes $\Sigma_1 \to 0$ und $\Sigma_2 \to 0$ auf die Differenz

$$4\pi\psi_{2,1} - 4\pi\psi_{1,2} = 4\pi(\psi(\mathfrak{r}_2^*, \mathfrak{r}_1^*) - \psi(\mathfrak{r}_1^*, \mathfrak{r}_2^*)).$$

Es gilt also

$$\psi(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_1) = \psi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2). \tag{21d}$$

In dem Spezialfall der Kugelfläche hat die *Green*sche Funktion folgende Gestalt

$$\psi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = \frac{1}{R} - \frac{a}{r_1}\frac{1}{R'},$$

wo a den Kugelradius, $\mathfrak{r}_1$ den aus dem Kugelmittelpunkt gezogenen Radiusvektor des Punktes P_1, R den Abstand P_1P_2 und R' den Abstand $P_1'P_2$ bedeuten; dabei bezeichnet P_1' den zu P_1 konjugierten, außerhalb der Kugelfläche liegenden Punkt. In der Tat, liegt P_2 auf S, so muß $\psi(r_1, r_2)$ nach (12a) (da $QA = P_1P_2$, $Q'A = P_1'P_2$ und $\varrho = r$ ist) verschwinden. Ferner genügt ψ als Funktion von $\mathfrak{r}_2$ der *Laplace*schen Gleichung ($\nabla^2\psi = 0$) und fällt für $\mathfrak{r}_2 \to \mathfrak{r}_1$ mit $\frac{1}{R}$ praktisch zusammen. Unter Benützung der Beziehung $\mathfrak{r}_1' = \frac{a^2}{r_1^2}\mathfrak{r}_1$ [vgl. (12b)] kann man sich leicht von der Symmetrie bezüglich $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ überzeugen.

Im allgemeinen Fall einer beliebigen Fläche S ist die Bestimmung der *Green*schen Funktion in der Gestalt eines geschlossenen analytischen Ausdrucks unmöglich. Ist sie jedoch bekannt, so kann man die effektive Ladungsdichte auf S mittels der Formel

$$\eta = \frac{1}{4\pi}(\nabla_n\varphi - \nabla_n\varphi') = -\frac{1}{(4\pi)^2}\oint \bar{\varphi}\nabla_n\nabla_n^*\,\psi(\mathfrak{r},\mathfrak{r}^*)\,dS - \frac{1}{4\pi}\nabla_n\varphi'$$

berechnen. Damit lassen sich die Potentiale φ' und φ durch dasselbe Flächenintegral $\oint\frac{\eta}{R}dS$ darstellen.

Im Vorangehenden haben wir das äußere Potential als bekannt vorausgesetzt und das erzeugende innere Ladungssystem durch eine Flächenladung zu ersetzen versucht. Im umgekehrten Fall, wenn das Potential φ innerhalb S gegeben ist, und die es erzeugenden äußeren Ladungen durch eine äquivalente Flächenladung zu ersetzen sind, muß man zunächst für den Außenraum eine solche Potentialfunktion φ' aufsuchen, die der Gleichung $\nabla^2\varphi' = 0$ genügt und auf S mit φ identisch wird. Diese Aufgabe kann dadurch auf die früher betrachtete reduziert werden, daß man sich S durch eine sehr große äußere Fläche S' umschlossen denkt, die nachher ins Unendliche verschoben wird, während die Fläche Σ sich auf den betrachteten (äußeren) Punkt P^* zusammenzieht. Doch können wir auf diese Fragen hier nicht näher eingehen.

§ 7. Äquivalente Flächenströme.

In den vorigen Paragraphen haben wir von elektrischen Ladungen und elektrischen Feldern gesprochen. Die gewonnenen Resultate bleiben aber auch für magnetische Felder gültig, wenn man sich letztere durch fiktive magnetische Pole erzeugt denkt. Es ist aber leicht, von dieser Fiktion frei zu werden und die magnetischen Pole durch äquivalente elektrische Ströme zu ersetzen.

Im Falle der Multipole z. B. genügt es, Pole „nullter Ordnung" auszuschließen und solche „erster Ordnung", d. h. mathematische Dipole, als elementare Ströme zu behandeln. Dabei kann man das skalare Potential eines Multipols n-ter Ordnung $\varphi^{(n)}$ durch ein äquivalentes Vektorpotential $\mathfrak{A}^{(n)}$ ersetzen. Ist $\varphi^{(n)}$ in der Form $\varphi^{(n)} = (\mathfrak{a}_n \nabla)\varphi^{(n-1)}$ darstellbar, wo $\nabla^2 \varphi^{(n-1)} = 0$ ist, so ergibt sich einfach

$$\mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{c}_n \times \nabla \varphi^{(n-1)}, \tag{22}$$

denn dabei wird rot $A^{(n)} = -\nabla \varphi^{(n)}$ (vgl. § 8, Kap. III).

Die Einführung des Vektorpotentials statt des skalaren Potentials ist aber gewöhnlich unzweckmäßig.

Bei der Betrachtung des durch ein inneres (oder äußeres) Stromsystem erzeugten magnetischen Feldes außerhalb (bzw. innerhalb einer geschlossenen Fläche S, kann man statt der äquivalenten Flächenverteilung der „magnetischen Ladungen" einen äquivalenten *Flächenstrom* einführen. Die Flächendichte dieses Stromes läßt sich auf dieselbe Weise bestimmen, wie die Dichte der Flächenladung. Wendet man die allgemeine Formel

$$\oint \mathfrak{n} \times \mathfrak{H} dS = \int \text{rot}\, \mathfrak{H}\, dV = 4\pi \int \mathfrak{j} dV$$

auf einen unendlich kleinen Zylinder an, der das Element dS der betrachteten Fläche enthält und dessen Grundflächen diesem Elemente parallel und gleich sind, so bekommt man im Grenzfalle verschwindender Höhe des Zylinders:

$$4\pi \mathfrak{k} = \mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}). \tag{23}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{k}$ die Flächendichte des elektrischen Stromes (nach $\int \mathfrak{k} dS = \int \mathfrak{j} dV$); $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}$ sind die magnetischen Feldstärken auf der äußeren und inneren Seite von dS.

Es ist zu beachten, daß die der Formel (23) zugrunde liegende Beziehung zwischen $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}$ eine ganz andere als die entsprechende Beziehung zwischen den elektrischen Feldstärken $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}$ ist. In der Tat, da das magnetische Feld im ganzen Raum der Gleichung div $\mathfrak{H} = 0$ genügt, muß das innere Produkt

$$\mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}) = 0 \tag{23a}$$

sein, d. h. die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke kann

beim Durchgang durch die Oberfläche S *keinen* Sprung machen. Dagegen gilt für die elektrische Feldstärke in diesem Falle die Gleichung (17), die wir auch in der Form

$$\mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}) = 4\pi\eta \tag{23b}$$

schreiben können, und außerdem die Gleichung

$$\mathfrak{n} \times (\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}) = 0, \tag{23c}$$

welche dem Verschwinden der Rotation des Vektors $\mathfrak{E}$ im ganzen Raum entspricht, und die Tatsache ausdrückt, daß die tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke keine Unstetigkeit auf S besitzt.

Will man also das gegebene äußere Feld $\mathfrak{H}'$, das durch ein unbekanntes inneres Stromsystem erzeugt wird, als das Feld eines auf S verteilten Flächenstromes deuten, so muß das Feld innerhalb S derart bestimmt sein, daß die Bedingung (23a) erfüllt wird.

Wenn das äußere Feld sich mittels eines skalaren Potentials φ' darstellen läßt[1]), kann man das entsprechende „konjugierte" innere Feld $\mathfrak{H}$ auch aus einem skalaren Potential φ ableiten. Dabei muß φ innerhalb S der *Laplace*schen Gleichung genügen ($\nabla^2 \varphi = 0$), und auf der Oberfläche selbst der Bedingung

$$\nabla_n \varphi = \nabla_n \varphi' \tag{24}$$

die jetzt die frühere Bedingung $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'$ ersetzt. Da ferner das magnetische Feld quellenfrei ist, muß das Integral

$$\oint \nabla_n \varphi \, dS = 0 \tag{24a}$$

sein. Was die Bedindung $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}'$ anbetrifft, so kann sie in dem betrachteten Fall *nicht* bestehen, d. h. auf der Oberfläche S muß das Potential einen Sprung

$$\overline{\varphi}' - \varphi = 4\pi i_m \tag{24b}$$

erleiden. Dies entspricht einer magnetischen *Doppelschicht* mit der Dichte (Moment pro Flächeneinheit) i_m. Wäre diese Größe bekannt, so könnte man die beiden Potentiale φ und φ' durch das Integral

$$\oint i_m \nabla_n \left(\frac{1}{R}\right) dS \tag{24c}$$

darstellen.

Wir wollen hier nur den einfachsten Fall behandeln, daß S eine Kugelfläche ist. Dann kann man φ' in der Form

$$\varphi' = \sum_n \frac{H_n}{R'^{n+1}} \tag{25}$$

darstellen, wobei die Koeffizienten H_n als bekannt anzusehen sind.

[1]) Das ist immer dann der Fall, wenn die magnetischen Kraftlinien sich nicht außerhalb S schließen.

Setzt man dementsprechend

$$\varphi = \sum_n \frac{H'_n}{a^{2n+1}} R^n , \tag{25a}$$

so lassen sich die zunächst unbekannten Koeffizienten H'_n durch die aus (24) folgende Beziehung

$$\sum \frac{n H'_n}{a^{2n+1}} R^{n-1} = - \sum \frac{(n+1) H_n}{R'^{(n+2)}} , \text{ bei } R' = R = a ,$$

d. h.

$$H'_n = - \frac{n+1}{n} H_n \tag{25b}$$

ermitteln. Dem entspricht nach (24b) die Formel $4\pi i_m = - \sum \frac{2n+1}{n a^{n+1}} H_n$.

Reduziert sich (25) auf das Glied erster Ordnung ($\varphi^{(0)}$ muß immer gleich null sein), d. h. hat man

$$\varphi' = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{R}'}{R'^3} ,$$

so wird nach (25b) und (25a)

$$\varphi = - \frac{2\mathfrak{m}\mathfrak{R}}{a^3} .$$

Daraus folgt, daß innerhalb der Kugel ein homogenes magnetisches Feld $\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{m}}{a^3}$ herrscht, während außerhalb

$$\mathfrak{H}' = \frac{1}{R'^3} [- \mathfrak{m} + 3\mathfrak{R}'(\mathfrak{m}\mathfrak{R}')]$$

ist. Den skalaren Potentialen φ' und φ entsprechen nach (22) die Vektorpotentiale

$$\mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{R}'}{R'^3} , \quad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{R}}{a^3} .$$

Für die Flächendichte $\mathfrak{k}$ des Stromes in einem Punkte der Kugel mit dem Radiusvektor $\mathfrak{a}$ bekommen wir nach (23)

$$\mathfrak{k} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{a}}{a^4} .$$

Diese Formel zeigt, daß das betrachtete Feld durch Rotation der Kugelfläche erzeugt werden kann, falls letztere gleichförmig elektrisiert ist. In der Tat, bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit mit $\mathfrak{o}$ und die (konstante) Flächendichte der elektrischen Ladung durch η, so muß die Stromdichte in dem Punkte $\mathfrak{a}$ durch die Formel

$$\mathfrak{k} = \frac{\eta}{c} \mathfrak{o} \times \mathfrak{a}$$

ausgedrückt werden (denn $\mathfrak{o} \times \mathfrak{a}$ ist die Lineargeschwindigkeit des entsprechenden Flächenelementes). Aus dem Vergleich dieser Formel mit der vorhergehenden ergibt sich die Relation

$$\mathfrak{m} = \frac{4\pi}{3} a^4 \frac{\eta}{c} \mathfrak{o} ,$$

die nichts anderes ausdrückt, als daß $\mathfrak{m}$ das resultierende magnetische Moment der rotierenden geladenen Kugel ist. Und zwar gilt definitionsgemäß

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2} \oint \mathfrak{a} \times \mathfrak{k} \, dS,$$

was wegen $\mathfrak{k} = \frac{\eta}{c} \mathfrak{o} \times \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \times \mathfrak{k} = \frac{\eta}{c} \left\{ \mathfrak{o} \, a^2 - \mathfrak{a} \, (\mathfrak{a} \, \mathfrak{o}) \right\}$ mit der angeführten Formel identisch ist.

§ 8. Induzierte elektrische und magnetische Momente.

Zum Schluß dieses Kapitels müssen wir noch kurz die Frage betrachten, welche Änderung die reellen elektrischen (bzw. magnetischen) Systeme durch die Wirkung von äußeren Feldern erleiden. Dabei verstehen wir unter einem „reellen System" irgendwelche materielle Körper oder Teilchen, die aus einer Anzahl von positiven und negativen Elektronen bestehen. Wie wir oben gesehen haben, können solche Systeme immer durch eine Menge von Multipolen verschiedener Ordnung ersetzt werden. Bisher haben wir diese Multipole als „gegeben", d. h. unveränderlich oder *fest* behandelt. Ebenso aber wie die reellen festen Körper in mechanischer Hinsicht nicht absolut fest sind, sondern unter dem Einfluß von äußeren Kräften kleine *Deformationen* erleiden, sind sie in elektrischer (und magnetischer) Hinsicht auch nicht absolut fest. Führt man irgendeinen Körper in ein äußeres elektrisches Feld ein, so müssen die entgegengesetzten Ladungen, welche in diesem Körper stecken, entgegengesetzt gerichtete Kräfte erfahren; diese Kräfte müssen kleine Verschiebungen der geladenen Teilchen hervorrufen, bis die dadurch bedingten *inneren* elektrischen Kräfte (die analog den elastischen Spannungen sind) den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten.

Die angedeutete „elektrische Deformation" eines Körpers pflegt man als *Polarisation* zu bezeichnen. Phänomenologisch kann man sie durch die Änderung der elektrischen Momente des Körpers $e(n_1, n_2, n_3)$ charakterisieren oder durch die zusätzlichen Multipole verschiedener Ordnung, welche zu den „normalen" Multipolen hinzugefügt werden müssen, damit die veränderten „deformierten" Multipole entstehen.

Gewöhnlich berücksichtigt man nur die Änderung der Momente (oder Multipole) *erster* Ordnung; dabei nimmt man an, in Analogie zum *Hooke*schen Gesetze für elastische Deformationen, daß die zusätzlichen oder „induzierten" elektrischen Momente der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ (des äußeren Feldes) proportional sind.

Da die elektrischen Momente erster Ordnung e_1, e_2, e_3 nichts anderes sind als die Komponenten des Dipolmomentes, welches dem Multipol 1-ter Ordnung entspricht, so kann man die erwähnten zusätzlichen Momente, welche wir durch p_1, p_2, p_3 bezeichnen werden, als die Komponenten des induzierten Dipolmomentes $\mathfrak{p}$ betrachten, das die elektrische

Polarisation des betreffenden Körpers mißt. Die einfachste lineare Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{E}$ drückt sich durch die Formel

$$\mathfrak{p} = \alpha \mathfrak{E} \tag{26}$$

aus. Diese Formel besagt, daß $\mathfrak{p}$ mit dem Vektor $\mathfrak{E}$ gleichgerichtet und ihm proportional ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß der „Polarisationskoeffizient" α eine wesentlich positive Größe ist. Dies bedeutet, daß die positiven und negativen Ladungen in der Richtung der auf sie wirkenden äußeren Kraft verschoben werden.

Die Formel (26) entspricht dem *Hooke*schen Gesetz für gewöhnliche *isotrope* Körper. Ein Körper, für welchen diese Formel gültig ist, heißt „elektrisch isotrop". Im allgemeinen Falle eines elektrisch anisotropen Körpers muß man (26) durch die Formel

$$p_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} E_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{26a}$$

ersetzen, wo die α_{ik} die Komponenten des sogenannten „Polarisationstensors" ${}^2\alpha$ in bezug auf das betrachtete Koordinatensystem darstellen. Für ein im Körper festes Koordinatensystem sind diese Komponenten als konstante, den Körper charakterisierende Parameter anzusehen.

Der Polarisationstensor darf im allgemeinen als *symmetrisch* behandelt werden. Dementsprechend läßt sich das Koordinatensystem immer so wählen, daß die nichtdiagonalen Komponenten von ${}^2\alpha$ sämtlich verschwinden (vgl. Einleitung). Dabei reduziert sich (26a) auf

$$p_1 = \alpha_{11} E_1, \quad p_2 = \alpha_{22} E_2, \quad p_3 = \alpha_{33} E_3. \tag{26b}$$

Die potentielle Energie eines festen Dipols mit dem Moment $\mathfrak{p}$ relativ zu dem das Feld $\mathfrak{E}$ erzeugenden System ist bekanntlich gleich $-\mathfrak{p}\mathfrak{E}$. Ist das Moment $\mathfrak{p}$ durch das Feld selbst induziert, so muß man noch die Arbeit, welche gegen die inneren Kräfte geleistet wird, berücksichtigen. Da diese inneren Kräfte *linear* mit $\mathfrak{p}$ anwachsen, und das Feld $\mathfrak{E}$ kompensieren, so ist die erwähnte Arbeit durch die Formel

$$U' = \frac{1}{2} \mathfrak{p}\mathfrak{E}$$

ausgedrückt[1]). Die Größe U' kann man als die *innere* Energie des polarisierten Körpers deuten; sie entspricht der inneren elastischen Energie eines mechanisch deformierten Körpers. Will man die zusätzliche mechanische Wirkung berechnen, welche von der Polarisation herrührt, so ist als Energiefunktion *nicht* $-\mathfrak{p}\mathfrak{E}$, wie bei den festen Dipolen, sondern die Summe $-\mathfrak{p}\mathfrak{E} + U'$, d. h.

$$U = -\frac{1}{2} \mathfrak{p}\mathfrak{E} = -U' \tag{27}$$

[1]) Wir denken uns $\mathfrak{p}$ als die Länge eines Dipols, der aus einer festen negativen Ladung -1 und einer verschiebbaren positiven Ladung $+1$ besteht. Die auf letztere wirkende innere elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ ist proportional der Verschiebung $\mathfrak{p}$. Daher bekommen wir für die bei der Polarisation aufgewandte Arbeit $\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}\mathfrak{p}$.

zu betrachten. Dies läßt sich auch direkt einsehen, indem man von den auch hier gültigen Ausdrücken für die Drehkraft $\mathfrak{p} \times \mathfrak{E}$ oder Kraft $(\mathfrak{p}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E}$ ausgeht und die entsprechende Energiefunktion in üblicher Weise definiert, unter Berücksichtigung der Proportionalität zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{E}$. Setzten wir der Einfachheit halber $\mathfrak{p} = \alpha\,\mathfrak{E}$ nach (26), so wird $(\mathfrak{p}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E} = \alpha\,(\mathfrak{E}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\,\alpha\,\mathrm{grad}\,E^2 = -\,\mathrm{grad}\,U$, woraus folgt

$$U = -\frac{1}{2}\,\alpha E^2. \tag{27a}$$

Es sei bemerkt, daß in diesem Spezialfalle (elektrische Isotropie) die Drehkraft verschwindet; im allgemeinen Falle, wenn die Hauptkomponenten des Polarisationstensors $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ voneinander verschieden sind, drücken sich die Komponenten des Drehmoments nach (26b) aus durch

$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{E})_1 = (\alpha_{22} - \alpha_{33})\,E_2\,E_3 \text{ usw.}$$

Wir stellen uns zum Beispiel vor, daß ein kleines kugelförmiges Teilchen, dessen normale elektrischen Momente alle gleich null sind, sich im Abstande R von einem anderen geladenen Teilchen befindet. Ist die Ladung des letzten gleich ε, so hat man $E = \frac{\varepsilon}{R^2}$, und folglich

$$U = -\frac{\alpha\varepsilon^2}{2R^4}.$$

Dieser Energiefunktion entspricht eine Anziehungskraft

$$f = -\frac{2\alpha\varepsilon^2}{R^5},$$

welche der fünften Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist. Mit solchen Kräften hat man zu tun bei den elementaren Versuchen über die Anziehung, welche ein geladener Körper auf benachbarte neutrale Teilchen ausübt. Ist das Feld $\mathfrak{E}$ durch einen Körper erzeugt, der keine Ladung, sondern ein natürliches Dipolmoment $\mathfrak{m}$ besitzt, so wird nach (26a) und (26b), Kap. III

$$E^2 = \frac{m^2}{R^6}\,(1 + 3\cos^2\theta),$$

woraus folgt

$$U = -\frac{\alpha m^2}{2R^6}\,(1 + 3\cos^2\theta)$$

und wegen

$$m^2\cos^2\theta = (\mathfrak{m}\mathfrak{R})^2/R^2 = (\mathfrak{m}\mathfrak{R}_0)^2,$$

$$\mathfrak{f} = -\frac{3\alpha}{R^7}\,(\mathfrak{R}_0 m^2 + \tfrac{4}{3}\,\mathfrak{R}_0\,(\mathfrak{m}\mathfrak{R}_0)^2 - \mathfrak{m}(\mathfrak{R}_0\mathfrak{m})$$

oder schließlich

$$\mathfrak{f} = -\frac{3\alpha}{R^7}\left\{\mathfrak{m} \times (\mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{m}) - \frac{4\alpha}{R^7}\,\mathfrak{R}_0\,(\mathfrak{m}\mathfrak{R}_0)^2\right\}.$$

Wir haben also in diesem Fall, welcher z. B. bei der Wirkung eines elementaren Stromes (oder Magnets) auf eiserne Feilspäne realisiert

ist, eine der 7ten Potenz dem Abstand umgekehrt proportionale Anziehungskraft.

Es sei bemerkt, daß für irgendeine Beschaffenheit des felderzeugenden Systems die Kraft $\mathfrak{f} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\alpha E^2\right)$ immer einer Anziehung entsprechen muß, und zwar in der Richtung des raschesten Anwachsens von E^2 (vorausgesetzt, daß $\alpha > 0$ ist); diese Richtung stimmt im allgemeinen mit der Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{R}$ nicht überein.

Die Formel (26) läßt sich in der Gestalt

$$p_i = -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

schreiben. Es scheint natürlich, diese Beziehung für die induzierten Momente höherer Ordnung folgendermaßen zu verallgemeinern

$$p(n_1, n_2, n_3) = -\alpha^{(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}. \tag{28}$$

Dabei ist die rechtsstehende Ableitung des Potentials für *den* Punkt P des betrachteten Körpers zu berechnen, in bezug auf welchen die Momente $e(n_1, n_2, n_3)$ und $p(n_1, n_2, n_3)$ bestimmt worden sind.

Dieser Ansatz ist aber kaum zulässig, da die induzierten Momente verschiedener Ordnung (ebenso wie die natürlichen) miteinander durch bestimmte von der Struktur des betreffenden Systems abhängige Beziehungen verknüpft sein müssen. Diese Beziehungen lassen sich durch den allgemeinen Ansatz berücksichtigen.

$$p(n_1, n_2, n_3) = -\sum_{n_1', n_2', n_3'} \alpha(n_1, n_2, n_3; n_1', n_2', n_3') \frac{\partial^{n'} \varphi}{\partial x_1^{n_1'} \partial x_2^{n_2'} \partial x_3^{n_3'}}$$

wo die Koeffizienten $\alpha(n_1, n_2, n_3; n_1', n_2', n_3')$ einen Polarisationstensor vom Range $n + n' = n_1 + n_2 + n_3 + n_1' + n_2' + n_3'$ bilden. Beiden Ausdrücken (28) und (28a) für die Komponenten der „Polarisation n-ter Ordnung" muß eine Energie

$$U = \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} \frac{1}{2} p(n_1 n_2 n_3) \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \tag{28a}$$

entsprechen.

Doch können wir auf diese Frage hier nicht näher eingehen.

Zweiter Abschnitt.

Die von der Zeit abhängigen elektromagnetischen Wirkungen.

Fünftes Kapitel.

Die allgemeinen Gesetze des elektromagnetischen Feldes.

§ 1. Die elektromagnetische Induktion in einem zeitlich konstanten Feld.

Im Kapitel II haben wir gefunden, daß eine elektrische Ladung e (genauer ein elektrisiertes Teilchen), welche sich in einem zeitlich konstanten magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, eine Kraft $\mathfrak{f} = \frac{e}{c}\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}$ erfährt. Diese *elektrokinetische* oder *elektromagnetische Kraft*, bezogen auf die positive Ladungseinheit ($e = 1$) ist also gleich

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}\,. \tag{1}$$

Da die Kraft $\mathfrak{f}$ senkrecht zur Geschwindigkeit der entsprechenden geladenen Teilchen steht, kann sie bei der Bewegung der letzteren *keine Arbeit leisten*. Der obige Ausdruck für $\mathfrak{f}$ ist aber abgeleitet worden aus der Änderung der potentiellen Energie eines linearen Stromes bei einer infinitesimalen (virtuellen) Verschiebung der Stromlinie, indem diese Änderung der Arbeit gleichgesetzt wurde, welche die auf die Stromelemente wirkenden elektromagnetischen Kräfte leisten. Dieser scheinbare Widerspruch läßt sich folgendermaßen lösen.

Bei der Bewegung einer Stromlinie σ setzt sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der elektrischen Ladungen, die sich momentan im Elemente $d\sigma$ befinden, aus *zwei* Anteilen zusammen: ihrer „relativen" Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ bezüglich $d\sigma$ und der „absoluten" Geschwindigkeit $\mathfrak{v}''$, mit welcher $d\sigma$ (parallel zu sich selbst) verschoben wird. Wir haben im Kapitel II bei der Ableitung der elementaren elektromagnetischen Kraft nur die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ berücksichtigt, welche die Stromstärke i nach der Formel

$$\sum \frac{e\,\mathfrak{v}'}{c} = i\,\tau\,d\sigma$$

bestimmt (wobei die Summation auf alle in $d\sigma$ befindlichen Ladungen

erstreckt wird). Dieser relativen oder *longitudinalen* Geschwindigkeit entsprechen *transversale* elektromagnetische Kräfte $\mathfrak{f}' = \frac{e}{c}\mathfrak{v}' \times \mathfrak{H}$, die in Summa den bekannten Ausdruck

$$\sum \mathfrak{f}' = \sum \frac{e}{c}\mathfrak{v}' \times \mathfrak{H} = \left(\sum \frac{e\,\mathfrak{v}'}{c}\right) \times \mathfrak{H} = i\tau\, d\sigma \times \mathfrak{H}$$

für die auf das Element $d\sigma$ einer ruhenden Stromlinie wirkende Kraft ergeben.

Was die Kräfte $\mathfrak{f}'' = \frac{e}{c}\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H}$, anbetrifft, welche von der Mitführung der Ladungen mit dem Stromlinienelement $d\sigma$ herrühren, so muß ihre Resultierende für dieses Element — sofern das letztere elektrisch neutral ist — verschwinden, denn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}''$ ist für die positiven und negativen Ladungen dieselbe:

$$\sum \mathfrak{f}'' = \sum \frac{e}{c}\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H} = \left(\sum e\right)\left(\frac{\mathfrak{v}''}{c} \times \mathfrak{H}\right) = 0.$$

Bei einer Verschiebung $\mathfrak{v}''\,dt$ des Stromlinienelementes $d\sigma$ wird durch die auf diese wirkenden transversalen elektromagnetischen Kräfte die Arbeit

$$dA = \sum \mathfrak{f}'\,\mathfrak{v}''\,dt = (i\tau\, d\sigma \times \mathfrak{H})\,\mathfrak{v}''\,dt$$

geleistet.

In derselben Zeit dt erfahren aber die (ursprünglich) in $d\sigma$ steckenden Ladungen longitudinale Verschiebungen $\mathfrak{v}'\,dt$, welche für positive und negative Ladungen verschieden sein müssen (sonst würde die Stromstärke gleich Null sein). Diesen longitudinalen Verschiebungen entspricht eine von Null verschiedene Arbeit dB der Kräfte $\mathfrak{f}''$ (welche bei senkrechter Verschiebung von $d\sigma$ auch longitudinal, d. h. parallel zu $d\sigma$ gerichtet sind). Obwohl die Totalkraft $\Sigma \mathfrak{f}'' = 0$ ist, bekommen wir für die resultierende Arbeit einen von Null verschiedenen Ausdruck:

$$dB = \sum \mathfrak{f}'' \cdot \mathfrak{v}'\,dt = \sum \frac{e}{c}(\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H})\,\mathfrak{v}'\,dt = \frac{1}{c}[(\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H}) \sum e\mathfrak{v}']\,dt,$$

d. h. nach (1)

$$dB = (\mathfrak{F}'' \cdot ci\tau)\,d\sigma\,dt = ci F_\tau''\,d\sigma\,dt, \qquad (2)$$

wo $\mathfrak{F}'' = \frac{1}{c}\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H}$ die Komponente der auf die Ladungseinheit bezogenen elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{F}$, welche von der Mitführungsbewegung von $d\sigma$ herrührt, und $F_\tau'' = F_\tau$ ihre longitudinale Projektion (auf die Stromrichtung) bedeutet.

Die Summe der Arbeiten dA und dB muß offenbar der Gesamtarbeit der elektromagnetischen Kräfte $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' + \mathfrak{f}''$, welche auf die einzelnen Ladungen in $d\sigma$ wirken, bei der entsprechenden Gesamtverschiebung $\mathfrak{v}\,dt = \mathfrak{v}'\,dt + \mathfrak{v}''\,dt$ gleich sein. Da die Vektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{v}$ zueinander senkrecht sind, so folgt, daß $dA + dB = 0$ ist.

Diese Beziehung läßt sich auch unmittelbar aus der Gleichung $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} = 0$ ableiten. — Wegen

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{H} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}''$$

hat man:

$$\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} = \left[\frac{e}{c}(\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H})\right](\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'') = \frac{e}{c}(\mathfrak{v}' \times \mathfrak{H})\mathfrak{v}'' + \frac{e}{c}(\mathfrak{v}'' \times \mathfrak{H})\mathfrak{v}' = \mathfrak{f}'\mathfrak{v}'' + \mathfrak{f}''\mathfrak{v}',$$

und folglich $\Sigma \mathfrak{f}'\mathfrak{v}'' dt + \Sigma \mathfrak{f}''\mathfrak{v}' dt = 0$, d. h.

$$dA + dB = 0.$$

Die gewonnenen Ergebnisse können folgendermaßen formuliert werden:

Bei der Bewegung einer Stromlinie in einem zeitlich konstanten magnetischen Feld, wird eine longitudinale elektromagnetische Kraft (F_τ) erzeugt, die auf entgegengesetzte Ladungen nach entgegengesetzten Richtungen wirkt, und deren Arbeit entgegengesetzt gleich ist der Arbeit der transversalen elektromagnetischen Kräfte, welche auf die Stromlinienelemente wirken.

Die Arbeit der *longitudinalen* (oder wie man sie vielfach nennt, der „elektromotorischen") Kräfte in der ganzen Stromlinie σ ist pro Zeiteinheit gleich $ci \oint F_\tau d\sigma$. Was die Arbeit der *transversalen* (oder „pondermotorischen") Kräfte anbetrifft, so wird sie durch die Abnahme der potentiellen Energie U der betrachteten Stromlinie (bei konstanter Stromstärke) bezüglich der äußeren das Feld $\mathfrak{H}$ erzeugenden Systeme gemessen. Da nach (10), Kap. II, $U = -i \int H_n dS$ ist, so folgt, wegen $\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} = 0$,

$$\oint F_\tau d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int H_n dS. \qquad (3)$$

Diese Gleichung drückt das Gesetz der *elektromagnetischen Induktion* aus. Das Linienintegral $\oint F_\tau d\sigma$ heißt die durch die Bewegung der Stromlinie im magnetischen Felde induzierte *elektromotorische Kraft*. Es sei bemerkt, daß der Vektor $\mathfrak{F}$ dabei dieselbe Rolle spielt wie die gewöhnliche elektrische Feldstärke; das Integral $\int F_\tau d\sigma$ längs einer ungeschlossenen Linie genommen entspricht also der Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten dieser Linie. Für eine geschlossene Linie müßte es, falls $\mathfrak{F}$ mit der Feldstärke eines zeitlich konstanten elektrischen Feldes übereinstimmte, gleich null sein.

Die „elektromotorische Kraft" (3) ist von der Stromstärke vollständig unabhängig. Die longitudinale Bewegung der elektrischen Ladungen, durch welche die Stromstärke bestimmt wird, erzeugt die transversale Komponente von $\mathfrak{F}$; dagegen ist die longitudinale Komponente F_τ nur durch die (transversale) „Mitführungsbewegung" der Stromlinie bedingt.

Bei fehlendem Strom ($i = 0$) strebt die induzierte elektromotorische Kraft einen solchen zu erzeugen; im allgemeinen Fall ($i \neq 0$) sucht sie eine Änderung der Stromstärke hervorzurufen.

§ 2. Die elektromagnetische Induktion in einem zeitlich veränderlichen magnetischen Feld; das Relativitätsprinzip.

Das im vorigen Paragraphen betrachtete magnetische Feld sei durch einen zweiten linearen Strom $i'(\sigma')$ erzeugt. Wir stellen uns nun vor, daß die beiden Stromlinien σ und σ' in einer gemeinsamen Translationsbewegung begriffen sind, so daß sie relativ zueinander in derselben Lage bleiben. Die Erfahrung lehrt, daß in diesem Falle alles *ganz ebenso verläuft wie im Ruhestand:* es bleiben dabei nur die transversalen elektromagnetischen („pondermotorischen") Kräfte tätig, während die longitudinalen (elektromotorischen) Kräfte gar nicht auftreten[1]).

Daraus folgt, daß diese elektromotorischen Kräfte nur von der *relativen* Bewegung der betreffenden Stromlinie in bezug auf die andere abhängen. Diesen Satz wollen wir als *Relativitätsprinzip* bezeichnen. Es sei bemerkt, daß es sich dabei nur um die Relativität der einfachsten kinematischen Größe, nämlich der *Geschwindigkeit*, handelt. Und zwar haben wir bei der Bestimmung der in σ induzierten elektromotorischen Kraft nach der Formel (1) unter $\mathfrak{v}$ nicht die „absolute" Geschwindigkeit der Elemente von σ, sondern ihre relative Geschwindigkeit bezüglich eines mit der Stromlinie σ' festen Koordinatensystems zu verstehen[2]).

Wir müssen ferner annehmen, daß das von σ' erzeugte magnetische Feld bei der „absoluten" Bewegung von σ' ohne irgendeine Änderung mitgeführt wird, d. h. bezüglich des erwähnten mit σ' verbundenen Koordinatensystems zeitlich konstant bleibt[3]). In einem festgehaltenen Raumpunkt muß dabei die magnetische Feldstärke sich mit der Zeit ändern. Mit anderen Worten, betrachtet man das magnetische Feld vom Standpunkt eines „ruhenden" Koordinatensystems, so muß man es als *zeitlich variabel* auffassen.

In dem vorangehenden Paragraphen haben wir die Stromlinie σ' als ruhend und σ als bewegt angesehen. Da nach dem Relativitätsprinzip die auf σ ausgeübte Induktionswirkung nur von der relativen Bewegung abhängt, können wir, ohne diese Wirkung irgendwie abzuändern, die Rolle der beiden Stromlinien vertauschen, d. h. σ als ruhend und σ' als bewegt (mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit) ansehen. Dabei muß nur die *Interpretation* der elektromotorischen Kraft (3) geändert werden. Und zwar ist sie in dem betrachteten Fall auf ein durch die Bewegung von

---

[1]) Wir stellen uns z. B. zwei Spulen vor, von denen eine in die andere eingesteckt ist. Fließt in einer, z. B. in der äußeren Spule, ein konstanter elektrischer Strom, so bekommt man bei der Bewegung der inneren Spule einen induzierten Strom; derselbe Strom wird durch die entgegengesetzte Bewegung der äußeren Spule erzeugt. Bei einer gemeinsamen Verschiebung der beiden Spulen bekommt man keinen induzierten Strom.

[2]) Die exakte Formulierung des Relavitätsprinzips werden wir später im Kap. VIII anführen.

[3]) Wir werden später sehen, daß diese Annahme nicht ganz streng erfüllt ist; sie gilt nur in dem Grenzfall sehr kleiner Geschwindigkeiten.

σ' erzeugtes *elektrisches* Feld zurückzuführen, wobei die longitudinale Komponente dieses „induzierten" Feldes E_τ mit der entsprechenden Komponente unserer früheren elektromagnetischen Kraft pro Ladungseinheit $\mathfrak{F}_\tau$ identifiziert werden soll. Dem relativen Charakter der Geschwindigkeit entspricht also eine eigentümliche *Relativität der Kraft:* dieselbe Kraft läßt sich entweder als elektrische oder als elektromagnetische deuten.

Die zeitliche Änderung einer skalaren oder vektoriellen Größe in einem *festen* Raumpunkt werden wir im folgenden durch das Symbol $\frac{\partial}{\partial t}\,dt$, d. h. durch eine *partielle* Ableitung nach t bezeichnen. Dagegen soll sich das Symbol einer totalen Ableitung nach t, das z. B. in der Formel (3) auftritt, auf den Fall eines bewegten Punktes oder Systems beziehen. Wir bekommen also statt der Formel (3) die äquivalente Formel

$$\oint E_\tau d\sigma = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int H_n dS\,,$$

oder

$$\oint E_\tau d\sigma = -\int \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,n\,dS\,. \qquad (4)$$

Diese Formel zeigt, daß das induzierte elektrische Feld unmittelbar durch die zeitliche Änderung des betreffenden magnetischen Feldes bedingt wird. Die speziellen Verhältnisse, von denen diese Änderung abhängen mag, treten in (4) explizite nicht ein. Wir dürfen deshalb annehmen, daß diese speziellen Verhältnisse ganz belangslos sind. Dementsprechend muß die Formel (4) auch dann gültig bleiben, wenn die Änderung des magnetischen Feldes nicht in der Bewegung einer oder einiger Stromlinien bei *konstanter Stromstärke* (was bisher immer vorausgesetzt war), sondern in der *Änderung der Stromstärke* in ruhenden oder bewegten Stromlinien ihre Ursache hat. Sind die Stromstärken i und i' in σ bzw. σ' irgendwie konstant festgehalten, so müssen die transversalen elektromagnetischen Kräfte, welche auf σ seitens σ' wirken, bei einer Verschiebung von σ aus einer Lage (1) nach einer anderen (2) die Arbeit $A = U_1 - U_2$ leisten, wo

$$U = -i\int H_n dS = -i'\int H'_{n'} dS' = U'$$

die gegenseitige potentielle Energie der beiden Stromlinien bedeutet (vgl. (20c), Kap. III). Gleichzeitig aber leisten, wie wir in § 1 gesehen haben, die in σ wirkenden longitudinalen elektromagnetischen Kräfte, welche eine elektromotorische Kraft bedingen, die entgegengesetzte Arbeit $B = U_2 - U_1$, so daß in Summa die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte gleich null bleibt.

Wegen der Bewegung von σ muß ferner in σ' eine elektromotorische Kraft V' induziert werden, die von der zeitlichen Änderung des von σ

erzeugten magnetischen Feldes ($\mathfrak{H}'$) abhängt. Nach dem soeben betrachteten Relativitätsprinzip fällt diese elektromotorische Kraft elektrischen Ursprungs mit derjenigen „kinetischen" elektromotorischen Kraft zusammen, die in σ' erzeugt würde, falls σ ruhte, während σ' sich auf die entgegengesetzte Weise bewegte. Die Arbeit dieser Kraft muß — bei konstanter Stromstärke i' — der (algebraischen) Vermehrung der potentiellen Energie von σ' gegen σ, d. h. der Differenz $U_2' - U_1'$, oder wegen $U' = U$, $U_2 - U_1$ gleich sein. Daraus folgt, daß in dem betrachteten Fall — der Ruhe von σ' und der Bewegung von σ — die beiden elektromotorischen Kräfte — die kinetische V in σ und die statische V' in σ' — dieselbe Arbeit $U_2 - U_1$ leisten, d. h. in Summa die doppelte Arbeit $2\,(U_2 - U_1)$. Addiert man sie zu der Arbeit $A = U_1 - U_2$ der auf σ wirkenden transversalen Kräfte (die entsprechende Arbeit für die Stromlinie σ' ist wegen ihrer Ruhe gleich null), so bekommt man im ganzen die Arbeit

$$2\,(U_2 - U_1) + (U_1 - U_2) = U_2 - U_1 = -A\,.$$

Dieses Resultat läßt sich leicht verallgemeinern auf den Fall, daß die beiden Stromlinien (unanbhängig voneinander) sich gleichzeitig bewegen: die Arbeit der transversalen und longitudinalen elektromagnetischen Kräfte bleibt in Summa gleich null; was die Arbeit der beiden induzierten elektromotorischen Kräfte *elektrischen* Ursprungs anbetrifft, welche von der zeitlichen Änderung der magnetischen Felder $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ herrühren, so ist sie von der „absoluten" Bewegung von σ' und σ unabhängig, bleibt also immer gleich der Vermehrung der potentiellen Energie $U_2 - U_1$.

Die Energie eines Systems wird allgemein als die Größe, deren algebraische *Verminderung* beim Übergang dieses Systems von einer Lage in eine andere gleich der Arbeit der zwischen den Teilen des Systems wirkenden Kräfte ist (vorausgesetzt, daß die Arbeit vom Übergangsweg unabhängig ist). Will man also die *ganze* Arbeit, welche durch die in einem System von linearen elektrischen Strömen tätigen Kräften geleistet wird, auf eine Energiefunktion zurückführen, so muß diese Funktion T derart definiert sein, daß $T_1 - T_2 = U_2 - U_1$ wird. Setzen wir fest, daß bei unendlicher Entfernung der beiden Stromlinien voneinander die Energie T, ebenso wie U, verschwindet, so ergibt sich die folgende einfache Relation

$$T = -U. \tag{5}$$

Es sei nochmals erinnert, daß die potentielle Energie U nur den transversalen elektromagnetischen (d. h. „pondermotorischen") Kräften entspricht, welche auf die Elemente der beiden Stromlinien wirken, während T dieselbe Rolle für die statischen (elektrischen) Induktionskräfte spielt, welche durch die zeitliche Änderung der magnetischen Felder erzeugt werden. Die Arbeit der kinetischen Induktionskräfte wird

durch die Arbeit der erwähnten transversalen Kräfte genau kompensiert und darf deshalb unberücksichtigt bleiben.

Wir wollen die Größe T die *elektrokinetische* oder einfach die *magnetische* Energie der betrachteten Ströme nennen. Man kann sie auch definieren als die Arbeit, welche (auf Kosten irgendwelcher äußerer Energiequellen) zur Überwindung der induzierten elektrischen Kräfte aufgewandt werden muß, damit beim Übergang der beiden Stromlinien aus einer unendlichen Entfernung voneinander in die betreffende (relative) Lage die Stromstärken konstant bleiben.

Da diese Arbeit nur von der relativen Bewegung der beiden Stromlinien abhängt, so kann man sich vorstellen, daß eine von ihnen, z. B. σ, ruht , und daß folglich die Arbeit T vollständig auf diese Stromlinie aufgewandt wird (während in der bewegten Stromlinie nur „arbeitslose" elektrokinetische Kräfte wirken). Da ferner die induzierte elektromotorische Kraft in σ vollständig bestimmt ist durch die zeitliche Änderung des entsprechenden (von σ' ausgehenden) magnetischen Flusses $\int H_n dS$, ganz unabhängig von den speziellen Umständen, welche diese Änderung verursachen, so können wir die Bewegung von σ' bei festgehaltener Stromstärke durch eine allmähliche Zunahme der Stromstärke von 0 bis i', bei festgehaltener Lage, ersetzen. In beiden Fällen ist die Arbeit, die zur Sicherung der Konstanz der entsprechenden Stromstärke i gegen die in σ induzierte elektromotorische Kraft aufgewandt werden muß, durch dieselbe Größe T gegeben. Sie ergibt sich auch bei einer Rollenvertauschung der Stromlinien σ und σ' und ferner, wie leicht einzusehen, in dem allgemeinsten Falle, wenn die Stromstärken in σ und σ' gleichzeitig von Null bis i bzw. i' wachsen; dabei können sie sich ganz beliebig bewegen und müssen nur am Ende des ganzen Prozesses in die betreffende (relative) Lage kommen.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Arbeit, welche bei einer beliebigen Änderung der Lage der beiden Stromlinien und der entsprechenden Stromstärken durch die elektrischen und elektromagnetischen Wechselwirkungskräfte geleistet wird, immer gleich ist der (algebraischen) Abnahme der magnetischen Energie T; sie ist vollständig durch die Werte von T im Anfangs- und Endzustand bestimmt und von den intermediären Zuständen unabhängig.

§ 3. Die Maxwellschen Grundgleichungen für zeitlich wechselnde elektromagnetische Felder.

Die Formel (4) muß offenbar auch dann gültig bleiben, wenn in der Kurve σ kein Strom zirkuliert, d. h. man darf sie auf jede geschlossene Kurve und die durch die letztere begrenzte Fläche anwenden. Transformiert man das Linienintegral $\oint E_\tau d\sigma$ nach der *Stokes*schen Formel in das Flächenintegral $\int \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{E} dS$, so wird

$$\int \mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{E} dS = -\int \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \mathfrak{n} dS .$$

Daraus folgt, wegen der Willkürlichkeit der Fläche S

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung ist die Verallgemeinerung der Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$, die wir im Kap. I auf Grund des Energieprinzips aufgestellt haben und bisher als den analytischen Ausdruck dieses Prinzips betrachteten. Wir sehen also, daß im allgemeinen Falle zeitlich wechselnder Felder das Energieprinzip in seiner üblichen Form — wenigstens für das elektrische Feld allein — seine Gültigkeit verliert.

Was das magnetische Feld anbetrifft, so darf man die entsprechende Differentialgleichung $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ auch auf den betrachteten allgemeinen Fall übertragen. Dies folgt schon aus der Tatsache, daß das Energieprinzip auch für Wechselströme — obwohl in etwas abgeänderter Form (elektrokinetische Energie T statt der potentiellen U) — gültig bleibt. Unsere Behauptung läßt sich aber auf Grund der Gleichung (6) ganz streng beweisen. Denn wendet man die Operation div auf die beiden Seiten dieser Gleichung an, so ergibt sich (wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$) $\operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$, d. h. $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ und folglich $\operatorname{div} \mathfrak{H} = \text{konst}$. Es ist nun immer möglich, sich vorzustellen, daß im Anfangs- oder Endzustand das magnetische Feld eine Zeitlang konstant bleibt. Dabei aber muß $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ sein. Wir können also schließen, daß die aus dem Energieprinzip für den Spezialfall zeitlich konstanter Felder abgeleitete Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \tag{7}$$

allgemein gültig ist.

Durch Kombination des Energie- und des Äquivalenzprinzips haben wir im Kap. III die Gleichungen $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j}$ aufgestellt. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt die Identität $\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$, die in Verbindung mit dem Prinzip der Erhaltung der Elektrizität die Bedingung der Stationarität der das Feld $\mathfrak{H}$ erzeugenden Elektrizitätsströmung darstellt [Kap. II, Fomel (4a)]. Im allgemeinen Falle einer nichtstationären Elektrizitätsströmung kann also die Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j}$ nicht bestehen, denn die Divergenz ihrer linken Seite verschwindet, während die Divergenz von $\mathfrak{j}$ von Null verschieden ist. Nach (4), Kap. II (mit $\mathfrak{J} = c\mathfrak{j}$), drückt sich das Prinzip der Erhaltung der Elektrizität durch die Gleichung aus:

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Andererseits muß offenbar die gesuchte Verallgemeinerung der Gleichung $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j}$ für den Fall zeitlich wechselnder Felder die Gestalt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} \tag{8a}$$

haben, wobei $\mathfrak{G}$ einen zunächst unbestimmten Vektor bedeutet, der

von der Verteilung der elektrischen Ladungen abhängt. Durch Vergleich dieser Gleichung mit (8) bekommen wir

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{G} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \text{ d. h. } \operatorname{div}\mathfrak{G} = \frac{4\pi\varrho}{c}.$$

Nehmen wir also an, daß die erste der oben erwähnten Gleichungen

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho, \tag{9}$$

ebenso wie die entsprechende Gleichung für das magnetische Feld ($\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$) allgemein gültig ist, so muß man den Vektor $\mathfrak{G}$ gleich $\frac{1}{c}\mathfrak{E}$ setzen. Dabei nimmt (8a) die folgende Gestalt an:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{j}. \tag{10}$$

Es sei bemerkt, daß im „leeren Raum", d. h. für $\varrho = 0$ und $\mathfrak{j} = 0$, die Gleichungen (9) und (10) zu den Gleichungen (7) und (6) ganz analog werden, mit der einzigen Verschiedenheit, daß die zeitlichen Ableitungen von $\mathfrak{H}$ in (6) und $\mathfrak{E}$ in (10) entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Wir sehen also, daß ein wechselndes elektrisches Feld ein magnetisches Feld ganz ebenso induziert wie ein elektrisches Feld durch ein wechselndes magnetisches induziert wird, wobei aber bei Gleichheit der induzierenden Felder die induzierten entgegengesetzt sind. Für den Gesamtfluß des Vektors rot $\mathfrak{H}$ durch eine ungeschlossene Fläche S erhalten wir nach (10) den Ausdruck

$$\int \operatorname{rot}_n \mathfrak{H}\, dS = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int E_n\, dS + 4\pi i,$$

wo $i = \int j_n dS$ die Stärke des durch S fließenden elektrischen Stromes bedeutet, oder durch Anwendung der *Stokes*schen Transformationsformel auf das linksstehende Integral

$$\oint H_\tau\, d\sigma = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int E_n\, dS + 4\pi i. \tag{10a}$$

Diese Formel zeigt, daß die durch $4\pi c$ dividierte zeitliche Ableitung des durch S gehenden „elektrischen Flusses" ($\int E_n dS$) dieselbe Rolle hinsichtlich der Erzeugung des magnetischen Feldes spielt wie die entsprechende Stromstärke[1]).

Stellt man die Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ graphisch durch eine Schar von parallelen Geraden dar, so lassen sich die induzierten Felder $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{E}$ mittels ringförmiger Kraftlinien darstellen, welche die erwähnten Ge-

[1]) Diese Tatsache wurde von *Maxwell* entdeckt; dabei interpretierte *Maxwell* den Vektor $\mathfrak{E}$ als eine elastische Verschiebung im Äther und dementsprechend das Integral $\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int E_n dS$ als einen „Verschiebungsstrom".

radenscharen umfassen — und zwar im ersten Falle im positiven und im zweiten im negativen Sinne (Abb. 29 a, b).

Neben der elektrischen Ladungs- und Stromdichte (ϱ, $\mathfrak{j}$) könnte man — auf eine ganz formale Weise — die entsprechenden *magnetischen* Größen ϱ^*, $\mathfrak{j}^*$ einführen, die miteinander durch die „Erhaltungsgleichung"

$$\operatorname{div} \mathfrak{j}^* + \frac{1}{c}\frac{\partial \varrho^*}{\partial t} = 0 \qquad (11)$$

verknüpft werden müßten (diese Gleichung ist tatsächlich erfüllt, da $\mathfrak{j}^* = 0$ und $\varrho^* = 0$ ist). Die Gleichungen (7) und (6) würden dann eine zu (7) und (10) ganz analoge Gestalt annehmen, und zwar

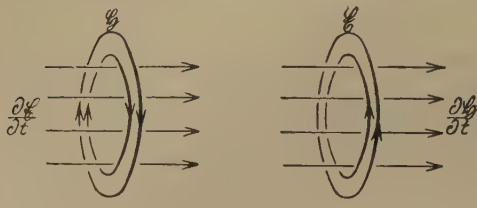

Abb. 29.

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi \varrho^*, \qquad (11a)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - 4\pi \mathfrak{j}^*. \qquad (11b)$$

Dementsprechend könnte man neben der Gesamtkraft

$$\mathfrak{f} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}]\right), \qquad (12)$$

die auf eine im elektromagnetischen Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Punktladung e wirkt eine analoge (fiktive) Kraft

$$\mathfrak{f}^* = e^*\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}]\right), \qquad (12a)$$

die auf einen bewegten magnetischen Pol e^* wirken sollte, einführen.

Diese — selbstverständlich ganz fiktiven — Begriffe und Größen sind manchmal für die praktische Ausrechnung der durch gegebene Bewegungen der Elektrizität erzeugten Felder sehr bequem.

§ 4. Die Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale.

Die allgemeinen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes faßt man gewöhnlich zusammen in die folgenden zwei Gruppen[1])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 4\pi\varrho \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= 4\pi \mathfrak{j} \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

[1]) Diese Gleichungen wurden zuerst von *J. C. Maxwell* und in endgültiger Form von *H. A. Lorentz* aufgestellt; deshalb bezeichnet man sie gewöhnlich als die *Maxwell-Lorentz*schen Grundgleichungen.

Wir wenden uns zunächst der Betrachtung der Gleichungen (I) zu. Aus der ersten von ihnen folgt, daß das magnetische Feld auch im allgemeinen Falle quellenfrei — oder solenoidal — ist, so daß $\mathfrak{H}$ sich ebenso wie in dem Spezialfall der stationären Elektrizitätsströmung durch ein vektorielles oder magnetisches Potential $\mathfrak{A}$ nach der Formel

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{13}$$

berechnen läßt. Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

ein, so wird

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{rot} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) = 0 .$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Summe $\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{A}$ einen wirbelfreien Vektor darstellt, d. h. gleich dem Gradienten einer skalaren Größe $-\varphi$ ist. Man kann also

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \tag{14}$$

setzen. Für konstante Felder reduziert sich diese Formel auf die im Kap. I abgeleitete Formel $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, so daß φ mit dem früher eingeführten skalaren oder elektrischen Potential völlig übereinstimmt.

Setzt man nun die Ausdrücke (13) und (14) in die Gleichungen (II) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} \equiv -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{A} = 4\pi \varrho \tag{14a}$$

und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \equiv \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} + \operatorname{grad} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 4\pi \mathfrak{j} ,$$

oder nach der Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A} ,$$

$$-\nabla^2 \mathfrak{A} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 4\pi \mathfrak{j} . \tag{14b}$$

Wie wir schon im Kap. II bei der Betrachtung von zeitlich konstanten elektromagnetischen Feldern gesehen haben, ist die durch (13) eingeführte Vektorfunktion $\mathfrak{A}$ nicht vollständig bestimmt. Diese Unbestimmtheit haben wir früher durch die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

[(12a) Kap. II] beseitigt. Als sinngemäße Verallgemeinerung dieser Gleichung erscheint jetzt die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 , \tag{15}$$

die der Beziehung (8) zwischen den rechten Seiten von (14a) und (14b) ganz analog ist. Sie ermöglicht dabei, die beiden unbekannten Funktionen φ und $\mathfrak{A}$ in (14a) und (14b) voneinander zu trennen. In der Tat,

unter Berücksichtigung von (15) reduzieren sich (14a) und (14b) auf zwei Gleichungen *derselben Form*

$$-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=4\pi\varrho, \tag{16}$$

$$-\nabla^2\mathfrak{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2}=4\pi\mathfrak{j}, \tag{17}$$

die als die Verallgemeinerung der Gleichungen (8) und (9), Kap. III, angesehen werden dürfen.

In den Fällen, wo die positiven und negativen Ladungen in den kleinsten neutralen Teilchen — Molekeln — miteinander verbunden sind (wie z. B. bei Dielektriken) kann die Stromdichte nach (2), Kap. II, dargestellt werden als die zeitliche Ableitung des Polarisationsvektors $\mathfrak{P}$, der das elektrische Moment des betreffenden Körpers pro Volumeinheit mißt. Unter Benützung der elektrokinetischen Einheiten für die Stromdichte $\left(\mathfrak{j}=\frac{1}{c}\mathfrak{J}\right)$ hat man also

$$\mathfrak{j}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}. \tag{18}$$

Bei Einsetzen dieses Ausdrucks in die Gleichung (8) nimmt letztere die Gestalt $\operatorname{div}\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varrho}{\partial t}=0$, d. h.

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathfrak{P}+\varrho)=0$$

an. Daraus folgt, daß die Volumdichte der elektrischen Ladung sich mittels des Polarisationsvektors darstellen läßt nach der Formel

$$\varrho=-\operatorname{div}\mathfrak{P}, \tag{18a}$$

die wir in § 10, Kap. III, auf eine andere Weise schon abgeleitet haben. Es sei bemerkt, daß die Formeln (18) und (19) nicht nur für den Fall gebundener Ladungen gültig sind, sondern auch auf den Fall beliebig bewegter Ladungen angewandt werden können. Dabei aber verliert der Vektor $\mathfrak{P}$ den oben erwähnten anschaulichen physikalischen Sinn und wird bloß eine durch (18) definierte Hilfsgröße (vgl. § 10, Kap. III).

Ebenso wie $\mathfrak{j}$ und ϱ beide mittels dieser Größe sich darstellen lassen, kann man die entsprechenden Potentiale $\mathfrak{A}$ und φ infolge der Beziehung (15) durch eine und dieselbe Größe $\mathfrak{Z}$ ausdrücken, welche zum Vektor $\mathfrak{P}$ in derselben Beziehung steht wie $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{j}$. Man setzt in Analogie zu (18) und (19):

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Z} \tag{19}$$

und

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathfrak{Z}. \tag{19a}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichungen (16) und (17) bekommen wir

$$-\nabla^2(-\operatorname{div}\mathfrak{Z})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\operatorname{div}\mathfrak{Z})=-4\pi\operatorname{div}\mathfrak{P}$$

und

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla^2 \mathfrak{Z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} 4\pi \mathfrak{P}.$$

Daraus folgt, daß der Vektor $\mathfrak{Z}$ — der sogenannte *Hertz*sche *Vektor* oder *elektrische Polarisationspotential* — der Gleichung

$$-\nabla^2 \mathfrak{Z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 4\pi \mathfrak{P} \tag{20}$$

genügt. Diese Gleichung stimmt ihrer Form nach mit den Gleichungen (16) und (17) für das elektrische und magnetische Potential überein und stellt die Verallgemeinerung der Gleichung (35), Kap. III, dar.

Wir haben gesehen, daß man im Falle einer stationären elektrischen Strömung die Stromdichte durch den „magnetischen Polarisationsvektor" $\mathfrak{M}$ und das Vektorpotential durch das magnetische Polarisationspotential $\mathfrak{Z}^*$ ausdrücken kann nach den Formeln $\mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A} = \operatorname{rot} \mathfrak{Z}^*$. Diese Formeln lassen sich offenbar auf den allgemeinen Fall nicht übertragen. Man kann sie aber mit den vorhergehenden kombinieren und $\mathfrak{j}$ als Summe

$$\mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \tag{21}$$

definieren. Dementsprechend ergibt sich für $\mathfrak{A}$ die Summe

$$\mathfrak{A} = \operatorname{rot} \mathfrak{Z}^* + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}. \tag{21a}$$

Dadurch wird die ursprüngliche Definition der elektrischen Polarisation $\mathfrak{P}$ selbstverständlich etwas geändert. Man kann aber gerade diesen Umstand benützen, um das wirkliche System durch ein anderes auf eine solche Weise zu ersetzen, daß das elektromagnetische Feld in dem betrachteten Raumgebiet sich möglichst leicht bestimmen läßt. Aus (21) und (21a) folgt in Verbindung mit den früheren Formeln

$$-\nabla^2 \mathfrak{Z}^* + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*}{\partial t^2} = 4\pi \mathfrak{M} \tag{22}$$

d. h. eine Gleichung derselben Gestalt wie (20).

Solche Gleichungen bezeichnet man als *d'Alembert*sche; sie stellen die Verallgemeinerung der *Laplace*schen Gleichungen für zeitlich variable Felder dar.

§ 5. Integration der vorangehenden Differentialgleichungen; retardierte Potentiale.

Wir wollen zunächst die Integration der Gleichung (16) für den Fall ausführen, daß die elektrische Ladungsdichte ϱ außerhalb eines bestimmten Punktes P gleich Null ist. Dagegen denken wir uns in diesem Punkt eine Ladung e von endlicher und *zeitlich veränderlicher* Größe konzentriert. Es sei also e eine willkürliche Funktion der Zeit

$$e = e(t).$$

Diese Vorstellung ist physikalisch sinnlos, denn sie widerspricht dem Erhaltungsprinzip der Elektrizität. Sie hat aber vom mathematischen Standpunkt aus den Vorteil der größtmöglichen Einfachheit. Mittels der entsprechenden speziellen Lösung der Gleichung (17) kann man, wie wir unten sehen werden, die allgemeine Lösung leicht konstruieren, wobei das Erhaltungsprinzip der Elektrizität wieder in seine Rechte tritt.

Wir nehmen also an, daß im ganzen Raum, mit Ausschluß des Punktes P' die Gleichung

$$-\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{23}$$

gilt, während in diesem Punkte ihre rechte Seite unendlich wird. Dann muß aus Symmetriegründen das Potential φ für alle von P' gleich weit entfernten Punkte zur gleichen Zeit denselben Wert haben. Mit anderen Worten, man kann für φ den Ansatz machen

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \varphi(R, t),$$

wo R den Abstand des betrachteten Aufpunktes P von P' bedeutet ($P'P = \mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$; $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ sind wie gewöhnlich die Radiusvektoren von P und P' in bezug auf irgendeinen festen Punkt O). Nach (18), Kap. III, reduziert sich dabei die Operation $\nabla^2 \varphi$ auf $\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2}(R\varphi)$, so daß die Gleichung (23) die folgende Form annimmt

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

oder wegen der Unabhängigkeit der beiden Variablen R und t voneinander

$$-\frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial t^2} = 0. \tag{23a}$$

Wir führen nun statt R die neue Variable $\tau = R/c$ ein und bezeichnen das Produkt $R\varphi$ mit f. Dabei läßt sich (23a) folgendermaßen schreiben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 0. \tag{23b}$$

Diese Gleichung wird befriedigt, indem man für f irgendeine Funktion der Summe $t + \tau$ oder der Differenz $t - \tau$ einsetzt. Daraus folgt, daß die allgemeinste Lösung von (23b) in der Form

$$f(t, \tau) = f_1(t - \tau) + f_2(t + \tau) \tag{24}$$

dargestellt werden kann, wobei $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ zwei willkürliche Funktionen der entsprechenden Argumente bedeuten.

Ein strengerer Beweis dieser Behauptung ergibt sich durch Transformation von (23b) auf die neuen Variabeln:

$$\xi = t - \tau \quad \text{und} \quad \eta = t + \tau.$$

Wegen $t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ und $\tau = \frac{1}{2}(\eta - \xi)$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau};$$

also

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = 4\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial \eta}$$

und folglich nach (23b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0\,.$$

Die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ ist also von ξ unabhängig, sie kann aber eine ganz beliebige Funktion von η sein. Umgekehrt ist $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ eine willkürliche Funktion von ξ, in welcher η gar nicht auftritt. Die Funktion f muß sich folglich als Summe zweier willkürlicher Funktionen der einzelnen Variablen ξ bzw. η darstellen lassen.

Wir nehmen zunächst an, daß $f_2 = 0$ ist. Dann bekommen wir für das Potential $\varphi\,(R, t)$ die folgende Formel

$$\varphi = \frac{f_1(t - R/c)}{R}\,.$$

Zur Bestimmung der Funktion f_1 beachten wir den Umstand, daß für $c = \infty$ die Gleichung (23a) sich auf die schon in Kap. III behandelte Gleichung des gewöhnlichen *Coulomb*schen Potentials reduziert. Es muß also in diesem Fall

$$\varphi = \frac{e}{R}$$

sein, wobei e die Größe der im Punkte P' konzentrierten Ladung bedeutet. Bei der Ableitung dieser Formel im Kap. III haben wir e als eine konstante Größe vorausgesetzt. Es ist aber klar, daß sie unter der Bedingung $c = \infty$ auch dann gültig bleibt, wenn die Ladung e sich mit der Zeit beliebig ändert; dabei muß offenbar der Wert des Potentials φ für irgendeinen Zeitpunkt t durch den *gleichzeitigen* Wert der Funktion $e(t)$ bestimmt werden.

Wir sehen also, daß für $c = \infty$ die Formel (24a) die Gestalt $\varphi\,(R,t) = \frac{e(t)}{R}$ annehmen muß. Daraus bekommen wir $f_1\,(t - R/c) = e\,(t - R/c)$ und folglich

$$\varphi\,(R, t) = \frac{e\,(t - R/c)}{R}\,. \tag{25}$$

Diese Formel zeigt, daß der Wert von φ in den Punkten, die im Abstand R von der Ladung e, d. h. auf einer Kugelfläche mit dem Radius R und dem Mittelpunkt P', liegen, für den Augenblick t *nicht* durch die gleichzeitige Größe dieser Ladung bestimmt wird, sondern durch ihre Größe in dem vorangehenden Augenblick $t' = t - R/c$.

Wir müssen uns also vorstellen, daß die von e ausgehende Wirkung sich vom Punkte P' nach den umgebenden Raumpunkten nicht momentan ausbreitet, sondern mit einer bestimmten *Verspätung*, die direkt proportional ihrem Abstande von P' ist. Mit anderen Worten, diese

Wirkung pflanzt sich im leeren Raum in der Gestalt einer Kugelwelle fort — ganz ebenso wie die kreisförmigen Wellen, die auf eine Wasseroberfläche durch eine lokale Störung erzeugt werden, oder noch besser die kugelförmigen Schallwellen in der Luft.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist offenbar gleich c, d. h. der Größe $c = 3.10^{10}$ cm/sek, die wir anfangs als das Verhältnis der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke zu der elektrostatischen und später (§ 6, Kap. III) als die „kritische Geschwindigkeit" definierten. Wir dürfen also diese kritische Geschwindigkeit ansehen als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen im Raum. Es sei nochmals erinnert, daß sie mit der experimentell gemessenen Lichtgeschwindigkeit *genau* übereinstimmt.

Aus dem oben erläuterten Grunde bezeichnet man das durch die Formel (25) bestimmte Potential als verspätetes oder *retardiertes Potential.*

Es sei bemerkt, daß diese Formel keine *mathematisch notwendige* Folge der ursprünglichen Differentialgleichung (23a) ist. Ebensogut könnte man in der allgemeinen Lösung dieser Gleichung (24) nicht $f_2 = 0$, sondern $f_1 = 0$ setzen, was für φ statt (25) die Formel

$$\varphi(R,t) = \frac{1}{R} e(t + R/c) \tag{25a}$$

ergeben würde. Die allgemeinste Form der Lösung (24), die mit den physikalischen Bedingungen unseres Problems verträglich ist, d. h. die für $c = \infty$ in das gewöhnliche *Coulomb*sche Potential $\varphi(R,t) = \frac{e(t)}{R}$ übergeht, ist offenbar eine lineare Kombination von (25) und (25a):

$$\varphi(R,t) = \frac{1}{R}[\alpha' e(t - R/c) + \alpha'' e(t + R/c)], \tag{25b}$$

wo α' und α'' zwei numerische Koeffizienten sind, deren Summa gleich 1 ist. Einer dieser Koeffizienten kann also ganz beliebig gewählt werden.

Tatsächlich aber setzt man $\alpha' = 1$ und folglich $\alpha'' = 0$, d. h. man läßt die zweite partikuläre Lösung (25a) weg, und zwar deshalb, weil das entsprechende *voreilende* Potential *physikalisch sinnlos* erscheint. Denn die Gleichung (25a) sagt aus, daß die im Punkte P durch die Ladung e bedingte Wirkung in einem Augenblick t durch die Größe dieser Ladung in einem *späteren* Moment $t'' = t + R/c$ bestimmt wird; mit anderen Worten, die durch e bedingte Wirkung müßte sich nach (25a) nach dem entsprechenden Punkt P' zusammenziehen — statt sich davon auszubreiten, im Sinne der Formel (25).

Eine solche „voreilende" Wirkung scheint nicht nur physikalisch unmöglich, sondern auch logisch undenkbar zu sein, denn sie würde bedeuten, daß die Ursache der Wirkung nachfolgt, statt dieser Wirkung voranzugehen, entsprechend der üblichen Auffassung des Kausalitätsprinzips.

Eine einfache Überlegung zeigt aber, daß in Wirklichkeit diese übliche Auffassung ganz illusorisch ist. In der Tat muß vom Standpunkt der klassischen Mechanik, die an die Vorstellung einer „augenblicklichen" Fernwirkung (d. h. momentaner Kraftübertragung) anknüpft, die *Beschleunigung* irgendeines materiellen Teilchens von der *gleichzeitigen Lage* aller anderen die betrachtete Wirkung erzeugenden Teilchen abhängen; die Wirkung muß also mit ihrer Ursache als gleichzeitig betrachtet werden. Die Auffassung, daß die Bewegung gegenüber der Kraft etwas verzögert wird, rührt von dem Umstande her, daß wir die Bewegung nicht durch die Beschleunigung, sondern durch die Geschwindigkeit oder vielmehr durch die entsprechende Verrückung wahrnehmen. Um aber eine Geschwindigkeitsänderung oder einen Platzwechsel zu bemerken, muß ein gewisser Zeitraum abgewartet werden.

Wir sehen also, daß in der klassischen Mechanik „causa" und „effectum" als *gleichzeitig* zu betrachten sind. Wird diese Gleichzeitigkeit durch eine verzögerte Kraftwirkung ersetzt, also die zeitliche Einheitlichkeit der Ursache und der Wirkung zerstört, so scheint es nicht unmöglich, auch eine voreilende Kraftwirkung anzunehmen. — Wenn es trotzdem entscheidende Gründe gegen eine voreilende Kraftwirkung zu geben scheint, so sind diese nicht logischer, sondern rein empirischer Natur: eine solche Wirkung wird nämlich durch die wohlbekannten Erscheinungen der Lichtfortpflanzung geleugnet (siehe unten).

Wir müssen also die Lösung (25a) verwerfen und die von einer ruhenden aber zeitlich variablen Ladung erzeugte Wirkung durch das retardierte Potential (25) ausdrücken.

Der Übergang von diesem einfachen aber rein fiktiven Fall zum allgemeinen Fall einer beliebigen Verteilung und Strömung der Elektrizität, die dem Erhaltungsprinzip genügen soll, läßt sich nun leicht vollziehen. Wegen der Linearität der allgemeinen Gleichung (16) bezüglich φ und ϱ, kann man φ darstellen als Summe der elementaren Potentiale $d\varphi$, welche durch die in einzelnen Volumelementen dV' konzentrierten infinitesimalen Ladungen $de' = \varrho' dV'$, erzeugt werden Es sei $\mathfrak{r}'$ der Radiusvektor irgendeines Punktes (P') von dV' und $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor des „Aufpunktes" P (für welchen φ bestimmt wird). Bei endlicher Größe von $P'P = R = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$ oder — was auf dasselbe hinauskommt — bei unendlich kleinen Abmessungen der Volumelemente dV' im Vergleich mit R, kann man die Ladung de' als eine Punktladung behandeln (deren zeitliche Änderung durch die entsprechende Änderung der Ladungen in den benachbarten Volumelementen kompensiert wird) und dementsprechend nach (25)

$$d\varphi(\mathfrak{r}, t) = \frac{1}{R}\varrho(\mathfrak{r}', t - R/c)\,dV'$$

setzen Daraus folgt

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{1}{R}\varrho(\mathfrak{r}', t - R/c)\,dV', \qquad (26)$$

wo die Integration sich auf den ganzen Raum erstreckt — oder tatsächlich auf alle Raumpunkte $\mathfrak{r}'$, die in dem entsprechenden „effektiven" Zeitpunkt

$$t' = t - R/c \tag{26a}$$

„geladen" waren.

In dem Spezialfall, daß ϱ zeitlich konstant ist (ruhende elektrische Ladungen), reduziert sich (26) auf die Formel (17a), Kap. III, für das gewöhnliche *Coulomb*sche Potential.

Die Formel (26) darf als die Lösung der Differentialgleichung (16) angesehen werden. Aus der formalen Identität dieser Gleichung mit (17) folgt, daß die Lösung der letzteren sich aus (26) ergeben muß durch Ersetzung des Skalars ϱ durch den Vektor $\mathfrak{j}$. Das Vektorpotential, welches von der gegebenen durch die Funktion $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t')$ bestimmten Elektrizitätsströmung erzeugt wird, drückt sich also durch die Formel aus:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{1}{R}\,\mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t - R/c)\,dV'. \tag{27}$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß die durch (26) und (27) definierten Potentiale der Bedingung (15) Genüge leisten — sofern die entsprechende Bedingung (8) für ϱ und $\mathfrak{j}$, d. h. das Erhaltungsprinzip der Elektrizität tatsächlich erfüllt ist.

Denn differenziert man (26) nach ct, so wird, wegen $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$ $(t' = t - R/c)$:

$$\frac{\partial \varphi}{c\,\partial t} = \int \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{c\,\partial t'}\,\varrho(\mathfrak{r}', t')\,dV'$$

und ferner, mit der Abkürzung $\mathfrak{j}' = \mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t')$

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \int \operatorname{div}\frac{\mathfrak{j}'}{R}\,dV' = \int \left(\mathfrak{j}'\operatorname{grad}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\operatorname{div}\mathfrak{j}'\right) dV'.$$

Dabei ist, nach der Formel (28a), Einleitung:

$$\operatorname{div}\mathfrak{j}' = \frac{\partial \mathfrak{j}'}{\partial t'}\operatorname{grad} t' = -\frac{\partial \mathfrak{j}'}{c\,\partial t'}\operatorname{grad} R\,.$$

Wir ersetzen nun die Differentiation nach $\mathfrak{r}$ durch die entsprechende Differentiation nach dem Radiusvektor $\mathfrak{r}'$, welcher in dem vorangehenden Integral die Rolle der unabhängigen Variablen spielt. Dies gibt, wegen $\nabla = -\nabla'$ (d. h. grad = — grad′ usw.)

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{j}'}{\partial t'}\operatorname{grad} R = +\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{j}'}{\partial t'}\operatorname{grad}' R = -\{\operatorname{div}'\mathfrak{j}' - (\operatorname{div}'\mathfrak{j}')_{t' = \text{konst}}\},$$

wo $(\operatorname{div}'\mathfrak{j}')_{t' = \text{konst}}$ einem festgehaltenen Werte von t' entspricht, und folglich

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \int \left\{-\operatorname{div}'\frac{\mathfrak{j}'}{R} + \frac{1}{R}(\operatorname{div}'\mathfrak{j}')_{t' = \text{konst}}\right\} dV'.$$

Nun ist nach der *Gauß*schen Formel

$$\int \operatorname{div}'\frac{\mathfrak{j}'}{R}\,dV' = \int \frac{1}{R}\,\mathfrak{j}'_n\,dS'\,.$$

Auf der Fläche S', die das ganze Volumen, in dem die Elektrizitätsströmung (zur entsprechenden Zeit) stattfindet, begrenzt, muß der Vektor $\mathfrak{j}'$ (oder jedenfalls seine Normalkomponente) verschwinden. Es ist also $\int \operatorname{div}' \frac{\mathfrak{j}'}{R}\, dV' = 0$ und folglich

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = \int \left\{ \frac{1}{c}\frac{\partial \varrho'}{\partial t'} + (\operatorname{div}' \mathfrak{j}')_{t' = \text{konst}} \right\} \frac{dV'}{R} = 0\,,$$

nach (8).

Die Integrale (26) und (27) bestimmen die gesamte Wirkung, die in dem betreffenden Raum- und Zeitpunkt $\mathfrak{r}$, t von allen im umgebenden Raum vorhandenen Ladungen ausgeübt wird. Diese allseitig nach P konvergierende Wirkung kann geometrisch veranschaulicht werden durch eine Kugelfläche, die sich auf ihren Mittelpunkt P mit der Geschwindigkeit c zusammenzieht, so daß im Augenblick t ihr Radius R gleich Null wird. Solche nach einem bestimmten Aufpunkt konvergierende Kugelflächen entsprechen den divergierenden „Kugelwellen", die sich aus jedem Quellpunkt, d. h. jedem in dem betreffenden Augenblick geladenen Raumpunkt mit derselben Geschwindigkeit c ausbreiten.

Die Integrale (26) und (27) setzen sich zusammen aus den elementaren Beiträgen, welche durch die nach dem Aufpunkt konvergierende „Wirkungskugel", den entsprechenden Volumelementen sozusagen entrissen werden, dividiert durch den jeweiligen Radius dieser Kugel.

Wir betrachten einen Kegel mit einem unendlich kleinen Öffnungswinkel $d\Omega$ und der Spitze in dem Aufpunkte P. In dem unendlich kleinen Zeitintervall zwischen den Momenten $t' = t - R/c$ und $t' + dt' = t - (R + dR)/c$ wird aus diesem Kegel durch die nach P konvergierende Wirkungskugel das Volumelement $dV = R^2 d\Omega\, dR$ ausgeschnitten. Dementsprechend lassen sich die Formeln (26) und (27) in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \int d\Omega \int_0^\infty \varrho(\mathfrak{r}', t - R/c)\, R\, dR \\ \mathfrak{A} &= \int d\Omega \int_0^\infty \mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t - R/c)\, R\, dR \end{aligned}\right\} \qquad (27a)$$

schreiben.

Es sei bemerkt, daß die gewonnenen Formeln keine *vollständige* Lösung der Differentialgleichungen (16) und (17) liefern. Sie können noch vervollständigt werden durch Hinzufügung beliebiger Lösungen der entsprechenden *homogenen* Gleichungen

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0\,, \quad \Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0\,,$$

die der Bedingung (15) genügen. Solche Lösungen lassen sich aber immer interpretieren als retardierte Potentiale, die durch *unendlich entfernte*

elektrische Ladungen bedingt sind. Sind also die Funktionen $\varrho(\mathfrak{r}', t')$ und $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t')$ für den ganzen Raum — einschließlich der unendlich entfernten Punkte — und für die ganze Zeit, von $-\infty$ bis $+\infty$, als bekannt vorausgesetzt, so kann man die entsprechenden (diese unendlich entfernten Raum- und Zeitpunkte berücksichtigenden) Lösungen (26) und (27) als vollständig betrachten. — Diese Frage werden wir unten eingehender behandeln.

§ 6. Das elektromagnetische Feld eines elementaren schwingenden Dipols (Oszillators).

Ist der Polarisationsvektor $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}', t')$ für verschiedene Raum- und Zeitpunkte bekannt, so kann man zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes das durch die Differentialgleichung (22) gegebene Polarisationspotential $\mathfrak{Z}$ benützen. Der Integralausdruck dieses Potentials ergibt sich offenbar aus der Formel (27) durch Einsetzen des Vektors $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}', t')$ statt der Stromdichte $\mathfrak{j}(\mathfrak{r}', t')$. Es ist also

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\mathfrak{P}(\mathfrak{r}', t')}{R}\, dV', \tag{28}$$

wobei t' wie früher die „effektive Zeit" bedeutet.

Wir betrachten nun den einfachsten Fall eines *ruhenden* elementaren (mathematischen) Dipols mit einem *zeitlich veränderlichen* elektrischen Moment. Dieses Moment kann offenbar nicht monoton wachsen oder abnehmen, sondern muß um irgendeinen Mittelwert schwingen — denn sonst könnte der Dipol nicht elementar — d. h. von sehr kleiner Länge — bleiben. Deshalb nennt man einen solchen Dipol „Oszillator". Jedes neutrale elektrische System von sehr kleinen linearen Abmessungen, dessen elektrisches Moment erster Ordnung zeitlich variabel ist (z. B. ein Atom oder Molekül), läßt sich in erster Annäherung als elementarer Oszillator behandeln.

Denken wir uns diesen Oszillator in einem festen Raumpunkt P' konzentriert, und bezeichnen sein Moment als Funktion der Zeit mit $\mathfrak{p}(t)$, so wird nach (28), wegen $\int \mathfrak{P}(\mathfrak{r}', t')\, dV' = \mathfrak{p}(t')$,

$$\mathfrak{Z}(r, t) = \frac{\mathfrak{p}(t')}{R} \tag{28a}$$

[vgl. (32b), Kap. III].

Zur Berechnung der Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ nach (20) und (21) beachten wir die folgenden Formeln, welche sich auf die Differentiation des Vektors $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}(t')$ — sowie jeder anderen vektoriellen Funktion des Arguments $t' = t - R/c$ beziehen [vgl. Einleitung (28)—(28c)]:

$$\frac{\partial \mathfrak{p}'}{\partial t} = \frac{d\mathfrak{p}'}{dt'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{d\mathfrak{p}'}{dt'},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{p}' = \operatorname{grad} t' \cdot \frac{d\mathfrak{p}'}{dt'}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{p}' = \operatorname{grad} t' \times \frac{d\mathfrak{p}'}{dt'},$$

$$(\mathfrak{k} \operatorname{grad})\, \mathfrak{p}' = (\mathfrak{k} \operatorname{grad} t')\, \frac{d\mathfrak{p}'}{dt'},$$

wo $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Vektor ist, und

$$\operatorname{grad} t' = -\operatorname{grad}\frac{R}{c} = -\frac{1}{c}\frac{\mathfrak{R}}{R} = -\frac{\mathfrak{R}_0}{c}.$$

Mittels dieser Formeln bekommen wir, mit der üblichen Bezeichnung der Ableitung irgendeiner Funktion nach der Zeit t'

$$\frac{d\mathfrak{F}(t')}{dt'} = \dot{\mathfrak{F}}(t') = \dot{\mathfrak{F}}',$$

$$\varphi = -\operatorname{div}\frac{\mathfrak{p}'}{R} = -\mathfrak{p}'\operatorname{grad}\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\operatorname{div}\mathfrak{p}',$$

d. h.

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p}' R_0}{R^2} + \frac{\dot{\mathfrak{p}}' R_0}{c R} \tag{29}$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{p}}'}{c R}. \tag{29a}$$

In dem Spezialfall $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} = \text{konst}$ reduziert sich (29) auf den bekannten Ausdruck für das elektrische Potential eines elementaren Dipols. Die Formel (29a) entspricht der früher aufgestellten Formel (22), Kap. III, für das Vektorpotential einer bewegten Punktladung, mit dem — sehr wesentlichen — Unterschied, daß (29a) keine momentane, sondern eine *retardierte* Wirkung darstellt.

Nach der Formel $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ ergibt sich ferner:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\frac{\mathfrak{p}'}{cR} = \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{1}{R}\times\dot{\mathfrak{p}}' + \frac{1}{cR}\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{p}}' = \operatorname{grad}\frac{1}{cR}\times\dot{\mathfrak{p}}' + \frac{1}{cR}\operatorname{grad} t'\times\ddot{\mathfrak{p}}',$$

wo

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d^2\mathfrak{p}'}{dt'^2}$$

bedeutet, d. h.

$$\mathfrak{H} = \frac{\dot{\mathfrak{p}}'\times\mathfrak{R}_0}{cR^2} + \frac{\ddot{\mathfrak{p}}'\times\mathfrak{R}_0}{c^2 R}. \tag{30}$$

Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$ ersetzen wir den Einheitsvektor $\mathfrak{R}_0$ in (29) durch $\mathfrak{R}/R$. Dann wird:

$$\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\frac{\mathfrak{p}'\mathfrak{R}}{R^3} + \operatorname{grad}\frac{\dot{\mathfrak{p}}'\mathfrak{R}}{cR^2} = \frac{1}{R^3}\operatorname{grad}(\mathfrak{p}'\mathfrak{R}) - 3\frac{(\mathfrak{p}'\mathfrak{R})}{R^4}\operatorname{grad}\mathfrak{R} + \frac{1}{cR^2}\operatorname{grad}(\dot{\mathfrak{p}}'\mathfrak{R}) - \frac{2(\dot{\mathfrak{p}}'\mathfrak{R})}{cR^3}\operatorname{grad}\mathfrak{R}.$$

Ferner haben wir [Einleitung (27)]:

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{p}'\mathfrak{R}) = (\mathfrak{p}'\operatorname{grad})\mathfrak{R} + \mathfrak{p}'\times\operatorname{rot}\mathfrak{R} + (\mathfrak{R}\operatorname{grad})\mathfrak{p}' + \mathfrak{R}\times\operatorname{rot}\mathfrak{p}'$$

$$= \mathfrak{p}' + (\mathfrak{R}\operatorname{grad} t')\dot{\mathfrak{p}}' + \mathfrak{R}\times(\operatorname{grad} t'\times\dot{\mathfrak{p}}') = \mathfrak{p}' - \frac{R}{c}\dot{\mathfrak{p}}' - \frac{R}{c}\times(\mathfrak{R}_0\times\mathfrak{p}')$$

oder, wegen $\mathfrak{R}\times(\mathfrak{R}_0\times\mathfrak{p}') = \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}\mathfrak{p}') - \mathfrak{p}'(\mathfrak{R}\mathfrak{R}_0)$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_0 = R$,

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{p}'\mathfrak{R}) = \mathfrak{p}' - \frac{\mathfrak{R}_0}{c}(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{p}}').$$

Ersetzt man hier den Vektor $\mathfrak{p}'$ durch $\dot{\mathfrak{p}}'$, so wird

$$\operatorname{grad}(\dot{\mathfrak{p}}'\mathfrak{R}) = \dot{\mathfrak{p}}' - \frac{\mathfrak{R}_0}{c}(\mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{p}}').$$

Wir bekommen also:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{R^3}\left[\mathfrak{p}' - \frac{\mathfrak{R}_0}{c}(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{p}}')\right] - 3(\mathfrak{p}'\mathfrak{R})\frac{\mathfrak{R}_0}{R^4} + \frac{1}{cR^2}\left[\dot{\mathfrak{p}}' - \frac{\mathfrak{R}_0}{c}(\mathfrak{R}\ddot{\mathfrak{p}}')\right] - 2\frac{\mathfrak{R}_0}{cR^3}(\dot{\mathfrak{p}}'\mathfrak{R})$$

$$= \frac{1}{R^3}[\mathfrak{p}' - 3\mathfrak{R}_0(\mathfrak{p}'\mathfrak{R})] + \frac{1}{cR^2}[\dot{\mathfrak{p}}' - 3\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\dot{\mathfrak{p}}')] - \frac{\mathfrak{R}_0}{c^2R}(\mathfrak{R}^0\ddot{\mathfrak{p}}')$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E} = \frac{1}{R^3}[3\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{p}') - \mathfrak{p}'] + \frac{1}{cR^2}[3\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\dot{\mathfrak{p}}') - \dot{\mathfrak{p}}'] \\ + \frac{1}{c^2R}[\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\ddot{\mathfrak{p}}') - \ddot{\mathfrak{p}}']\end{aligned}\right\} \qquad (30\,a)$$

Für $\mathfrak{p}' =$ konst reduziert sich die rechte Seite dieser Formel auf das erste Glied, in Übereinstimmung mit (26), Kap. III. Dieses erste Glied wollen wir mit $\mathfrak{E}^{(0)}$ bezeichnen. Das zweite Glied

$$\mathfrak{E}^{(1)} = \frac{1}{cR^2}[3\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\dot{\mathfrak{p}}') - \dot{\mathfrak{p}}']$$

stellt ein elektrisches Feld desselben Typus wie das erste dar, wobei aber die Feldstärke nicht mit der dritten Potenz, sondern mit dem *Quadrat* der Entfernung abnimmt und die Rolle des elektrischen Moments durch seine zeitliche Ableitung, d. h. den entsprechenden Impuls gespielt wird.

Das dritte Glied

$$\mathfrak{E}^{(2)} = \frac{1}{c^2R}[\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\ddot{\mathfrak{p}}') - \ddot{\mathfrak{p}}']$$

entspricht einem elektrischen Felde, daß umgekehrt proportional der ersten Potenz des Abstandes ist, und durch die zweite Ableitung des Moments nach der Zeit, d. h. durch die *Beschleunigung* der im Dipol schwingenden Ladungen bedingt wird.

Der Vektor $\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\ddot{\mathfrak{p}}')$ stellt offenbar die longitudinale Komponente von $\ddot{\mathfrak{p}}'$ dar, d. h. die Komponente des Vektors $\ddot{\mathfrak{p}}'$ in die Richtung des Radiusvektors $P'P = \mathfrak{R}$. Daraus folgt, daß die Differenz $\ddot{\mathfrak{p}}' - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\ddot{\mathfrak{p}}')$ der transversalen Komponente von $\ddot{\mathfrak{p}}'$ gleich ist, oder, mit anderen Worten, *der Projektion von $\ddot{\mathfrak{p}}'$ auf die zu $\mathfrak{R}$ senkrechte Ebene.*

Dementsprechend läßt sich $\mathfrak{E}^{(2)}$ in der Form

$$\mathfrak{E}^{(2)} = \frac{\mathfrak{R}_0 \times (\mathfrak{R}_0 \times \ddot{\mathfrak{p}}')}{c^2R} \qquad (31)$$

schreiben (mit Rücksicht darauf, daß $\mathfrak{R}_0\mathfrak{R}_0 = 1$ ist).

Das erste Glied in der Formel (30)

$$\mathfrak{H}^{(1)} = \frac{\dot{\mathfrak{p}}' \times \mathfrak{R}_0}{cR^2}$$

entspricht dem *Biot-Savart*schen Gesetz — mit der schon erwähnten

Korrektion für die Verspätung der elektromagnetischen Fernwirkungen. — Das zweite Glied

$$\mathfrak{H}^{(2)} = \frac{\ddot{\mathfrak{p}}' \times \mathfrak{R}_0}{c^2 R} \tag{32}$$

stellt ein magnetisches Feld desselben Typus wie $\mathfrak{H}^{(1)}$ dar, mit dem Unterschied, daß der elektrische Impuls $\dot{\mathfrak{p}}'$ durch die „Beschleunigung" $\ddot{\mathfrak{p}}'$ ersetzt wird, und die zweite Potenz des Abstands durch die *erste*, ebenso wie für $\mathfrak{E}^{(2)}$.

Die Formeln (31) und (32) zeigen, daß die Vektoren $\mathfrak{E}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ aufeinander und auf dem Radiusvektor $\mathfrak{R}$ senkrecht stehen. Dabei liegt $\mathfrak{E}^{(2)}$ in der durch $\mathfrak{R}$ und $\ddot{\mathfrak{p}}'$ gelegten „Meridionalebene", während $\mathfrak{H}^{(2)}$ dazu senkrecht steht. Die elektrischen Kraftlinien sind also die Meridiankreise und die magnetischen — die Breitenkreise einer Kugelfläche, welche den betreffenden Aufpunkt enthält und deren Polarachse $M'N'$ mit dem „Beschleunigungsvektor" $\ddot{\mathfrak{p}}'$ in dem entsprechenden effektiven Augenblick gleichgerichtet ist (Abb. 30).

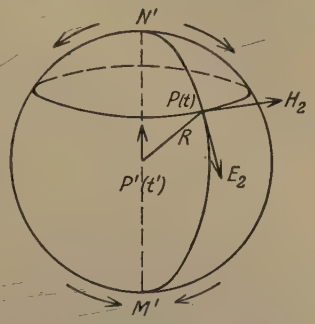

Abb. 30.

Man findet ferner aus (31) und (32), daß die Vektoren $\mathfrak{E}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ miteinander durch die Beziehungen

$$\mathfrak{E}^{(2)} = \mathfrak{H}^{(2)} \times \mathfrak{R}_0, \quad \mathfrak{H}^{(2)} = \mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{E}^{(2)} \tag{32a}$$

verknüpft sind. Daraus sieht man, daß sie *denselben* Betrag haben ($|\mathfrak{E}^{(2)}| = |\mathfrak{H}^{(2)}|$) und so orientiert sind, daß das Vektorprodukt $\mathfrak{E}^{(2)} \times \mathfrak{H}^{(2)}$ in die Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{R}$ fällt.

Es sei bemerkt, daß auf einer Kugelfläche mit einem anderen Radius $\mathfrak{R}_1$ die elektrischen und magnetischen Kraftlinien in demselben Augenblick t ganz anders gerichtet sein können, je nach der Richtung des „Beschleunigungsvektors" in dem entsprechenden effektiven Moment $t_1' = t - \frac{R_1}{c}$.

Für den gemeinsamen Betrag von $\mathfrak{E}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ haben wir nach (31) und (32), wenn der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\ddot{\mathfrak{p}}'$ durch θ bezeichnet wird

$$E^{(2)} = H^{(2)} = \frac{|\ddot{\mathfrak{p}}'|}{c^2 R} \sin\theta . \tag{32b}$$

Daraus sieht man, daß in der Richtung der „Polarachse", d. h. in den „Polen" M' und N', $E^{(2)}$ und $H^{(2)}$ verschwinden, während sie ihre maximale Größe auf dem Äquator erreichen.

In der nächsten Nähe des Oszillators muß allgemein das elektrische Feld $\mathfrak{E}^{(0)}$ die anderen zwei ($\mathfrak{E}^{(1)}$ und $\mathfrak{E}^{(2)}$) an Stärke enorm überwiegen. Da aber dieses Feld — oder genauer ausgedrückt, dieser Anteil des elektrischen Feldes — mit dem Abstand sehr rasch abnimmt, muß für mittlere

Entfernungen das Feld $\mathfrak{E}^{(1)}$ und das damit verknüpfte *Biot-Savart*sche Feld $\mathfrak{H}^{(1)}$, die der zweiten Potenz des Abstandes umgekehrt proportional sind, die Herrschaft übernehmen.

Für genügend große Abstände muß endlich das soeben untersuchte elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$ in den Vordergrund treten, so daß die beiden anderen praktisch ganz außer acht gelassen werden dürfen.

Zusammenfassend bekommen wir das folgende Bild für die Ausbreitung der Wirkung des betrachteten Oszillators. In jedem Augenblick bilden sich um den Punkt P' neue infinitesimale kugelförmige Wirkungsflächen oder „Wellen", die sich nach allen Seiten gleichförmig mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, so daß ihre Radien pro Zeiteinheit um c wachsen. Am Anfang ändert sich allmählich die Struktur des elektromagnetischen Feldes auf jeder solchen Kugelfläche, bald aber wird die auf Abb. 30 angedeutete Struktur erreicht, die nachher unverändert bleibt: nur fällt die elektrische und magnetische Feldstärke mit weiterer Vergrößerung der Kugel umgekehrt proportional zum Radius ab.

§ 7. Elektromagnetische Wellen und das Wesen des Lichtes.

Wir stellen uns nun vor, daß der Oszillator rein sinusoidale oder „harmonische" Schwingungen mit der Periode τ ausführt. Dann müssen in jedem festen Raumpunkte die elektrische und magnetische Feldstärke mit derselben Periode schwingen. Dieser zeitlichen Periodizität der Schwingungen in demselben Raumpunkte entspricht eine räumliche Periodizität längs jedes aus P' gezogenen Strahles in demselben Augenblick. Und zwar muß in solchen Punkten irgendeiner dieser Strahlen, die voneinander in einem Abstand

$$\lambda = c\tau \tag{33}$$

liegen, die elektrische (bzw. magnetische) Feldstärke stets *dieselbe Phase* haben.

Stellt man die elektrische Feldstärke in jedem Punkte graphisch mittels einer dazu parallelen und proportionalen Strecke dar, so bekommt man im Fall, daß der Oszillator linear parallel zu einer bestimmten Geraden MN schwingt, das auf der Abb. 31 angedeutete Bild, d. h. eine Kurve, die sich von einer gewöhnlichen Sinusoide nur dadurch unterscheidet, daß die Schwingungsamplitude sich längs des Strahles langsam vermindert.

Führt der Oszillator eine Schwingung von elliptischer Form aus, so bekommt man statt der oben angeführten Sinuskurve eine schraubenförmige Kurve mit konstanter Ganghöhe λ und langsam abnehmendem Umfang der einzelnen Windungen.

Wegen der Analogie des beschriebenen Vorgangs mit der bekannten wellenartigen Fortpflanzung von mechanischen Schwingungen in mate-

riellen Medien (oder auf ihren Trennflächen) pflegt man auch hier von „Wellen", und zwar *elektromagnetischen Wellen* zu sprechen. Die Größe λ heißt die *Wellenlänge* der betrachteten elektromagnetischen Schwingungen; dabei bezeichnet man die letzteren als linear, zirkular oder elliptisch „polarisiert", je nach der Gestalt der Kurve, die im betreffenden Punkte von der den elektrischen Vektor darstellenden Strecke beschrieben wird. Der Polarisationstypus der Schwingungen bleibt offenbar für alle Punkte desselben Strahles unverändert.

Es sei bemerkt, daß die erwähnte Analogie nur ganz formaler Natur ist. Physikalisch hat der Prozeß der Fortpflanzung der elektromagnetischen Wirkungen oder „Wellen" im leeren Raume *absolut nichts zu tun* mit der Fortpflanzung von elastischen Wellen in materiellen Körpern.

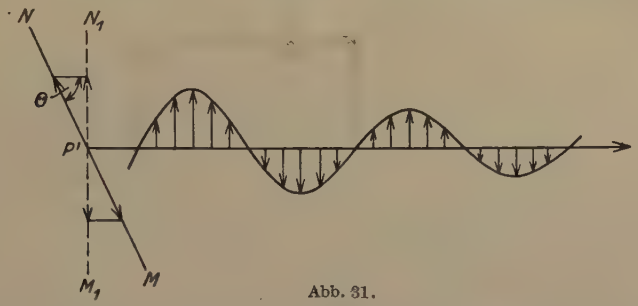

Abb. 31.

Im letzteren Falle hat man einen Vorgang vor sich, der auf der Wirkung von Nachbaratomen (oder Molekülen) aufeinander beruht, wobei an jeder Stelle eine *Schwingungsbewegung* der Atome stattfindet. Die Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen bedeutet dagegen nichts anderes als eine *retardierte Fernwirkung* des Oszillators auf die ihn umgebenden Teilchen — eine Fernwirkung, die nur dann als „Bewegung" aufgefaßt werden kann, wenn in dem betreffenden Raumpunkte ein schwingungsfähiges Teilchen oder „Resonator" sich tatsächlich befindet. Die elektromagnetischen Schwingungen stellen gar keine Schwingungs*bewegung* dar. Sie sind als *Kraftschwingungen* aufzufassen, deren wellenartiger Charakter durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der aus dem Oszillator ausgehenden Wirkung in Verbindung mit dem periodischen Charakter der Bewegung der entsprechenden elektrischen Ladungen entsteht. Man muß zwischen dieser *Schwingungsbewegung* der das elektromagnetische Feld erzeugenden geladenen materiellen Teilchen („Elektronenschwingungen") und den *Schwingungen der Feldstärke* im umgebenden Raum („Kraftschwingungen") scharf unterscheiden; sie stehen nämlich zueinander in derselben Beziehung wie die Ursache zur Wirkung.

Die Kraftschwingungen, die durch gewisse „primäre" Elektronenschwingungen in einem bestimmten Teilchen erzeugt werden, können

ihrerseits neue „sekundäre" Elektronenschwingungen in anderen Teilchen hervorbringen, sofern letztere sich in deren Umgebung befinden und schwingungsfähig sind. Diese sekundären Elektronenschwingungen müssen neue sekundäre Kraftschwingungen derselben Periode und Wellenlänge wie die primäre erzeugen und so fort. Diese Erscheinung, d. h. die Erscheinung der sekundären elektromagnetischen Wellen, pflegt man als die „Zerstreuung" oder die „Reflexion" der primären Wellen zu bezeichnen.

Wie schon oben angedeutet war, fällt die theoretisch (als Verhältnis der elektromagnetischen Ladungseinheit zur elektrostatischen) bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen *genau* mit der empirisch gemessenen Geschwindigkeit des Lichtes zusammen. Schon diese einzige Tatsache würde ausreichen zur Begründung der *elektromagnetischen Lichttheorie*, d. h. der Theorie, daß die Lichtwellen als elektromagnetische Wellen der entsprechenden (experimentell bestimmten) Länge aufzufassen sind. Durch die oben durchgeführte Analyse des elektromagnetischen Feldes eines elementaren Oszillators scheint nun diese Auffassung ganz gesichert zu werden.

Denn das wesentliche Merkmal der Lichtschwingungen besteht bekanntlich in ihrer *Transversalität* (die experimentell aus den Polarisationserscheinungen folgt). Wir haben aber soeben gesehen, daß die elektrische und magnetische Feldstärke in genügend großer Entfernung von dem Oszillator *senkrecht* zum entsprechenden Strahl stehen. Es sei bemerkt, daß diese Transversalität der elektromagnetischen Kraftschwingungen gewissermaßen doppelter Natur ist. Denn sie gilt nicht nur in Hinsicht auf die Richtung der Feldstärken relativ zum Strahl, sondern auch in dem Sinne, daß diese Feldstärken nur von der Projektion der entsprechenden Elektronenschwingungen auf die zu diesem Strahl senkrechte Ebene abhängen (z. B. auf die Gerade $M_1 N_1$ im Fall der Abb. 31).

Da ferner die Vektoren $\mathfrak{E}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ umgekehrt proportional zur ersten Potenz des Abstandes R sind, muß die Energie der elektromagnetischen Kraftschwingungen, die, wie wir unten zeigen werden, dem Quadrat dieser Vektoren (oder ihrem Produkte) proportional ist, mit dem Quadrat von R abnehmen — im Einklang mit dem empirischen Gesetz für die Abhängigkeit der Lichtstärke vom Abstand der entsprechenden Punkte von der Lichtquelle.

Was die Lichtquelle anbetrifft, so kann sie offenbar aufgefaßt werden als ein System von elementaren elektrischen Oszillatoren, welche mit den elementaren Lichtquellen — den Atomen und Molekülen des betreffenden Körpers — identisch sind. Dies bietet den einfachsten Beweis der *elektrischen Natur der Materie*, d. h. der Tatsache, daß die kleinsten Teilchen der gewöhnlichen neutralen Materie — die Atome — aus noch kleineren Teilchen, die feste elektrische Ladungen tragen (und deshalb

Elektronen heißen), zusammengesetzt sind. — Denn alles, was *sichtbar* ist, sei es „primär" oder „sekundär" — durch Beleuchtung mit fremdem Licht, muß aus schwingungsfähigen elektrisierten Teilchen bestehen. Die elektrische Natur der materiellen Körper folgt also unmittelbar aus ihrer Sichtbarkeit.

Das sichtbare Licht umfaßt bekanntlich nur einen sehr engen Bereich von Wellenlängen, die zwischen $\lambda = 7{,}5 \cdot 10^{-10}$ cm (rotes Licht) und $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ cm (violettes Licht) liegen. Außerhalb dieses Spektralgebietes liegen die „unsichtbaren Lichtstrahlen" — und zwar nach der Seite der kurzen Wellen die ultravioletten und die Röntgenstrahlen (λ bis 10^{-9} cm), und nach der anderen Seite die ultraroten Strahlen (bis etwa $\lambda = 10^{-2}$ cm), an die sich die langwelligen „elektrischen Strahlen" der drahtlosen Telegraphie und Telephonie anschließen. Bei dem letzteren, wo die Wellenlänge einige hundert Meter erreicht, spricht man gewöhnlich von Wellen und nicht von Strahlen. Die Strahlen können nur formal definiert werden als *Fortpflanzungslinien der Wellen.* Dagegen erhält im Bereich kurzer Wellenlängen der Begriff des Strahles eine sozusagen physikalische Realität, denn dabei wird es möglich, aus einer beliebig breiten Wellenfläche ein sehr dünnes fast linienförmiges Strahlenbündel abzuschirmen. Die Dicke eines solchen Strahlenbündels bleibt doch, wie eine genauere Untersuchung dieser Frage zeigt, immer groß im Verhältnis zur Wellenlänge.

§ 8. Übergang von kugelförmigen zu ebenen Wellen.

Das elektrische Moment eines harmonisch schwingenden Oszillators drückt sich als Funktion der Zeit durch den reellen Anteil der komplexen Größe

$$\mathfrak{p}(t) = \mathfrak{p}_0 e^{i\omega t} \tag{34}$$

aus. Dabei ist

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu, \tag{34a}$$

wo ν die *Frequenz* der Schwingungen, d. h. ihre Anzahl pro Zeiteinheit bedeutet. Die Amplitude $\mathfrak{p}_0$ muß allgemein auch als ein *komplexer Vektor* aufgefaßt werden, d. h. sie stellt sich in der Form dar

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{a} - i\mathfrak{b}, \tag{34b}$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei gewöhnliche (reelle) Vektoren sind. Der reelle Anteil von (34) lautet also, ausführlich geschrieben (wegen $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t$):

$$\mathfrak{p}\,(t) = \mathfrak{a}\cos\omega t + \mathfrak{b}\sin\omega t. \tag{34c}$$

Jedes Glied der rechten Seite stellt eine lineare harmonische Schwingung dar mit der Amplitude a bzw. b und derselben Frequenz ν. Durch Zusammensetzung solcher Schwingungen ergibt sich bekanntlich eine

Ellipsenschwingung. Betrachtet man $\mathfrak{p}$ als den Radiusvektor eines bewegten Teilchens, z. B. des positiven Dipolendes mit der Ladung 1, wobei das negative festgehalten sein mag, so muß dieses Teilchen sich nach (34c), auf einer Ellipse mit den konjugierten Halbmessern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bewegen (letztere können speziell mit den Halbachsen der Ellipse zusammenfallen).

Aus (34) bekommen wir durch zweimalige Differentiation

$$\ddot{\mathfrak{p}}(t) = -\omega^2 \mathfrak{p}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \mathfrak{p}$$

und folglich nach (31) und (32)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}^{(2)} &= -\mathfrak{R}_0 \times (\mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{p}_0) \frac{\omega^2}{c^2 R} e^{i\omega(t - R/c)} \\ \mathfrak{H}^{(2)} &= -(\mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{R}_0) \frac{\omega^2}{c^2 R} e^{i\omega(t - R/c)}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Dabei bedeutet die Größe

$$\omega(t - R/c) = 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{R}{\lambda}\right) \tag{36}$$

die *Phase* der elektromagnetischen Schwingungen im Abstand R vom Oszillator. Wir sehen also, daß die Wellenlänge $c\tau = \lambda$ bezüglich R dieselbe Rolle spielt wie die Periode τ bezüglich der Zeit t.

Was den Typus („Polarisation") der betrachteten Kraftschwingungen anbetrifft, so ist er für verschiedene Richtungen von $\mathfrak{R}$ verschieden. Z. B. sind in solchen Richtungen, die in der Schwingungsebene von $\mathfrak{p}$ liegen, die Kraftschwingungen linear polarisiert. Im allgemeinen reproduzieren sie die Projektion von $\mathfrak{p}$ auf die zu $\mathfrak{R}$ senkrechte Ebene. Es sei bemerkt, daß die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in jedem Augenblick t *dieselbe* Richtung hat, wie die transversale Projektion von $\mathfrak{p}$ im entsprechenden effektiven Augenblick $t - R/c$.

Die Felder $\mathfrak{E}^{(1)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ und $\mathfrak{E}^{(0)}$ schwingen an jeder Stelle auf eine zu $\mathfrak{E}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ ähnliche Weise, wobei ihre Phase auch durch (36) gegeben ist. Aus (30a), (30) und (34) folgt, daß ihre Amplituden ungefähr in dem Verhältnis

$$E^{(0)} : E^{(1)} : E^{(2)} \eqq \frac{1}{R^3} : \frac{\omega}{cR^2} : \frac{\omega^2}{c^2 R}, \quad H^{(1)} : H^{(2)} \eqq \frac{\omega}{cR^2} : \frac{\omega^2}{c^2 R},$$

d. h. wegen $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \eqq \frac{1}{\lambda}$,

$$E^{(0)} : E^{(1)} : E^{(2)} = 1 : \frac{R}{\lambda} : \frac{R^2}{\lambda^2}, \quad H^{(1)} : H^{(2)} \eqq \frac{R}{\lambda} : \frac{R^2}{\lambda^2}$$

zueinander stehen; dabei ist zu beachten, daß $E^{(2)} = H^{(2)}$ und $E^{(1)} \eqq H^{(1)}$ ist.

Wir sehen also, daß im Falle eines harmonisch schwingenden Oszillators die Wellenlänge als *Längeneinheit* benützt werden kann zur Bestimmung der relativen Stärke der drei Teilfelder, die von $\mathfrak{p}$, $\dot{\mathfrak{p}}$ und $\ddot{\mathfrak{p}}$ abhängen. Und zwar ist für „kleine" Abstände, d. h. solche die klein gegenüber λ sind, das erste Feld das stärkste. Dagegen braucht man

für „große" Abstände — groß wiederum im Verhältnis zur Wellenlänge — nur das Feld $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$ zu berücksichtigen. Diese Verhältnisse lassen sich durch die Tatsache illustrieren, daß die Nachbarmoleküle eines festen oder flüssigen Körpers sich kräftig gegenseitig anziehen, während sie auf entfernte Moleküle anderer Körper nur eine Lichtwirkung ausüben. Die Kräfte erster Art — die sog. *Kohäsionskräfte* — rühren von dem Feld $\mathfrak{E}^{(0)}$ oder von dem entsprechenden „statischen" Feld der elektrischen Momente zweiter und höherer Ordnung her. Dagegen müssen die Kräfte zweiter Art dem Felde $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$ entsprechen (es sei erinnert, daß die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes etwa 10^{-5} cm beträgt, also 1000 mal größer ist als die Molekularabstände, doch aber sehr klein gegenüber den gewöhnlichen Abständen zwischen verschiedenen „molaren" Körpern.)

Das Raumgebiet, wo das elektromagnetische Feld sich praktisch auf das „Lichtfeld" $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$ reduziert, pflegt man als die *Wellenzone* des betreffenden Oszillators zu bezeichnen. Diese Wellenzone fängt also in einem gewissen Abstand vom Oszillator an, der groß genug relativ zur Wellenlänge ist, und erstreckt sich ins Unendliche. — In der nächsten Nähe des Oszillators herrscht dagegen das „elektrostatische" Feld $\mathfrak{E}^{(0)}$; dieses Feld ist von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen praktisch unabhängig (d. h. ergibt sich ohne beträchtliche Änderung auch wenn $c = \infty$ gesetzt wird).

Wir stellen uns nun vor, daß der Oszillator sich in einem unendlich entfernten Punkte P' befindet. In diesem Falle kann man die von ihm ausgesandten Kugelwellen in dem betrachteten im Endlichen liegenden Raumgebiet offenbar als *eben* behandeln und die entsprechenden Radien — d. h. die von P' ausgehenden Lichtstrahlen — als eine Schar von einander parallelen Geraden, deren Richtung durch den *konstanten* Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bezeichnet werden mag (dieser Vektor tritt jetzt anstatt des Einheitsvektors $\mathfrak{R}_0$ ein). Dann ist

$$R = \mathfrak{R}\mathfrak{R}_0 = (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')\,\mathfrak{n} = \mathfrak{r}\mathfrak{n} - \mathfrak{r}'\mathfrak{n} = \mathfrak{r}\mathfrak{n} + \text{konst},$$

wobei $\mathfrak{r}$ wie früher den Radiusvektor des betrachteten Aufpunkts P bezüglich irgendeines *im Endlichen* liegenden Punktes O bedeutet.

Der allgemeine Ausdruck des Polarisationspotentials (28a) nimmt für den Fall eines harmonischen Oszillators die Gestalt

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \frac{\mathfrak{p}_0}{R}\, e^{i\omega(t - R/c)} \qquad (37)$$

an. Der Abstand R tritt in diesem Ausdruck zweimal auf, und zwar erstens in dem Phasenfaktor und zweitens in dem Amplitudenfaktor. Was den Phasenfaktor anbetrifft, so läßt er sich im betrachteten Falle ($R \to \infty$) in der Form

$$\text{konst} \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{c}\right)}$$

darstellen, und ist vom Radiusvektor $\mathfrak{r}$ etwa ebenso abhängig wie bei

endlicher Entfernung des Oszillators. Den Amplitudenfaktor kann man aber als eine praktisch konstante Größe behandeln, denn, bei einem endlichen Werte von $\frac{\mathfrak{p}_0}{R}$ für irgendeinen Punkt, z. B. O, muß die Differenz $\Delta \frac{\mathfrak{p}_0}{R}$ für zwei verschiedene im Endlichen liegende Punkte unendlich klein sein $\left(\text{wegen } \Delta \frac{\mathfrak{p}_0}{R} = -\frac{\mathfrak{p}_0}{R^2} \Delta R\right)$.

Die Formel (37) reduziert sich also auf

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{Z}_0 e^{i(\omega t - \mathfrak{k}\mathfrak{r})}, \tag{37a}$$

wo

$$\mathfrak{k} = \frac{\omega}{c} \mathfrak{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{n} \tag{37b}$$

ein die Fortpflanzungsrichtung der Wellen und zugleich ihre Länge bestimmender Vektor ist. Der konstante Vektor $\mathfrak{Z}_0$ stellt die (komplexe) Amplitude des Polarisationspotentials dar.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die durch den oben betrachteten Grenzübergang gewonneneFormel (37a) tatsächlich die Differentialgleichung (22) befriedigt. In unserem Fall reduziert sich diese Gleichung auf die entsprechende homogene Gleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $e^{i(\omega t - \mathfrak{k}\mathfrak{r})} = \Phi$, so wird, nach (37a),

$$\nabla^2 \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 \nabla^2 \Phi = \mathfrak{Z}_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi,$$

oder, wegen

$$\operatorname{grad} \Phi = \Phi \operatorname{grad} i(\omega t - \mathfrak{k}\mathfrak{r}) = -i\mathfrak{k}\Phi$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{k}\Phi = \mathfrak{k} \cdot \operatorname{grad} \Phi,$$

$$\nabla^2 \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 (-ik)^2 \Phi = -k^2 \mathfrak{Z}_0 \Phi = -k^2 \mathfrak{Z}.$$

Andererseits haben wir

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{c^2 \partial t^2} = \mathfrak{Z}_0 \frac{(i\omega)^2}{c^2} \Phi = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathfrak{Z},$$

d. h. nach (37b)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{Z}.$$

Aus (37a) bekommt man die folgenden Ausdrücke für die Potentiale $\mathfrak{A}, \varphi$ und die Feldstärken $\mathfrak{H}, \mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \mathfrak{Z} = ik\mathfrak{Z},$$

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z} = -\mathfrak{Z}_0 \operatorname{grad} \Phi = i\mathfrak{k}\mathfrak{Z} = \mathfrak{n}\mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = ik \operatorname{rot} (\mathfrak{Z}_0 \Phi) = ik \operatorname{grad} \Phi \times \mathfrak{Z}_0 = k\Phi\, \mathfrak{k} \times \mathfrak{Z}_0,$$

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{Z}) \operatorname{grad} \Phi - (ik)^2 \mathfrak{Z}$$

$$= -(\mathfrak{k}\mathfrak{Z}_0)\mathfrak{k}\Phi + k^2 \mathfrak{Z} = -(\mathfrak{k}\mathfrak{Z})\mathfrak{k} + k^2 \mathfrak{Z},$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E} &= k^2 \mathfrak{n} \times (\mathfrak{Z} \times \mathfrak{n}) \\ \mathfrak{H} &= k^2 \mathfrak{n} \times \mathfrak{Z}\end{aligned}\right\}. \qquad (37\,c)$$

Diese Formeln zeigen, daß die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht zum Vektor $\mathfrak{n}$, d. h. zur Wellenfortpflanzungsrichtung stehen; ferner sind sie senkrecht zueinander und ihrem Betrage nach identisch. Diese Beziehungen sind durch die folgenden sich aus (37c) leicht ergebenden Relationen ausgedrückt [vgl. (32a)]:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{n}.$$

Wir sehen also, daß im betrachteten Fall (unendlich entfernter harmonischer Oszillator, ebene Wellen) die Felder vom Typus $\mathfrak{E}^{(0)}$ und $\mathfrak{E}^{(1)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$ verschwinden; das elektromagnetische Feld reduziert sich auf den für die Wellenzone charakteristischen Typus $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$, wobei die Amplitude der Kraftschwingungen vom Abstand unabhängig wird (was selbstverständlich zu erwarten war).

Diese Resultate lassen sich leicht verallgemeinern für *ebene* Wellen von *willkürlicher* Gestalt (die auch nicht periodisch zu sein brauchen). Für einen *nicht* harmonischen unendlich entfernten Oszillator muß man (37a) durch die Formel

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{Z}\left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{c}\right) \qquad (38)$$

ersetzen, wo $\mathfrak{Z}(t')$ eine durch die Schwingungsart des Oszillators bestimmte, von vornherein aber ganz willkürliche Funktion des Arguments $t' = t - \frac{1}{c}(\mathfrak{n}\mathfrak{r})$, d. h. der effektiven Zeit, ist.

Diese Formel ergibt sich unmittelbar aus (28a) für $R \to \infty$ und stellt die einfachste Lösung der Gleichung

$$\Delta^2 \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = 0 \qquad (38\,a)$$

dar, welche keine Beschränkung hinsichtlich der Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes von der Zeit enthält.

Wegen des linearen Charakters der Gleichung (38a), läßt sich ihre allgemeinste Lösung als eine Summe aller voneinander unabhängigen Lösungen des einfachsten harmonischen Typus (37a) darstellen; dabei darf der „Phasenvektor" $\mathfrak{k}$ beliebige Werte (und Richtungen) annehmen $\left(\text{unter der Bedingung } \frac{\omega^2}{c^2} = k^2\right)$, ebenso wie die Amplitude $\mathfrak{Z}_0$. Ist eine Lösung von (38a) für ein endliches Raumgebiet gesucht, die gewissen *Randbedingungen* auf der begrenzenden Fläche unterworfen ist, so sind im allgemeinen nur gewisse diskrete Werte (und Richtungen) von $\mathfrak{k}$ mit diesen Bedingungen verträglich; die entsprechenden Amplituden bleiben auch hier ganz beliebig.

Im ersten Falle bekommt man für $\mathfrak{Z}$ ein Integral von der Gestalt

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r},t)=\int\int \mathfrak{Z}_0(\mathfrak{k})e^{i(ck t-\mathfrak{k}\mathfrak{r})}k^2 dk\, d\Omega, \tag{38b}$$

wo $d\Omega$ den infinitesimalen räumlichen Winkel — das „Richtungsintervall" des Vektors $\mathfrak{k}$ — bedeutet und $\mathfrak{Z}_0(\mathfrak{k})$ — eine beliebige vektorielle Funktion von $\mathfrak{k}$. Da im zweiten Fall die den Bedingungen des Problems genügenden „Eigenwerte" von $\mathfrak{k}$ eine dreifach unendliche abzählbare Menge bilden, bekommt man für $\mathfrak{Z}$ eine dreifach-unendliche trigonometrische Reihe. Es soll aber nochmals betont werden, daß solche Lösungen der homogenen Gleichung (38a) sich immer interpretieren lassen als die Potentiale von elektrischen Ladungen (speziell Dipolen), die außerhalb des betrachteten Raumgebiets — im Endlichen oder Unendlichen — liegen. Es besteht also in dieser Hinsicht kein prinzipieller Unterschied gegenüber dem in Kap. IV behandelten Fall der zeitlich konstanten elektromagnetischen Felder.

§ 9. Das Huyghenssche Prinzip.

Ebenso wie in dem erwähnten Spezialfall kann man ferner das innerhalb (oder außerhalb) einer geschlossenen Fläche S herrschende *zeitlich variable* Feld, das im entsprechenden Gebiet der Gleichung (38a) genügt, d. h. durch *äußere* (bzw. innere) elektrische Ladungen erzeugt wird, auf eine zeitlich variable *Verteilung der Elektrizität auf der Grenzfläche S selbst* zurückführen. Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden nicht das Polarisationspotential, sondern das skalare Potential φ betrachten. Wir nehmen also an, daß innerhalb S die Gleichung

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

erfüllt ist und wollen versuchen, den Wert des Potentials φ^* für irgendeinen (inneren) Punkt P^*, durch die Randwerte von φ auf S — eventuell auch die entsprechenden Randwerte von $\nabla\varphi$ —, die als bekannte Funktionen der Zeit anzusehen sind, darzustellen.

Diese Aufgabe wird gelöst mittels der allgemeinen Gleichung (21) des vorigen Kapitels, und zwar am einfachsten, wenn für die Hilfsfunktion ψ der frühere Ansatz

$$\psi=\frac{1}{R}$$

gemacht wird (die Bezeichnungen sind dieselben wie dort). Dabei muß man aber für jeden Punkt P das Potential φ nicht für denselben Augenblick t betrachten, für welchen sein Wert φ^* im P^* gesucht wird, sondern für den entsprechenden „effektiven" Augenblick

$$t'=t-R/c,$$

wobei R den Abstand PP^* bedeutet.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi' = \varphi(\mathfrak{r}, t').$$

Dann läßt sich die Formel (21) folgendermaßen schreiben:

$$\oint \left(\frac{1}{R}\nabla_\nu \varphi' - \varphi' \nabla_\nu \frac{1}{R}\right) d\Sigma = \oint \left(\frac{1}{R}\nabla_n \varphi' - \varphi' \nabla_n \frac{1}{R}\right) dS - \int \frac{1}{R}\nabla^2 \varphi' \, dV^*. \quad (39)$$

Neben der Operation ∇, die eine vollständige Differentiation nach dem Argument $\mathfrak{r}$ bedeutet, führen wir nun die entsprechende Operation ∇' ein, welche die Differentiation nach $\mathfrak{r}$ *bei festgehaltenem* t' bedeuten soll. Es ist also

$$\nabla \varphi' = \nabla' \varphi' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t' \quad (39a)$$

und

$$\nabla^2 \varphi' = \operatorname{div} \nabla \varphi' = \operatorname{div}'(\nabla \varphi') + \frac{\partial}{\partial t'}(\nabla \varphi') \nabla t',$$

d. h. nach der vorangehenden Formel

$$\nabla^2 \varphi' = \nabla'^2 \varphi' + \operatorname{div}'\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t'\right) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \varphi' \cdot \nabla t' + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} (\nabla t')^2.$$

Berücksichtigt man ferner die Formeln

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \nabla' R = -\frac{1}{c} \nabla R, \quad (\nabla R)^2 = 1,$$

$$\operatorname{div}'\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t'\right) = \nabla' \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \cdot \nabla t' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \operatorname{div}' \nabla t' = -\nabla' \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} \cdot \nabla R - \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} \operatorname{div} \nabla R,$$

und

$$\operatorname{div} \nabla R = \operatorname{div} \frac{\mathfrak{R}}{R} = \frac{2}{R},$$

so wird:

$$\nabla^2 \varphi' = \nabla'^2 \varphi' - \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} - 2 \nabla' R \cdot \nabla' \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} + \frac{\partial^2 \varphi'}{c^2 \partial t'^2},$$

oder schließlich, da φ' die Gleichung

$$\nabla'^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} = 0$$

befriedigt,

$$\nabla^2 \varphi' = 2 \left\{ -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} - \nabla' R \cdot \nabla' \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} + \frac{\partial^2 \varphi'}{c^2 \partial t'^2} \right\}. \quad (39b)$$

Die partielle Differentiation nach t' kann man hier offenbar durch die partielle Differentiation nach R ersetzen, wobei

$$-\frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \varphi'}{c^2 \partial t'^2} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial R^2}$$

wird. Wir führen ferner die *totale* Differentiation nach R ein, gemäß der folgenden Formel:

$$\frac{d \varphi'}{d R} = \frac{\partial \varphi'}{\partial R} + \nabla' \varphi' \cdot \nabla' R. \quad (40)$$

Es bedeutet also $\frac{d \varphi'}{d R} \cdot d R$ die Änderung von φ' längs einer unendlich

kleinen Strecke dR der Geraden P^*P bei festgehaltenem Werte der Zeit t. Wir schreiben nun (39b) in der Gestalt

$$\nabla^2\varphi' = 2\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial R^2} + \nabla'\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\cdot\nabla' R\right\}.$$

Nach (40) ist aber, wenn φ' durch $\frac{\partial\varphi'}{\partial R}$ ersetzt wird,

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial R^2} + \nabla'\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\cdot\nabla' R = \frac{d}{dR}\frac{\partial\varphi'}{\partial R}.$$

Man hat folglich

$$\nabla^2\varphi' = \frac{2}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right). \tag{40a}$$

Nun läßt sich das in (39) auftretende Volumintegral

$$\int\frac{1}{R}\nabla^2\varphi' dV^* = 2\int\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)dV^*$$

in ein Flächenintegral über S und Σ transformieren. Setzt man $dV^* = R^2 dR\, d\Omega$, wo $d\Omega$ einen unendlich kleinen räumlichen Winkel (mit der Spitze in P^*) bedeutet, so wird

$$\int\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)dV^* = \int d\Omega\int_{R_1}^{R_2}\frac{d}{dR}\left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)dR = \int d\Omega\left\{\left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)_2 - \left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)_1\right\};$$

dabei beziehen sich die Indizes 1 und 2 auf die Grenzflächen Σ bzw. S.— Wir führen nun die zu dem Winkelelement $d\Omega$ gehörigen Flächenelemente $d\Sigma$ und dS ein. Da offenbar $\cos(nR_2) = (\nabla_n R)_2$ und $\cos(\nu R_1) = (\nabla_\nu R)_1$ ist, hat man die Beziehungen

$$R_2^2\, d\Omega = dS\cdot(\nabla_n R)_2, \quad R_1^2\, d\Omega = d\Sigma\cdot(\nabla_\nu R)_1.$$

Es wird also

$$\int\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)dV^* = \oint\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\nabla_n R\, dS - \oint\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\nabla_\nu R\, d\Sigma,$$

und folglich nach (39):

$$\oint\left(\frac{1}{R}\nabla_\nu\varphi' - \frac{2}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\nabla_\nu R - \varphi'\nabla_\nu\frac{1}{R}\right)d\Sigma$$

$$= \oint\left(\frac{1}{R}\nabla_n\varphi' - \frac{2}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\nabla_n R - \varphi'\nabla_n\frac{1}{R}\right)dS$$

Wegen (39a) mit Rücksicht auf $\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}\nabla t' = \frac{\partial\varphi'}{\partial R}\nabla R$, und

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\nabla R - \varphi'\nabla\frac{1}{R} = -\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial R} - \frac{1}{R^2}\varphi'\right)\nabla R = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\varphi'}{R}\right)\cdot\nabla R$$

läßt sich diese Formel in der Gestalt

$$\oint\left(\frac{1}{R}\nabla'_\nu\varphi' - \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\varphi'}{R}\right)\nabla'_\nu R\right)d\Sigma = \oint\left(\frac{1}{R}\nabla'_n\varphi' - \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\varphi'}{R}\right)\nabla'_n R\right)dS \tag{40b}$$

schreiben.

Wir denken uns nun die innere Oberfläche Σ auf den Punkt P^* zusammengezogen. Dann wird ebenso wie in dem vorher betrachteten Fall eines zeitlich konstanten Feldes (vgl. § 6, Kap. IV):

$$\lim_{\Sigma \to 0} \oint \frac{1}{R} \nabla'_\nu \varphi' \, d\Sigma = 0, \quad \lim \oint \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{R}\right) \nabla'_n R \, d\Sigma$$

$$= -\varphi^* \oint \frac{\nabla_n R}{R^2} \, d\Sigma = -4\pi\varphi^*$$

und schließlich

$$\varphi^* = \oint \frac{\nabla'_n \varphi'}{4\pi R} \, dS - \oint \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{4\pi R}\right) \nabla'_n R \, dS \tag{41}$$

Diese Formel ist die gesuchte Verallgemeinerung der Formel (21b), Kap. IV; sie stellt das Potential im Punkte P^* dar als die Summe zweier Anteile, deren erster von einer Flächenladung mit der zeitlich variablen Dichte $\frac{\nabla'_n \varphi}{4\pi}$ abhängt, während die zweite einer Doppelschicht entspricht. Man kann ferner leicht einsehen, daß ebenso wie im statischen Fall die rechte Seite von (41) für einen *außerhalb* S liegenden Punkt P^* verschwindet.

Betrachtet man das Feld außerhalb S, das durch innere Ladungen erzeugt wird, so muß man zur Berechnung des Potentials noch eine die beiden Flächen S und Σ einhüllende Fläche S' einführen, die man dann ins Unendliche sich ausdehnen läßt. Falls dabei angenommen werden kann, daß in unendlich entfernten Punkten nur das statische Feld herrscht (d. h. daß die innerhalb S befindlichen Oszillatoren nur eine endliche Zeit vor t zu schwingen begonnen haben), so fällt das über S' erstreckte Integral weg und man bekommt wieder die Formel (41), wobei aber jetzt n die *innere* und nicht die äußere Normale zu S bedeuten soll.

Durch passende Wahl der Hilfsfunktion ψ könnte man das Potential φ^* entweder nur durch die Grenzwerte von φ oder nur durch die Grenzwerte von $\nabla'_n \varphi$, ebenso wie im statischen Fall, darstellen. Auf diese Frage wollen wir aber hier nicht eingehen.

Die Darstellbarkeit der elektromagnetischen Potentiale innerhalb eines leeren Raumgebietes durch die Randwerte dieser Potentiale oder der entsprechenden Feldstärken auf der das Gebiet (von innen oder von außen) begrenzenden Oberfläche bezeichnet man als *Huyghens*sches *Prinzip*. Ursprünglich war dieses Prinzip etwas enger und physikalisch anschaulicher gefaßt, indem man nach *Huyghens* behauptete, daß jedes Flächenelement einer Lichtwelle als eine „virtuelle Lichtquelle", d. h. als Mittelpunkt neuer elementarer Kugelwellen behandelt werden kann. Kennt man also die Gestalt einer fortschreitenden Welle in irgendeinem Augenblick, so kann man durch Konstruktion solcher elementarer Kugelwellen die resultierende Gestalt der Welle für irgendeinen späte-

ren Augenblick bestimmen, ohne sich um die tatsächliche „primäre" Lichtquelle zu kümmern. Auf diese Weise werden bekanntlich Probleme der Reflexion, Brechung und Beugung des Lichtes in der Wellenoptik am einfachsten — fast ohne Rechnung — gelöst. Eine vollständige Lösung dieser Probleme, die nicht nur die Gestalt der Wellenfront, sondern auch die Intensitäten und die Polarisation der Kraftschwingungen berücksichtigt, verlangt aber verwickeltere Methoden, die wir später (II. Band) kennenlernen werden.

§ 10. Das elektromagnetische Feld von Oszillatoren (Multipolen) höherer Ordnung.

Die in § 7 gewonnenen Resultate über das elektromagnetische Feld eines schwingenden Dipols lassen sich leicht für Multipole höherer Ordnung mit zeitlich veränderlichen Momenten verallgemeinern.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall *rein harmonischer* (sinusoidaler) Schwingungen und denken uns an Stelle von einzelnen schwingenden Punktladungen eine *kontinuierliche Verteilung* der Elektrizität innerhalb eines sehr kleinen Raumgebietes, das durch eine Kugelfläche K von Radius a begrenzt werden mag. Wir nehmen also an, daß in jedem Punkt Q dieses Raumgebietes die Ladungs- und Stromdichte als Funktionen der Zeit durch die Formeln

$$\varrho(\mathfrak{r}, t) = \varrho_0(\mathfrak{r}) e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{j}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{j}_0(\mathfrak{r}) e^{i\omega t} \tag{42}$$

dargestellt werden können, wobei die entsprechenden „Amplituden" ϱ_0 und $\mathfrak{j}_0$ gegebene Ortsfunktionen sind, die miteinander nach dem Erhaltungsprinzip der Elektrizität durch die Gleichung $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \operatorname{div}\mathfrak{j} = 0$, d. h. in unserem Falle

$$ik\varrho_0 + \operatorname{div}\mathfrak{j}_0 = 0 \tag{42a}$$

verknüpft werden müssen. Dabei bedeutet

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\tau c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{42b}$$

den Betrag des schon in § 8 eingeführten Phasenvektors. Wir nehmen ferner an, daß der Kugelradius a, d. h. die linearen Abmessungen unseres Systems *klein gegenüber der Wellenlänge* sind.

Unter diesen Voraussetzungen kann das skalare Potential von S in irgendeinem äußeren Punkt P in eine konvergente Reihe entwickelt werden, die der Reihe (6)—(7) des § 3, Kap. IV, ganz analog ist und als ihre unmittelbare Verallgemeinerung angesehen werden darf. Nach (26) und (42) drückt sich dieses Potential aus durch die Formel

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\varrho_0(\mathfrak{r}')}{R} e^{i(\omega t - kR)}\, dV'.$$

Setzt man also, entsprechend (42),

$$\varphi(\mathfrak{r}, t) = \varphi_0(\mathfrak{r}) e^{i\omega t}, \tag{43}$$

so wird

$$\varphi_0(\mathfrak{r}) = \int \varrho_0(\mathfrak{r}')\,\Psi\,dV', \tag{43a}$$

wo die Funktion Ψ durch

$$\Psi = \frac{e^{-ikR}}{R} \tag{43b}$$

definiert ist.

Die Formel (43a) hat dieselbe Gestalt wie die gewöhnliche Formel für das skalare Potential einer statischen Ladungsverteilung mit der zeitlich konstanten Volumdichte ϱ_0, nur wird der reziproke Radius $\frac{1}{R}$ durch die allgemeinere Funktion Ψ ersetzt (für unendlich langsame Schwingungen, d. h. für $k = 0$, reduziert sich Ψ auf $\frac{1}{R}$). Entwickelt man nun diese Funktion für einen beliebigen innerhalb K liegenden Punkt Q nach Potenzen seiner Koordinaten ξ_1', ξ_2', ξ_3' bezüglich des Kugelmittelpunktes O, so wird, ebenso wie im § 3, Kap. IV,

$$\varphi_0 = \varphi_0^{(0)} + \varphi_0^{(1)} + \varphi_0^{(2)} + \cdots + \varphi_0^{(n)} \tag{44}$$

wo

$$\varphi_0^{(0)} = e'\psi,\quad \varphi_0^{(1)} = -\sum_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} e'_{0i},\quad \varphi_0^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} e'_{0ik}, \ldots \tag{44a}$$

ist. Dabei bedeutet ψ den Wert von Ψ für den Punkt O, d. h. (wegen $OP = \mathfrak{r}$)

$$\psi = \frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{44b}$$

während die Größen

$$e'_0 = \int \varrho_0 dV',\quad e'_{0i} = \int \varrho_0 \xi_i' dV',\quad e'_{0ik} = \int \varrho_0 \xi_i' \xi_k' dV', \ldots \tag{44c}$$

als die *Amplituden* der elektrischen Momente des betrachteten Systems definiert werden können.

Das allgemeine Glied von (44) kann auch in der Form

$$\varphi_0^{(n)} = (-1)^n \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e_0(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \tag{45}$$

dargestellt werden mit

$$e_0(n_1, n_2, n_3) = \int \varrho_0 \xi_1'^{n_1} \xi_2'^{n_2} \xi_3'^{n_3} dV'. \tag{45a}$$

Als spezieller Fall ergibt sich aus (45) der Ausdruck

$$\varphi_0^{(n)} = \frac{(-1)^n p_0^{(n)}}{n!} (\mathfrak{a}_1 \nabla)(\mathfrak{a}_2 \nabla) \ldots (\mathfrak{a}_n \nabla)\psi, \tag{45b}$$

den man als die Amplitude des Potentials eines Multipols n-ter Ordnung mit festen Achsen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$ und mit einem harmonisch schwingenden Moment $p^{(n)} = p_0^{(n)} e^{i\omega t}$ deuten kann[1]). Es sei bemerkt, daß die Vek-

[1]) Mit Ausschluß des Falles $n = 0$, denn die resultierende Ladung des Systems e_0' muß offenbar konstant bleiben.

toren $\mathfrak{a}_i$ auch als komplexe Größen behandelt werden können. Dies hat aber einen unmittelbaren physikalischen Sinn nur dann, wenn *einer* von ihnen, z. B. $\mathfrak{a}_1$, als komplex gilt, während die anderen reell sind. Alsdann bedeutet das Produkt $\mathfrak{a}_1 e^{i\omega t}$ eine elliptische Schwingung, die durch eine Rotation der „ersten" Achse des Multipols in einer bestimmten Ebene entsteht. Sind die anderen Achsenvektoren auch komplex, so zerfällt (45b) in eine Summe von Anteilen, die einer Anzahl von Multipolen mit je einer rotierenden Achse entsprechen.

Da die Funktion $\psi e^{i\omega t} = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$ der Gleichung

$$\nabla^2 \psi e^{i\omega t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi e^{i\omega t}) = 0$$

genügt, so folgt — wie auch durch direkte Ausrechnung verifiziert werden kann:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \tag{46}$$

Derselben Gleichung (die als die einfachste Verallgemeinerung der *Laplace*schen Gleichung $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$ anzusehen ist) müssen auch die Ableitungen $\frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}$ und folglich die Potentiale (45) genügen.

Durch wiederholte Anwendung der für statische Felder ($k = 0$) geltenden Gleichung $\nabla^2 \psi = 0$ könnten wir die Anzahl der in (45) auftretenden Parameter auf $(2n + 1)$ herabsetzen und dementsprechend den Ausdruck (45) auf die Form (46a) zurückführen. Für $k > 0$ ist eine solche Zurückführung allgemein *nicht* möglich — außer im einfachsten Fall $n = 1$. Obwohl man auch hier sagen kann, daß ein innerhalb einer Kugelfläche enthaltendes System von elektrischen Ladungen hinsichtlich seines äußeren Feldes einer Anzahl von Multipolen im Kugelmittelpunkt äquivalent ist, doch müssen im allgemeinen *mehrere* Multipole derselben Ordnung vorhanden sein, die sich für $n > 1$ *nicht* zu einem einzigen Multipol zusammensetzen lassen.

Die oben erwähnte Voraussetzung, daß der Kugelradius klein gegenüber der Wellenlänge ist, ist zur Konvergenz der Reihe (44) ebenso wesentlich wie die Voraussetzung, daß der Punkt P außerhalb der Kugelfläche liegt. Denn bei der Entwicklung der Funktion Ψ in (43a) nach den Koordinaten ξ_1', ξ_2', ξ_3', bekommt man Glieder von der Form

$$\frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\xi_1'^{n_1} \xi_2'^{n_2} \xi_3'^{n_3}}{r^{n-p} \lambda^p}. \qquad (n_1 + n_2 + n_3 = n,\ p = 0, 1, \ldots n)$$

Daraus folgt, daß für die Konvergenz der entsprechenden Reihe die Wellenlänge λ eine mit r gleichberechtigte Rolle spielt.

Das Potential n-ter Ordnung $\varphi^{(n)} = \varphi_0^{(n)} e^{i\omega t}$ kann offenbar in der folgenden Form dargestellt werden

$$\varphi^{(n)} = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \sum_{p=0}^{n} \frac{K_n^{(p)}}{r^{n-p} \lambda^p}, \tag{46a}$$

wo die Koeffizienten $K_n^{(p)}$ nur von der Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ abhängen; dabei bedeutet $K_n^{(0)}$ eine gewöhnliche Kugelfunktion n-ter Ordnung der diese Richtung bestimmenden Winkel. In der Tat muß der entsprechende „nullte" Term von (46) mit (8), Kap. IV, zusammenfallen — abgesehen von dem „Phasenfaktor" $e^{i(\omega t - kr)}$ der im statischen Falle gleich 1 wird.

Wir wollen noch den n-ten Term von (46a) ausführlich berechnen, denn für große Abstände — in der Wellenzone — muß das Potential $\varphi^{(n)}$ sich praktisch auf diesen Term reduzieren (alle anderen fallen dabei viel schneller ab).

Lassen wir also bei der Differentiation von ψ in (45) alle Glieder, die der zweiten und höheren Potenzen von $\frac{1}{r}$ proportional sind, weg, so wird, nach (44b):

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \simeq (-ik)^n \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^{n_2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)^{n_3} = (-2\pi i)^n \frac{e^{-ikr}}{r\lambda^n} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3},$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Richtungskosinus des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ bedeuten, und folglich:

$$\varphi^{(n)} \simeq \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \frac{(2\pi i)^n}{\lambda^n} \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e_0(n_1, n_2, n_3)}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3}. \qquad (46b)$$

Für $n = 1$ (harmonisch schwingender Dipol) ist dieser Ausdruck identisch mit dem entsprechenden (zweiten) Gliede auf der rechten Seite der Formel (29). In der Tat (46b) läßt sich dabei in der Form

$$\varphi^{(1)} \simeq \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} ik(\mathfrak{p}_0 \mathfrak{r}_0)$$

schreiben, wo $\mathfrak{p}_0$ den Vektor mit den Komponenten e_0 (100), e_0 (010), e_0 (001) bedeutet, d. h. wegen $\omega t - kr = \omega t'$ und $ik\mathfrak{p}_0 e^{i\omega t'} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{p}}'$,

$$\varphi^{(1)} = \frac{\dot{\mathfrak{p}}' \mathfrak{r}_0}{cr}.$$

Es sei bemerkt, daß der betrachtete „Hauptterm" des Potentials (45b) eines einfachen Multipols n-ter Ordnung sich durch die Formel

$$\varphi^{(n)} = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \frac{(2\pi i)^n}{n!\lambda^n} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{r}_0)(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{r}_0) \ldots (\mathfrak{a}_n \mathfrak{r}_0) e_0^{(n)} \qquad (46c)$$

ausdrückt.

Auf eine ganz analoge Weise, wie das skalare Potential, läßt sich auch das Vektorpotential unseres Systems

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t) = \int \frac{\mathfrak{j}_0(\mathfrak{r}')}{R} e^{i(\omega t - kR)} dV' = e^{i\omega t} \int \mathfrak{j}_0(\mathfrak{r}') \Psi dV' = \mathfrak{A}_0 e^{i\omega t}$$

in eine Reihe

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0^{(0)} + \mathfrak{A}_0^{(1)} + \mathfrak{A}_0^{(2)} + \cdots + \mathfrak{A}_0^{(n)} + \cdots \qquad (47)$$

entwickeln, mit dem allgemeinen Glied

$$\mathfrak{A}_0^{(n)} = (-1)^n \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{\mathfrak{J}_0(n_1,n_2,n_3)}{n_1!\,n_2!\,n_3!} \frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}, \tag{47a}$$

wobei die vektoriellen Parameter

$$\mathfrak{J}_0(n_1,n_2,n_3) = \int \mathfrak{j}_0 \xi_1'^{n_1} \xi_2'^{n_2} \xi_3'^{n_3} dV', \tag{47b}$$

welche wir die „elektrokinetischen Momente" des betrachteten Systems nennen dürfen, dieselbe Rolle für $\mathfrak{A}$ wie die elektrostatischen Momente $e_0(n_1 n_2 n_3)$ für φ spielen.

Aus der Beziehung (42a) folgt (den Index 0 und die Striche werden wir im folgenden fortlassen):

$$e(n_1,n_2,n_3) = \int \varrho \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dV = -\frac{1}{ik} \int \operatorname{div} \mathfrak{j} \cdot \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dV =$$
$$= -\frac{1}{ik} \int \operatorname{div} (\mathfrak{j} \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) dV + \frac{1}{ik} \int \mathfrak{j} \cdot \nabla (\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) dV .$$

Da auf der Kugeloberfläche, die das Volum V begrenzt $j_n = 0$ ist, haben wir

$$\int \operatorname{div} (\mathfrak{j} \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) dV = \oint j_n \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dS = 0$$

und folglich, wegen

$$\mathfrak{j} \cdot \nabla (\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) = n_1 j_1 \xi_1^{n_1-1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} + n_2 j_2 \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2-1} \xi_3^{n_3} + n_3 j_3 \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3-1}$$

$$\left.\begin{aligned} e(n_1,n_2,n_3) = \frac{1}{ik} \{ & n_1 J_1(n_1-1,n_2,n_3) + n_2 J_2(n_1,n_2-1,n_3) \\ & + n_3 J_3(n_1,n_2,n_3-1) . \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Formel (46a) bekommen wir

$$\varphi^{(n)} \simeq \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \frac{(2\pi i)^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \sum_{n_1'+n_2'+n_3'=n-1} \frac{\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{F}(n_1',n_2',n_3')}{n_1'!\,n_2'!\,n_3'!} \gamma_1^{n_1'} \gamma_2^{n_2'} \gamma_3^{n_3'} .$$

Andererseits reduziert sich (47a) in der Wellenzone ($r \gg \lambda$) auf

$$\mathfrak{A}_0^{(n)} \simeq \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{(2\pi i)^n}{\lambda^n} \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{\mathfrak{F}(n_1 n_2 n_3)}{n_1!\,n_2!\,n_3!} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} .$$

Es gilt also für *die Wellenzone*

$$\varphi^{(n)} = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{A}^{(n-1)}$$

und folglich, da man immer $\varphi^{(0)} = 0$ setzen darf [1]),

$$\varphi = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{A}. \tag{48a}$$

Diese Beziehung zwischen den beiden Potentialen stimmt mit derjenigen überein, die wir im § 9 für das elektromagnetische Feld eines unendlich

[1]) Ist das betrachtete System nicht neutral, d. h. hat $\varphi^{(0)}$ einen von Null verschiedenen Wert, so muß letzterer zeitlich konstant bleiben und ist deshalb für das elektrische Feld in der Wellenzone belanglos.

entfernten Oszillators gefunden haben. Es sei bemerkt, daß sie ganz allgemein für alle *ebenen* (auch nicht sinusoidalen) elektromagnetischen Wellen erfüllt ist, und sofort aus dem entsprechenden allgemeinen Ansatz (38) für das Polarisationspotential abgeleitet werden kann. Aus (48a) ergeben sich ferner die bekannten Beziehungen zwischen den Feldstärken in der Wellenzone und dem Einheitsvektor $\mathfrak{r}_0$, welcher die Fortpflanzungsrichtung der Wellen bestimmt [vgl. (32a)]:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{r}_0 .$$

Statt das betrachtete System durch Angabe der elektrischen Ladungsdichte ϱ und Stromdichte $\mathfrak{j}$ zu charakterisieren, könnte man selbstverständlich zu diesem Zweck die elektrische Polarisation $\mathfrak{P}$ einführen, und dementsprechend das Polarisationspotential

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{Z}_0 e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \int \mathfrak{P}_0(\mathfrak{r}') \, \psi \, dV'$$

n eine Reihe desselben Typus entwickeln, wie die oben angeführte Reihe für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$. Dabei würden an Stelle der elektrokinetischen Momente (47b) die entsprechenden „Polarisationsmomente" auftreten.

Die angeführten Resultate lassen sich auf den Fall beliebiger nichtharmonischer Schwingungen der Ladungs- und Stromdichte (bzw. der Polarisation) in dem betrachteten System verallgemeinern, wenn diese Schwingungen nicht zu rasch sind, so daß die mittlere oder effektive Wellenlänge groß gegenüber dem Kugelradius bleibt. Diesen Fall kann man auf den vorhergehenden zurückführen durch Zerlegung von ϱ oder $\mathfrak{j}$ (bzw. $\mathfrak{P}$) als Funktionen der Zeit, in eine *Fourier*reihe oder ein *Fourier*integral. Das resultierende elektromagnetische Feld muß sich dabei ergeben als die Summe (oder das Integral) der elementaren Bestandteile, welche von den einzelnen harmonischen Komponenten von ϱ und $\mathfrak{j}$ herrühren.

§ 11. Äquivalente magnetische Systeme; magnetischer Oszillator.

Wir haben in Kap. IV gesehen, daß ein zeitlich konstantes magnetisches Feld, welches außerhalb einer geschlossenen Fläche S durch ein inneres (oder ein flächenhaftes) System von *stationären* Strömen erzeugt wird, auf dieselbe Weise, wie ein elektrostatisches Feld behandelt werden kann, wobei die erwähnten Ströme durch fiktive magnetische Ladungen (oder Pole) zu ersetzen sind[1]). Es läßt sich nun leicht einsehen, daß ein analoges „Ersatzverfahren" auch im allgemeinen Falle eines beliebigen äußeren elektromagnetischen Feldes möglich ist. Und zwar kann man statt der elektrischen Ströme fiktive magnetische Ladungen und statt der elektrischen Ladungen — fiktive magnetische Ströme einführen, die innerhalb der Kugel derart verteilt sind, daß im

[1]) Die Fläche S muß *einfach zusammenhängend*, d. h., z. B. nicht ringförmig sein, damit die magnetischen Kraftlinien sich außerhalb S nicht schließen könnten.

Außenraum das betrachtete Feld herrscht. Mathematisch gesprochen, bedeutet dies folgendes:

Statt das Feld aus den Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathfrak{E}=4\pi\varrho,\ \operatorname{rot}\mathfrak{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=4\pi\mathfrak{j};\\ &\operatorname{div}\mathfrak{H}=0,\ \operatorname{rot}\mathfrak{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}=0 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

zu bestimmen, wo ϱ und $\mathfrak{j}$ gegebene Funktionen von $\mathfrak{r}$ und t sind, die der Bedingung $\frac{1}{c}\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathfrak{j}=0$ genügen, kann man es aus den „konjugierten" Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathfrak{E}=0,\ \operatorname{rot}\mathfrak{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=0;\\ &\operatorname{div}\mathfrak{H}=4\pi\varrho^*,\ \operatorname{rot}\mathfrak{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}=-4\pi\mathfrak{j}^* \end{aligned}\right\} \tag{49a}$$

ableiten, wobei die magnetischen Ladungs- und Stromdichten ϱ^* bzw. $\mathfrak{j}^*$ passend gewählt werden müssen unter Berücksichtigung der Bedingung $\frac{1}{c}\frac{\partial\varrho^*}{\partial t}+\operatorname{div}\mathfrak{j}^*=0$ [vgl. (11), (11a), (11b), § 3]. Dabei muß nur vorausgesetzt werden, daß das betrachtete System neutral ist, d. h. daß das Volumenintegral $\int\varrho\,dV$, erstreckt über das ganze durch S begrenzte Volum verschwindet (ebenso wie $\int\varrho^*dV=0$). Außerhalb S müssen selbstverständlich ϱ und $\mathfrak{j}$ ebenso wie ϱ^* und $\mathfrak{j}^*$ gleich null sein. — Die Zuordnung der Funktionen ϱ^* und $\mathfrak{j}^*$ zu den gegebenen Funktionen ϱ und $\mathfrak{j}$ ist dabei nicht eindeutig, was sich schon daraus erkennen läßt, daß die letzteren nach dem *Huyghens*schen Prinzip durch eine bestimmte Verteilung der Ladungen und der Ströme auf der Oberfläche S ersetzt werden können.

Mittels der Substitution

$$\mathfrak{E}=-\mathfrak{H}^*,\quad \mathfrak{H}=\mathfrak{E}^* \tag{49b}$$

ergeben sich aus (49a) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathfrak{E}^*=4\pi\varrho^*,\ \operatorname{rot}\mathfrak{H}^*-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}^*}{\partial t}=4\pi\mathfrak{j}^*;\\ &\operatorname{div}\mathfrak{H}^*=0,\ \operatorname{rot}\mathfrak{E}^*+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial t}=0, \end{aligned}\right\} \tag{49c}$$

welche formal mit den ursprünglichen Gleichungen (49) übereinstimmen. Sie können dementsprechend auf dieselbe Weise gelöst werden, und zwar durch Einführung der Potentiale φ^*, $\mathfrak{A}^*$ oder eines Polarisationspotentiales $\mathfrak{Z}^*$ und des entsprechenden Polarisationsvektors $\mathfrak{P}^*$, der mit ϱ^* und $\mathfrak{j}^*$ durch die Beziehungen

$$\varrho=-\operatorname{div}\mathfrak{P}^*,\ \mathfrak{j}^*=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}^*}{\partial t} \tag{50}$$

verknüpft ist und durch welchen $\mathfrak{Z}^*$ nach der Gleichung

$$-\Delta^2\mathfrak{Z}^*+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{Z}^*}{\partial t^2}=4\pi\mathfrak{P}^* \tag{50a}$$

bestimmt werden muß. Ist $\mathfrak{Z}^*$ bekannt, so kann man $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ nach den Formeln

$$\mathfrak{E}^* = -\nabla\varphi^* - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}^*}{\partial t}, \qquad \mathfrak{H}^* = \operatorname{rot}\mathfrak{A}^*,$$

und

$$\varphi^* = -\operatorname{div}\mathfrak{Z}^*, \qquad \mathfrak{A}^* = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{Z}^*}{\partial t},$$

d. h.

$$\mathfrak{E}^* = \nabla \operatorname{div}\mathfrak{Z}^* - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}^*}{\partial t^2}, \quad \mathfrak{H}^* = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{Z}^*}{\partial t} \tag{50b}$$

berechnen.

Der Vektor $\mathfrak{Z}^*$ ist nichts anderes als das magnetische Polarisationspotential, das wir schon in § 4 eingeführt haben; $\mathfrak{P}^*$ entspricht unserem früheren $\mathfrak{M}$. Der Sinn der obigen Formeln liegt in dem Umstand, daß man die tatsächliche Verteilung der elektrischen Ladungs- und Stromdichte innerhalb S ersetzen kann durch eine fiktive Verteilung unendlich kleiner Magnete mit zeitlich variablen Momenten, deren Resultierende, auf die Volumeinheit bezogen, gleich $\mathfrak{P}^*$ ist. Diese Darstellung ist für manche Fälle sehr bequem und erlaubt, das elektromagnetische Feld eines verhältnismäßig komplizierten Systems ganz einfach zu berechnen.

Wir stellen uns z. B. einen elementaren Strom von zeitlich variabler Stärke vor. Die Abmessungen der Stromlinie (σ) sollen dabei klein sein nicht nur gegen den Abstand vom Aufpunkte P, sondern auch gegen die Wellenlänge, welche der Frequenz der Stromstärkeschwingungen (oder auch den Schwankungen in der Orientierung von σ, wenn solche auftreten) entspricht. Ein solches System nennt man einen *magnetischen Oszillator*, da es hinsichtlich seiner äußeren Wirkungen offenbar identisch sein muß mit einem (fiktiven) magnetischen Dipol, dessen Moment $\mathfrak{m}$ in jedem Augenblick mit dem magnetischen Moment des Stromes zusammenfällt. Ist z. B. die Stromlinie σ eben, und die von ihr umspannte Fläche gleich S, so gilt bekanntlich $m = iS$, wo i die Stromstärke in dem betrachteten Augenblick bedeutet.

Das magnetische Polarisationspotential dieses Oszillators muß offenbar von $\mathfrak{m}$ auf dieselbe Weise abhängen, wie das elektrische Polarisationspotential $\mathfrak{Z}$ von dem elektrischen Moment eines schwingenden Dipols; wir haben also nach (28a)

$$\mathfrak{Z}^*(\mathfrak{r}, t) = \frac{\ddot{\mathfrak{m}}'}{R}, \tag{51}$$

wo $\mathfrak{m}'$ den Wert von $\mathfrak{m}$ im effektiven Augenblick $t' = t - R/c$ bedeutet. Daraus ergeben sich für die Größen $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ dieselben Formeln, die wir im § 6 für die elektrische und magnetische Feldstärke eines elektrischen Oszillators aufgestellt haben. Um die entsprechenden Feldstärken in dem betrachteten Fall (magnetischer Oszillator!) zu bekommen, müssen wir in jenen Formeln, nach (49b) $\mathfrak{E}$ (= $\mathfrak{E}^*$) durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$(=$\mathfrak{H}^*$)

durch $-\mathfrak{E}$ ersetzen (und außerdem selbstverständlich $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{m}$). Auf diese Weise bekommen wir für das elektromagnetische Feld in der Wellenzone statt (31) und (32) die Formeln

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{R}_0 \times \ddot{\mathfrak{m}}'}{c^2 R}, \tag{51a}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{R}_0 \times (\mathfrak{R}_0 \times \ddot{\mathfrak{m}}')}{c^2 R}, \tag{51b}$$

woraus folgt, daß die Beziehungen (32a), die, wie wir in § 10 gesehen haben, in der Wellenzone immer erfüllt sein müssen, in dem vorliegenden Fall tatsächlich bestehen bleiben.

Sechstes Kapitel.

Das elektromagnetische Feld bewegter Punktladungen (Elektronen).

§ 1. Die elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung.

Zur Berechnung der elektromagnetischen Potentiale, die durch ein willkürlich bewegtes Elektron erzeugt werden, mittels der allgemeinen Formeln (26) und (27) Kap. V, ist es notwendig, *erstens* sich eine ganz bestimmte Vorstellung über die „Struktur" des Elektrons zu machen, d. h. über die räumliche Verteilung der elektrischen Ladung, die an dem Elektron haftet oder es sozusagen „bildet" — und zwar für den *Ruhezustand* — und *zweitens* die Ladungsdichte ϱ und die Stromdichte $\mathfrak{j}$ für ein bewegtes Elektron durch die erwähnte „Ruhdichte" ϱ_0 und die Translationsgeschwindigkeit des Elektrons — oder auch seine Winkelgeschwindigkeit — auszudrücken. Dabei kann man das Elektron entweder als einen starren Körper behandeln, oder als einen deformierbaren Körper; in letzterem Falle muß noch seine Deformation berücksichtigt werden.

Gewöhnlich betrachtet man ein Elektron als eine starre (oder auch in gewissem Sinne deformierbare) Kugel von einem bestimmten Radius a und denkt sich die Elektronenladung e gleichförmig über die Oberfläche oder im Volumen dieser Kugel verteilt.

Dieser „klassischen" Auffassung des Elektrons, als eines räumlich ausgedehnten „Gebäudes", können sehr schwerwiegende physikalische und erkenntnistheoretische Einwände gegenübergestellt werden, die wir später (Kap. VII) eingehend betrachten werden. Zunächst wollen wir versuchen — ganz abgesehen von den erwähnten Einwänden, lediglich aus Einfachheitsgründen — die Elektronen als *Punktladungen* zu behandeln, ebenso wie wir es schon früher bei der Untersuchung statischer Felder oft getan haben. Wir stellen uns also die Aufgabe, die einfache Formel $\varphi = \frac{e'}{R}$ für das skalare Potential einer ruhenden

Punktladung auf den Fall einer beliebig bewegten Punktladung zu erweitern und die früher aufgestellte Formel für das Vektorpotential einer bewegten Punktladung $\mathfrak{A} = \frac{e' \mathfrak{v}'}{cR}$, die nur angenähert gültig ist, durch eine ganz exakte Formel zu ersetzen.

Zu diesem Zweck denken wir uns das Elektron *vorläufig* als ein starres Gebilde von *sehr kleinen* Dimensionen, und zwar mit einem Volumen V_0, in dem die Elektronenladung e' gleichförmig mit der Ruhdichte $\varrho_0 = \frac{e'}{V_0}$ verteilt ist. Der uns interessierende Fall eines punktförmigen Elektrons wird sich nachträglich ergeben, als Grenzfall für $V_0 \to 0$. Wir stellen uns ferner vor, daß dieses Elektron sich mit einer Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ (ohne Drehung) bewegt, wobei $\mathfrak{v}$ nicht zeitlich konstant zu sein braucht.

In jedem Augenblick „füllt" das bewegte Elektron ein gewisses „Ruhvolum" $V = V_0$, innerhalb dessen die elektrische Ladungsdichte ϱ mit ϱ_0 zusammenfällt, während außerhalb $\varrho = 0$ ist. Was die Stromdichte $\mathfrak{j}$ betrifft, so ist sie offenbar, gemäß ihrer Definition (als Raumdichte des elektrischen Impulses) mit ϱ durch die Beziehung

$$\mathfrak{j} = \varrho \frac{\mathfrak{v}}{c} \tag{1}$$

verknüpft.

Zur Berechnung des skalaren Potentials in einem Punkte P (Radiusvektor $\mathfrak{r}$), wollen wir die erste der Formeln (27a) Kap. V und die damit verknüpfte Vorstellung einer sich nach P mit der Geschwindigkeit c kontrahierenden Wirkungskugel benutzen. Diese Kugel soll sich auf den Punkt P im Augenblick t zusammenziehen. Sie muß das Elektron etwas früher treffen, während einer sehr kurzen Zeit τ' damit in Berührung bleiben — oder, genauer gesprochen, durch das Elektron laufen — und dann es wieder verlassen. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß das Elektron sich nach P mit der Geschwindigkeit $v = c$ bewegt. Diesen Fall, der einer dauernden Berührung entsprechen würde, wollen wir ausschließen; der Bestimtmheit halber wollen wir ferner annehmen, daß

$$v < c \tag{1a}$$

ist, d. h. daß das Elektron sich mit „Unterlichtgeschwindigkeit" bewegt.

Bei unendlich kleinen Abmessungen des Elektrons muß das effektive Zeitintervall τ', während dessen die im Augenblick t im Punkte P empfangene Wirkung vom Elektron ausgesandt wird, auch unendlich klein sein. Wir können deshalb die Geschwindigkeit des Elektrons während des Intervalles τ' als konstant ($= \mathfrak{v}'$) behandeln.

Wir betrachten nun zwei innerhalb τ' liegende Augenblicke

$$t_1' = t - R_1'/c \quad \text{und} \quad t_2' = t - R_2'/c \quad (t_2' > t_1')$$

und vergleichen den Abstand $R_1 - R_2$ zwischen den entsprechenden

Lagen der Wirkungskugel im Elektron mit der Dicke l der dabei „durchfegten" Elektronenschicht. Bezeichnet man die Radialgeschwindigkeit des Elektrons (nach dem Aufpunkt P) mit v_R', und beachtet, daß die Radialgeschwindigkeit des das Elektron schneidenden Kugelflächenelements S *relativ zum Elektron* gleich der Differenz $c - v_R'$ ist, so bekommt man die Gleichungen

$$\frac{R_1' - R_2'}{c} = \frac{l}{c - v_R'} = t_2' - t_1',$$

woraus folgt

$$dR = \frac{dl}{1 - v_R'/c} \tag{2}$$

und nach (27a)

$$\varphi = \frac{1}{1 - v_R'/c} \int\int \frac{\varrho}{R} R^2 \, dl \, d\Omega = \frac{1}{(1 - v_R'/c) R'} \int \varrho \, dV_0,$$

d. h.

$$\varphi = \frac{e'}{R'(1 - v_R'/c)}. \tag{3}$$

Die von der Bewegung des Elektrons herrührende Korrektion des gewöhnlichen *Coulomb*schen Potentials einer ruhenden Punktladung besteht also erstens in der Ersetzung der gleichzeitigen Lage der letzteren durch die retardierte im Augenblick $t' = t - R'/c$, und zweitens in der Einführung des Faktors $\frac{1}{1 - v_R'/c}$, welcher sich nur dann interpretieren läßt, wenn man das Elektron nicht als punktförmig, sondern als unendlich klein denkt — und zwar als die relative Änderung des effektiven Volums oder des effektiven Zeitintervalles, die der Aussendung der im Punkte P zum Augenblick t empfangenen Wirkung entsprechen.

Das Vektorpotential ergibt sich wegen der Relation (1), unmittelbar aus (3), wenn man die Ladung des Elektrons durch seinen elektrischen Impuls $\frac{e\mathfrak{v}'}{c}$ ersetzt.

Es ist also

$$\mathfrak{A} = \frac{e' \mathfrak{v}'/c}{R'(1 - v_R'/c)} \tag{4}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \varphi \frac{\mathfrak{v}'}{c}. \tag{4a}$$

Durch direkte Differentiation der Ausdrücke (3) und (4) kann man leicht beweisen, daß sie tatsächlich den Differentialgleichungen

$$-\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\nabla^2 \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0$$

Genüge leisten, und zwar für alle Raum- und Zeitpunkte mit Ausnahme desjenigen Raumzeitpunktes, wo sich das Elektron selbst befindet und

welcher durch $R' = 0$ charakterisiert wird [1]). Dabei muß man $R' = R(t')$ als die durch die Gleichung

$$t' = t - R(t')/c \tag{5}$$

definierte Funktion der Zeit behandeln, die der betrachteten Bewegung des Elektrons, d. h. der als bekannt vorausgesetzten Abhängigkeit seines Radiusvektors $\mathfrak{r}'$ von der Zeit t' entspricht. Nach der üblichen Definition ist

$$\mathfrak{R}(t') = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'(t'), \tag{5a}$$

wo $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor des Aufpunktes bedeutet.

§ 2. Die elektrische und magnetische Feldstärke.

Zur Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärken, die zu den Potentialen (3) und (4) gehören, müssen wir zunächst einige Hilfsformeln ableiten, die sich durch Differentiation der Gleichungen (5) und (5a) nach den beiden unabhängigen Variablen t und $\mathfrak{r}$ ergeben. Wir führen dabei zur Abkürzung noch die folgenden Bezeichnungen ein

$$\frac{1}{1 - v'_R/c} = \gamma, \tag{6}$$

und

$$R'(1 - v'_R/c) = R' - \frac{1}{c}\mathfrak{R}'\mathfrak{v}' = R^*. \tag{6a}$$

oder

$$R' = \gamma R^*. \tag{6b}$$

Nach (5a) ist

$$\frac{d\mathfrak{R}'}{dt'} = -\frac{d\mathfrak{r}'(t')}{dt'} = -\mathfrak{v}',$$

und folglich wegen

$$\mathfrak{R}'\frac{d\mathfrak{R}'}{dt'} = R'\frac{dR'}{dt'},$$

$$\frac{dR'}{dt'} = -\frac{(\mathfrak{R}'\mathfrak{v}')}{R'} = -v'_R.$$

Durch Differentiation von (5) nach t und $\mathfrak{r}$ bekommen wir

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dR'}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{v'_R}{c}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

und

$$\nabla t' = -\frac{1}{c}\nabla R' = -\frac{1}{c}(\nabla R')_{t'=\text{konst}} - \frac{1}{c}\frac{dR'}{dt'}\nabla t' = -\frac{R'_0}{c} + \frac{v'_R}{c}\nabla t',$$

wo $\mathfrak{R}'_0 = \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$ den Einheitsvektor in der Richtung Elektron (effektive

[1]) Diesen Beweis werden wir später, bei einer neuen Ableitung der Formeln (3) und (4) anführen. Es sei bemerkt, daß diese Formeln auf dem oben geschilderten Wege zuerst von *Liénard* und *Wiechert* abgeleitet wurden; deshalb werden die Potentiale (3) und (4) gewöhnlich als die *Liénard-Wiechert*schen Potentiale bezeichnet.

Lage) — Aufpunkt bedeutet. Daraus folgt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \quad \nabla t' = -\frac{\gamma}{c}\mathfrak{R}_0' \tag{7}$$

und ferner

$$\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial t} = -\gamma v_R', \quad \nabla R' = \gamma \mathfrak{R}_0'. \tag{7a}$$

Die Differentiation nach r bei festgehaltenem t' bezeichnen wir im folgenden mit $\nabla' [= (\nabla)_{t'=\text{konst}}]$.

Dann wird

$$\nabla\varphi = \nabla'\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t'$$

$$= -\frac{e'}{R^{*2}}\left[\nabla' R' - \nabla'\left(\mathfrak{R}'\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right)\right] + \frac{e'}{R^{*2}}\frac{\gamma}{c}\mathfrak{R}_0'\left[-v_R' + \frac{v'^2}{c} - \frac{1}{c}\mathfrak{R}'\frac{d\mathfrak{v}'}{dt'}\right],$$

d. h., wegen $\nabla'\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}_0'$, $\nabla'(\mathfrak{R}'\mathfrak{v}') = \mathfrak{v}'$, wenn wir noch die Beschleunigung des Elektrons $\frac{d\mathfrak{v}'}{dt}$ durch $\mathfrak{w}'$ bezeichnen

$$\nabla\varphi = -\frac{e'}{R^{*2}}\left\{\mathfrak{R}_0' - \mathfrak{v}'/c + \gamma\mathfrak{R}_0'\left[v_R'/c - (v'/c)^2 + \frac{1}{c^2}\mathfrak{R}'\mathfrak{w}'\right]\right\}. \tag{7b}$$

Ferner haben wir

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\frac{\mathfrak{v}'}{c^2} + \frac{\varphi}{c^2}\frac{d\mathfrak{v}'}{dt'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= -\frac{e'}{R^{*2}}\frac{\gamma}{c^2}\left[-v_R' + \frac{v_R'^2}{c} - \frac{1}{c}\mathfrak{R}'\mathfrak{w}'\right] + \frac{e'}{c^2 R^*}\gamma\mathfrak{w}'$$

und

$$\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \operatorname{rot}\left(\varphi\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right) = \operatorname{rot}'\left(\varphi\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right) + \nabla t'\times\frac{\partial}{\partial t'}\left(\varphi\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right)$$

$$= \nabla'\varphi\times\frac{\mathfrak{v}'}{c} - \frac{\gamma}{c}\mathfrak{R}_0'\times\frac{\partial}{\partial t'}\left(\varphi\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right).$$

Aus diesen Formeln ergibt sich nach $\mathfrak{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$ und $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$, wenn man $\frac{1}{R^*}$ durch $\frac{\gamma}{R'}$ ersetzt,

$$\mathfrak{E} = \frac{e'}{R'^2}\gamma^3(\mathfrak{R}_0' - \mathfrak{v}'/c)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathfrak{w}'}{c^2}\right) - \frac{e'\mathfrak{w}'}{c^2 R'}\gamma^2, \tag{8}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e'}{R'^2}\gamma^3\frac{\mathfrak{v}'}{c}\times\mathfrak{R}_0'\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathfrak{R}'\mathfrak{w}'}{c^2}\right) + \frac{e'}{c^2 R'}\mathfrak{w}'\times\mathfrak{R}_0'\gamma^2. \tag{9}$$

Die magnetische und elektrische Feldstärke sind also miteinander durch die einfache Beziehung

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_0'\times\mathfrak{E} \tag{9a}$$

verknüpft. Es sei bemerkt, daß diese Beziehung mit einer der Beziehungen (32a) Kap. V zusammenfällt; sie zeigt, daß die magnetische Feldstärke immer senkrecht zum Radiusvektor von der jeweiligen effektiven Lage des Elektrons nach dem Aufpunkt weist und daß sein Betrag den Betrag der elektrischen Feldstärke niemals übersteigen kann. Die zweite der erwähnten Beziehungen ($\mathfrak{E}^{(2)} = \mathfrak{H}^{(2)}\times\mathfrak{R}_0'$) ist aber im

allgemeinen nur in der Wellenzone, d. h. für die der ersten Potenz von $\frac{1}{R'}$ proportionalen Anteile der beiden Feldstärken, erfüllt. Diese Anteile von (8) und (9) sind nämlich gleich:

$$\mathfrak{E}^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R'} \gamma^2 \{\gamma (\mathfrak{R}'_0 - \mathfrak{v}'/c)(\mathfrak{R}'_0 \mathfrak{w}') - \mathfrak{w}'\} \tag{10}$$

$$\mathfrak{H}^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R'} \gamma^2 \left\{\gamma \left(\frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{R}'_0\right) (\mathfrak{R}'_0 \mathfrak{w}') + \mathfrak{w}' \times \mathfrak{R}'_0 ,\right\} \tag{10a}$$

so daß

$$\mathfrak{H}^{(2)} \times \mathfrak{R}'_0 = \frac{e'}{c^2 R'} \gamma^2 \left\{\gamma \left(\mathfrak{R}'_0 \frac{v'_R}{c} - \frac{\mathfrak{v}'}{c}\right) (\mathfrak{R}'_0 \mathfrak{w}') + \mathfrak{R}'_0 (\mathfrak{R}'_0 \mathfrak{w}') - \mathfrak{w}'\right\}$$

ist. Beachtet man nun die Identität

$$\gamma \mathfrak{R}'_0 \frac{v'_R}{c} = \gamma \left(\mathfrak{R}'_0 \frac{v'_R}{c} - \mathfrak{R}'_0\right) + \gamma \mathfrak{R}'_0 = -\mathfrak{R}'_0 + \gamma \mathfrak{R}'_0,$$

so nimmt der in geschweiften Klammern $\{\ \}$ stehende Ausdruck der letzten Formel die Gestalt

$$\gamma (\mathfrak{R}'_0 - \mathfrak{v}'/c)(\mathfrak{R}'_0 \mathfrak{w}') - \mathfrak{w}'$$

an, wird folglich mit dem entsprechenden Ausdruck in (10) identisch. Es bestehen also in diesem Falle die beiden Relationen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}^{(2)} &= \mathfrak{R}'_0 \times \mathfrak{E}^{(2)} \\ \mathfrak{E}^{(2)} &= \mathfrak{H}^{(2)} \times \mathfrak{R}'_0 \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

die für das elektromagnetische Feld in der Wellenzone charakteristisch sind.

Wir stellen uns nun vor, daß das betrachtete Elektron regelmäßige oder unregelmäßige Schwingungen sehr kleiner Amplitude um eine bestimmte feste Gleichgewichtslage P' ausführt. Wir denken uns ferner, daß in diesem Punkt ein Elektron mit der entgegengesetzten Ladung $-e'$ ruht. Wir bekommen also einen elementaren Oszillator, dessen Feld schon im vorigen Kapitel § 6 untersucht wurde. In diesem Fall müssen offenbar die Formeln (10), (10a) mit den früheren Formeln (31), (32) übereinstimmen. Dies ist, wie leicht einzusehen, tatsächlich erfüllt. Und zwar kann man wegen der Kleinheit der Schwingungen die Größe $\frac{v'}{c}$ $\left(\text{bzw. } \frac{v'_R}{c}\right)$ vernachlässigen (denn die Geschwindigkeit des Elektrons muß sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit bleiben) und ferner $R' = R = P'P$ (= konst) setzen. Dann reduzieren sich die Formeln (10) und (10a) auf

$$\mathfrak{E}^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R} \{\mathfrak{R}_0 (\mathfrak{w}' \mathfrak{R}) - \mathfrak{w}'\} = \frac{e'}{c^2 R} \mathfrak{R}_0 \times (\mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{w}'), \tag{11}$$

$$\mathfrak{H}^{(2)} = \frac{e}{c^2 R} \mathfrak{w}' \times \mathfrak{R}_0. \tag{11a}$$

Diese Ausdrücke sind aber mit (31) und (32) Kap. V identisch, wenn man beachtet, daß im betrachteten Falle $\mathfrak{p}' = e' \mathfrak{w}'$ ist.

Die Formeln (11), (11a) entsprechen dem extremen Fall, daß die Geschwindigkeit des Elektrons gegen die Beschleunigung verschwindet. Die allgemeinen Formeln (8), (9), gewinnen eine besonders einfache Gestalt auch in dem entgegengesetzten Extremfall, wenn die Beschleunigung gegen die Geschwindigkeit verschwindet, d. h. wenn das Elektron sich (praktisch) geradlinig-gleichförmig bewegt.

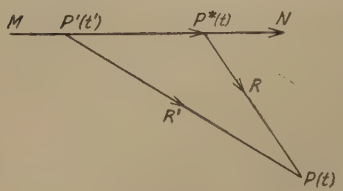

Abb. 32.

Die Bahn des Elektrons sei durch die Gerade MN (Abb. 32) dargestellt. Seine effektive Lage im Augenblick $t' = t - R'/c$ sei P'. Während die aus P' ausgesandte Wirkung den Weg $P'P$ zum Aufpunkt P durchläuft, verschiebt sich das Elektron aus P' nach P^*; P^* ist also seine „momentane" Lage im Augenblick t. Es gilt offenbar die Gleichung $P'P^* = P'P - P^*P$, d. h.

$$\mathfrak{v}'\,(t - t') = \mathfrak{R}' - \mathfrak{R},$$

woraus, nach $t - t' = R'/c$, folgt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' - \frac{\mathfrak{v}'}{c} R' = R'\,(\mathfrak{R}_0' - \mathfrak{v}'/c)\,. \tag{12}$$

Der in (7) auftretende Vektor $\mathfrak{R}_0' - \mathfrak{v}'/c$ ist also gleich $\frac{\mathfrak{R}}{R'}$. Ersetzt man in (8) $\frac{\gamma}{R'}$ durch $\frac{1}{R^*}$ und führt zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\frac{v'}{c} = \beta' \tag{12a}$$

ein, so wird

$$\mathfrak{E} = e'\,(1 - \beta'^2)\,\frac{\mathfrak{R}}{R^{*3}}\,. \tag{13}$$

Ferner bekommt man nach (9), wenn man noch die aus (12) folgende Relation $\mathfrak{v}' \times \mathfrak{R}_0' = \frac{\mathfrak{v}' \times \mathfrak{R}'}{R'} = \frac{1}{R'}\,\mathfrak{v}' \times \left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{v}'}{c} R'\right) = \frac{\mathfrak{v}' \times \mathfrak{R}}{R'}$ beachtet,

$$\mathfrak{H} = e'\,(1 - \beta'^2)\,\frac{\mathfrak{v}' \times \mathfrak{R}}{c\,R^{*3}}\,, \tag{13a}$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß in diesen Formeln statt des effektiven Radiusvektors $\mathfrak{R}'$ der „momentane" $\mathfrak{R}$ eintritt. Dies bedeutet, daß das elektrische und magnetische Feld einer geradlinig-gleichförmig bewegten Punktladung hinsichtlich der *Gestalt* seiner Kraftlinien derart beschaffen ist, als ob die elektromagnetischen Fernwirkungen *momentan* wären. Z. B. sind die elektrischen Kraftlinien von P^* ausgehende Gerade, ebenso wie im Falle einer im P^* ruhenden Ladung. Die Dichte dieser Geradenschar muß aber nach (13), im Gegensatz zum statischen Fall nach verschiedenen Richtungen verschieden sein, so daß das elektrische Feld keine radiale Symmetrie (bezüglich P^*)

aufweist, sondern nur eine axiale Symmetrie in bezug auf die Bahnlinie MN. Aus (13) und (13a) folgt die Beziehung

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{E} \tag{13b}$$

die im Gegensatz zu (9a) nur bei konstanter Geschwindigkeit des Elektrons gilt. Selbstverständlich bleiben die Formeln (13) bis (13b) angenähert auch dann gültig, wenn diese Geschwindigkeit sich verhältnismäßig langsam ändert (quasi-stationäre Bewegung).

§ 3. Spezielle Betrachtung der geradlinig-gleichförmigen Bewegung.

Wir stellen uns nun vor, ein zweites Elektron mit der Ladung e sei mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt und befinde sich im Augenblick t im Punkte P. Die auf dieses Elektron seitens des ersten (e') wirkende Kraft drückt sich bekanntlich durch die allgemeine Formel

$$\mathfrak{F} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}\right)$$

aus, die in unserem Falle ($\mathfrak{v}' = \text{konst}$) nach (13) und (13a) [oder (13b)] die Gestalt

$$\mathfrak{F} = \frac{e'e}{R^{*3}}(1-\beta'^2)\left\{\mathfrak{R}\left(1 - \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}'}{c^2}\right) + \frac{\mathfrak{v}'}{c}\left(\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)\right\} \tag{14}$$

annimmt (vgl. den angenäherten Ausdruck (23b) Kap. III für die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{f} = \frac{e}{c}\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}$).

Die Größen, welche die beiden Elektronen charakterisieren, treten in dieser Formel unsymmetrisch auf; deshalb kann von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung für beliebige $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ keine Rede sein. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß die beiden Elektronen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, d. h. relativ zueinander in Ruhe bleiben. In diesem Fall ($\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'$, $\beta' = \beta$) reduziert sich (19) auf

$$\mathfrak{F} = \frac{ee'}{R^{*3}}(1-\beta^2)\left\{\mathfrak{R}(1-\beta^2) + \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)\right\}. \tag{14a}$$

Die Größe R^* hat für die beiden Elektronen denselben Wert; folglich ergibt sich die auf das erste Elektron seitens des zweiten wirkende Kraft $\mathfrak{F}'$ aus (19a) einfach durch Vertauschung des Vorzeichens des Vektors $\mathfrak{R}$, so daß $\mathfrak{F}' = -\mathfrak{F}$ wird.

Die Formel (19a) läßt sich folgendermaßen umformen. Nach (12) haben wir mit Rücksicht auf (6a)

$$\mathfrak{R}(1-\beta^2) + \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) = \mathfrak{R}'(1-\beta^2) - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left[R'(1-\beta^2) - \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{R}'}{c} + \frac{v^2}{c^2}R'\right]$$
$$= \mathfrak{R}'(1-\beta^2) - \frac{\mathfrak{v}}{c}R^*.$$

Andererseits gilt nach (7b) (bei $\mathfrak{w}' = 0$)

$$\nabla R^* = \mathfrak{R}_0' - \frac{\mathfrak{v}'}{c} + \gamma\,\mathfrak{R}_0'\left(\frac{v_R'}{c} - \frac{v'^2}{c^2}\right).$$

und folglich, wegen $\gamma R^* \mathfrak{R}_0' = \mathfrak{R}$,

$$R^* \nabla R^* = -\frac{\mathfrak{v}'}{c} R^* + \mathfrak{R}' \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right).$$

Es ist also (bei $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}$)

$$\mathfrak{R}(1-\beta^2) + \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) = R^* \nabla R^*,$$

wodurch die Formel (19a) die Gestalt

$$\mathfrak{F} = \frac{e e'(1-\beta^2)}{R^{*2}} \nabla R^*$$

annimmt, oder

$$\mathfrak{F} = -e \nabla \psi \tag{15}$$

mit

$$\psi = \frac{e'(1-\beta^2)}{R^*} = (1-\beta^2)\varphi. \tag{15a}$$

Dieses Resultat kann man auf eine einfachere Weise ableiten, indem man von vornherein den Umstand berücksichtigt, daß die beiden Elektronen sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit bewegen. Und zwar müssen die Potentiale φ und $\mathfrak{A}$, welche die Wirkung von e' auf e bestimmen, zeitlich konstant bleiben. Dies folgt aus der Tatsache, daß diese Potentiale nur von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der relativen Lage der beiden Elektronen (im selben Augenblick), d. h. vom Radiusvektor $\mathfrak{R}$ abhängen; $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{R}$ sind aber in unserem Falle konstant.

Es ist also $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und $\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = 0$, wobei das Symbol $\frac{d}{dt}$ die *vollständige* Differentiation nach der Zeit, d. h. die Änderungsgeschwindigkeit der entsprechenden Größe in einem mit e mitbewegten Aufpunkte bedeutet. Nun gilt, wenn durch $\frac{\partial}{\partial t}$ die zeitliche Ableitung in einem festen Raumpunkt bezeichnet wird,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \varphi \tag{16}$$

und ebenso

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{A}. \tag{16a}$$

Es besteht folglich in dem betrachteten Falle die Beziehung

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\nabla\right)\mathfrak{A}$$

oder wegen $\mathfrak{A} = \varphi \frac{\mathfrak{v}}{c}$,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \cdot \nabla \varphi\right).$$

Mittels dieser Beziehung bekommen wir

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \cdot \nabla \varphi\right).$$

Ferner ist

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \nabla\varphi \times \frac{\mathfrak{v}}{c}.$$

Folglich wird

$$\mathfrak{F} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}\right) = e\left[-\nabla\varphi + \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\varphi\right) + \nabla\varphi\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\nabla\varphi \cdot \frac{\mathfrak{v}}{c}\right)\right]$$
$$= e(1 - v^2/c^2)\nabla\varphi.$$

Wir haben also das frühere Resultat wiedergefunden, ohne den expliziten Ausdruck von φ zu benutzen.

Dieses Resultat läßt sich offenbar verallgemeinern für ein beliebiges System von Elektronen, die eine gemeinsame konstante Translationsgeschwindigkeit besitzen. Die Wechselwirkung der Elektronen behält dabei denselben Charakter wie bei absoluter Ruhe ($v = 0$); die elektrische und elektromagnetische Kraft setzen sich zusammen zu einer Kraft $\mathfrak{F}$, die man als eine gewöhnliche elektrische Kraft interpretieren könnte, welche dem skalaren Potential ψ entspricht.

Dieses Potential pflegt man als *konvektives* Potential zu bezeichnen; dementsprechend darf man das Vektorfeld $-\nabla\psi$ als konvektives Kraftfeld oder auch als die effektive elektrische Feldstärke bezeichnen.

Die Linien des Vektors $-\nabla\psi$ sind im Gegensatz zu den elektrischen Kraftlinien keine Geraden, denn die Niveauflächen des konvektiven Potentials, d. h. die Flächen $\psi =$ konst, sind nicht kugelförmig wie bei einer ruhenden Ladung, sondern *sphäroidal.*

Um dies einzusehen, führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem X_1, X_2, X_3 ein mit dem Ursprung im Punkte P^* (wo das Elektron e' sich im betrachteten Augenblick befindet); die X_1-Achse dieses Systems sei dabei die Gerade MN (Abb. 32), d. h. sie soll in der Bewegungsrichtung gezogen sein.

Bezeichnet man die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, d. h. die Koordinaten des Aufpunktes P bezüglich P^* und P' mit x_k bzw. x_k' ($k = 1, 2, 3$), so kann man die Vektorgleichung (12)

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' - \frac{\mathfrak{v}}{c} R'$$

durch drei skalare Gleichungen

$$x_1 = x_1' - \frac{v}{c} R', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3' \tag{17}$$

ersetzen.

Daraus folgt wegen $R' = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$:

$$(x_1' - x_1)^2 = \beta^2(x_1'^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (\beta = v/c)$$

oder

$$x_1'^2(1 - \beta^2) - 2x_1x_1' + [x_1^2 - \beta^2(x_2^2 + \beta_3^2)] = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung (bezüglich x_1') bekommen wir

(mit Rücksicht auf die Bedingung $x_1' - x_1 = \beta R' > 0$)

$$x_1' = \frac{x_1 + \beta \sqrt{x_1^2 + (1-\beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{17a}$$

Nun ist

$$R^* = R' - \frac{(\mathfrak{R}' \mathfrak{v})}{c} = R' - \beta x_1'$$

oder nach (17)

$$R^* = \frac{x_1' - x_1}{\beta} - \beta x_1 = \frac{x_1'(1-\beta^2) - x_1}{\beta},$$

und folglich nach (17a)

$$R^* = \sqrt{x_1^2 + (1-\beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}. \tag{17b}$$

Wir sehen also, daß die Flächen $\psi =$ konst., ebenso wie die Flächen $\varphi =$ konst. und $\mathfrak{A} =$ konst. durch die Gleichung

$$x_1^2 + (1-\beta^2)(x_2^2 + x_3^2) = R^{*2} = \text{konst}$$

oder

$$\frac{x_1^2}{(R^* \sqrt{1-\beta})^2} + \frac{x_2^2}{R^{*2}} + \frac{x_3^2}{R^{*2}} = 1$$

bestimmt sind. Sie stellen sich folglich dar als abgeplattete Ellipsoide, die aus einer Kugel durch longitudinale Kontraktion im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ entstehen (Abb. 33). Dementsprechend konzentrieren sich die Linien des effektiven elektrischen Kraftfeldes $(-\nabla \psi)$, ebenso wie die elektrischen und magnetischen Kraftlinien, in der Nähe der Äquatorebene, während die Feldstärken in der Nähe der Bewegungslinie vermindert werden.

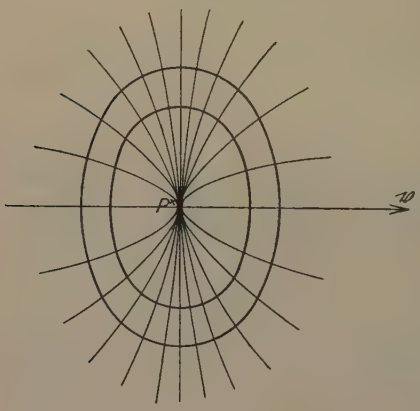

Abb. 33.

Diese Abplattung oder „Kontraktion" des elektromagnetischen Feldes in der Bewegungsrichtung bei Vergrößerung der Geschwindigkeit nimmt zunächst langsam, dann aber bei Annäherung an die kritische Geschwindigkeit c sehr rasch zu; im Grenzfall $v = c$ muß sich das Feld des Elektrons vollständig in die Äquatorialebene zusammenziehen. Diesen Umstand dürfen wir als einen Hinweis darauf betrachten, daß die kritische Geschwindigkeit — oder, wie man sie gewöhnlich bezeichnet, die Lichtgeschwindigkeit — in Wirklichkeit *niemals erreicht werden kann.* Für $v > c$, d. h. $\beta > 1$, wird die Größe R^* nach (17b) außerhalb des Kegels

$$x_1^2 = (\beta^2 - 1)(x_2^2 + x_3^2) \tag{17c}$$

imaginär und damit auch die Potentiale und die Feldstärken.

Diesen Fall, d. h. den Fall der „Überlichtgeschwindigkeit", haben wir aber von vornherein ausgeschlossen [siehe (1a)]. Man kann sich nun fragen, ob wir zu denselben Resultaten gelangen würden unter der Voraussetzung, daß $v > c$ ist. Wir müssen dabei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem das Elektron die nach dem Aufpunkt konvergierende Wirkungskugel von innen nach außen oder von außen nach innen durchsetzt[1]). Im ersten Fall ($v_R < 0$) bleiben die Ausführungen des § 1 ganz unverändert; im zweiten Falle ($v_R > 0$) müssen wir in der Formel (2) $c - v_R$ durch $v_R - c$ ersetzen und dementsprechend in den nachfolgenden Formeln, die diesen Ausdruck enthalten, das Vorzeichen umkehren. Für ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Elektron müßte dabei nur das Vorzeichen von R^* (d. h. von φ und $\mathfrak{A}$) geändert werden, die Formeln (16) bis (17c) würden aber gar keine Änderung erleiden. Wir sehen also, daß in den beiden Fällen die Potentiale und Feldstärken innerhalb des Kegels (17c) imaginäre Werte annehmen würden. Eine Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit scheint demnach physikalisch unmöglich zu sein.

§ 4. Elektronen als Punktsinguläritäten im Raumzeitkontinuum; neue Ableitung der elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung.

In § 1 haben wir die Formeln (3), (4) für die Potentiale einer bewegten Punktladung (von konstanter Größe) auf Grund der Formeln (26) und (27) Kap. V abgeleitet, die sich streng genommen auf den Fall ruhender Ladungen von veränderlicher Größe beziehen. Man kann sie aber auf eine ganz andere, sozusagen direkte Weise bekommen durch ein Integrationsverfahren, das eine Verallgemeinerung desjenigen ist, welches wir bei der Lösung der *Laplace*schen Gleichung für eine *ruhende* Punktladung benützt haben[2]).

Wir führen ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein mit einem ganz beliebigen *festen* Anfangspunkt O. Die Koordinaten des Aufpunktes P seien x_1, x_2, x_3; die Koordinaten des Elektrons e' in einem beliebigen (mit dem effektiven Augenblick nicht notwendig übereinstimmenden) Augenblick t' bezeichnen wir mit x_1', x_2', x_3'.

Einen Raumpunkt und den Augenblick, in welchem er betrachtet wird, wollen wir zusammen als einen „Raumzeitpunkt" im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum fassen. Anstatt also vom Aufpunkt $P\,(x_1, x_2, x_3)$ im Augenblick t zu reden, werden wir einfach der Aufpunkt $P\,(x_1, x_2, x_3, t)$ sagen; ebenso werden wir die Lage des Elektrons im Augenblick t' als den Quellpunkt $P'\,(x_1', x_2', x_3', t')$ bezeichnen.

---

[1]) Im allgemeinen können beide Fälle zugleich eintreten; bewegte sich das Elektron z. B. mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit, so mußte es zunächst in die Wirkungskugel hineintauchen und dann daraus wegfliegen.

[2]) Diese Ableitung rührt von *Herglotz* her.

Das elektrostatische Potential φ und die Komponenten des Vektorpotentials A_1, A_2, A_3 genügen im ganzen Raumzeitkontinuum — mit Ausnahme des Quellpunktes P' — der Differentialgleichung

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 ,$$

die sich im Spezialfalle einer ruhenden Punktladung auf die *Laplace*sche Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ reduziert. Dabei ist $\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}$ und folglich, wenn wir die Bezeichnung

$$x_4 = ict \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{18}$$

(und dementsprechend $x_4' = ict'$) einführen,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_4^2} = 0 . \tag{18a}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Gestalt wie die *Laplace*sche, enthält aber in einer ganz symmetrischen Weise nicht drei, sondern vier Veränderliche (Raumzeitkoordinaten) x_1, x_2, x_3, x_4. Wir müssen ferner die Tatsache berücksichtigen, daß φ und $\mathfrak{A}$ miteinander durch die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

verknüpft sind. Diese Beziehung läßt sich in Koordinaten folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 .$$

Führt man noch entsprechend (18) die Bezeichnung

$$A_4 = i\varphi \tag{19}$$

ein, so nimmt diese Gleichung die symmetrische Gestalt an:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0 . \tag{19a}$$

Statt der Raumkoordinaten und der Zeit haben wir also in (18a) und (19a) vier gleichberechtigte „Koordinaten" und dementsprechend statt des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ und des skalaren Potentials φ vier Komponenten eines „vierdimensionalen" Vektorpotentials (wobei $\psi = A_1, A_2, A_3, A_4$) zu setzen ist.

Die Bewegungsgleichungen des Elektrons (die als bekannt anzusehen sind)

$$x_1' = f_1(t'), \quad x_2' = f_2(t'), \quad x_3' = f_3(t'), \quad x_4' = ict' \tag{20}$$

kann man ebenfalls als die Gleichungen einer „Linie" im vierdimensionalen „Raum" (x_1, x_2, x_3, x_4) behandeln, und zwar als die Gesamtheit der Quellpunkte des vom Elektron erzeugten elektromagnetischen Feldes. Wir wollen deshalb diese Linie als die *singuläre Linie* der Funktionen A_k ($k = 1, \ldots, 4$) bezeichnen.

Wir betrachten zunächst das folgende fiktive Problem: eine in den vier „Koordinaten" x_1, x_2, x_3, x_4 symmetrische Funktion zu finden, die der Gleichung (18a) genügt und *nur einen* singulären Punkt $P'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ besitzt. Von einem rein formalen Standpunkte aus entspricht dieses Problem vollkommen der Integration der gewöhnlichen dreidimensionalen *Laplace*schen Gleichung für eine ruhende Punktladung. Dementsprechend führen wir statt des gewöhnlichen dreidimensionalen Abstandes

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_1')^2 + (x_3 - x_3')^2}$$

den vierdimensionalen Abstand

$$\left.\begin{aligned} S &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_1')^2 + (x_3 - x_3')^2 (x_4 - x_4')^2} \\ &= \sqrt{R^2 - c^2 (t - t')^2} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

ein, und betrachten ψ als eine Funktion von S.

Dabei bekommen wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{d\psi}{dS}\frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{d\psi}{dS}\frac{x_k - x_k'}{S}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = \frac{d^2\psi}{dS^2}\frac{(x_k - x_k')^2}{S^2} + \frac{d\psi}{dS}\frac{S^2 - (x_k - x_k')^2}{S^3},$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = \frac{d^2\psi}{dS^2} + \frac{3}{S}\frac{d\psi}{dS} = 0,$$

woraus sich leicht ergibt

$$\psi = \frac{\alpha}{S^2}. \quad (22)$$

Hier bedeutet α eine willkürliche Integrationskonstante (die zweite additive Integrationskonstante kann gleich null gesetzt werden).

Wir wollen nun mittels der „Punktlösung" (22) von (18a) solche Funktionen A_k konstruieren, die nicht nur die Gleichung (18a), sondern auch die Beziehung (19a) befriedigen. Von dem physikalischen Sinn dieser Funktionen sehen wir vorläufig ganz ab und fassen die Aufgabe von einem rein analytischen Standpunkt auf.

Zu diesem Zweck behandeln wir die Zeit t' (bzw. t) nicht als eine reelle, sondern als eine *komplexe* Variable, und denken uns die zunächst nur für reelle t'-Werte bestimmten Funktionen f_1, f_2, f_3 analytisch fortgesetzt in die ganze komplexe t'-Ebene (dabei müssen wir selbstverständlich voraussetzen, daß eine solche analytische Fortsetzung tatsächlich gestattet ist).

Ferner ziehen wir in dieser Ebene eine ganz beliebige Linie und setzen die „Punktlösungen" $dA_k = \frac{\alpha_k' dt'}{S^2}$, welche nach (22) den einzelnen Punkten — oder genauer den unendlich kleinen Elementen dt' dieser Linie — entsprechen, zusammen zu einer „Linienlösung"

$$A_k = \int \frac{\alpha_k' dt'}{S^2}. \quad (22a)$$

Dabei sind die in S^2 auftretenden Größen x_k' $(k = 1, \ldots, 4)$ als die durch (20) (vermöge der erwähnten analytischen Fortsetzung) definierten Funktionen des komplexen Arguments t' zu behandeln. Dagegen sind die Koeffizienten α_k zunächst unbestimmte Funktionen von t'.

Wir müssen nun diese Funktionen und den Integrationsweg derart wählen, daß die Größen (22a), als Funktionen von x_k $(k = 1 \ldots 4)$ angesehen, der Beziehung (19a) genügen. Da die x_k in den Integralen (22a) als Parameter auftreten, so haben wir nach (21)

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \int \alpha_k' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{S^2}\right) dt' = -\int \alpha_k' \frac{\partial}{\partial x_k'}\left(\frac{1}{S^2}\right) dt'$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = -\int \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_k'}\left(\frac{1}{S^2}\right) \alpha_k' \, dt' .$$

Damit das rechtsstehende Integral identisch, d. h. unabhängig von der Gestalt der Funktionen f_1, f_2, f_3, verschwindet, ist offenbar notwendig und hinreichend, *erstens*, daß die Koeffizienten α_k' sich durch die Formeln

$$\alpha_k' = \alpha \frac{dx_k'}{dt'} \tag{22b}$$

ausdrücken, wo α eine Konstante bedeutet, und *zweitens*, daß der Integrationsweg eine *geschlossene* Kurve darstellt. Dabei bekommen wir nämlich

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_k'}\left(\frac{1}{S^2}\right) \alpha_k' \, dt' = \alpha \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_k'}\left(\frac{1}{S^2}\right) dx_k' = \alpha \, d\left(\frac{1}{S^2}\right),$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = -\alpha \oint d\left(\frac{1}{S^2}\right) \equiv 0 .$$

Es ist also

$$A_k = \alpha \oint \frac{(dx_k'/dt')}{S^2} dt' = \alpha \oint \frac{dx_k'}{S^2} . \tag{23}$$

Enthält die Integrationskurve keine Pole des Integranden, d. h. keine Wurzel der Funktion S^2, so müssen die Integrale $\oint \frac{dx_k}{S^2}$ verschwinden. Wir bekommen dabei eine „triviale" Lösung von (18a) und (19a) — nämlich $A_k = 0$. Liegt dagegen innerhalb der Integrationskurve eine Wurzel $t' = t_0'$ von S^2 enthalten, so gilt bekanntlich nach dem Satze von *Cauchy*[1])

$$\oint \frac{\alpha_k'}{S^2} dt' = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\alpha_k'}{S^2}\right)_{t' = t_0'} = 2\pi i \left(\frac{\alpha_k'}{\frac{dS^2}{dt'}}\right)_{t' = t_0'} \tag{23a}$$

[1]) Wir können nämlich in diesem Falle den Integrationsweg auf einen unendlich kleinen Kreis mit dem Mittelpunkt t_0' zusammenziehen. Auf diesem Kreis genügt

oder da nach (21)

$$\frac{dS^2}{dt'} = 2\left[R\frac{dR}{dt'} + c^2(t-t')\right] \quad \text{und} \quad R_0 = \pm c(t-t_0') \quad \text{ist},$$

$$\oint \frac{\alpha_k'}{S^2}\,dt' = \pi i \left[\frac{\alpha_k'}{cR\left(\frac{dR}{c\,dt'} \pm 1\right)}\right]_{t'=t_0'} \tag{23b}$$

wo bei positivem Umlaufssinn das obere Vorzeichen der Gleichung

$$R - c(t-t') = 0 \tag{23c}$$

und das untere der Gleichung

$$R + c(t-t') = 0 \tag{23d}$$

entspricht.

Bewegt sich das Elektron mit Unterlichtgeschwindigkeit, so haben diese Gleichungen nur *je eine reelle* Wurzel. Dabei bedeutet die reelle Wurzel von (23c) nichts anderes als die effektive Zeit, welche für die retardierten Potentiale charakteristisch ist. Es ist nun leicht einzusehen, daß für diesen Wert von t_0' wir für die Potentialkomponenten A_k die schon oben gefundenen (*Liénard-Wiechert*schen) Formeln (3), (4) bekommen. Denn wir haben

$$\frac{dR}{c\,dt'} = -\frac{v_R'}{c}$$

und folglich, nach (23) und (23b),

$$A_k = \alpha\pi i \frac{dx_k/dt'}{cR(1 - v_R'/c)}, \qquad (t' = t_0')$$

d. h.

$$\mathfrak{A} = \alpha\pi i \frac{\frac{\mathfrak{v}'}{c}}{R(1 - v_R'/c)}$$

und nach (19)

$$\varphi = \frac{\alpha\pi i}{R(1 - v_R'/c)}.$$

Diese Formeln fallen mit (4) bzw. (3) zusammen, wenn man

$$\alpha = \frac{e'}{\pi i} \tag{24}$$

setzt.

In dem Spezialfall eines ruhenden, oder sich geradlinig-gleichförmig bewegenden Elektrons hat die Gleichung $S^2 = 0$ keine imaginären

---

es, nur die zwei ersten Glieder in der Entwicklung von S^2 nach Potenzen der Differenz $t' - t_0'$ zu berücksichtigen. Da aber $S_0 = 0$ ist, so wird $S^2 = \left(\frac{dS^2}{dt'}\right)_0 (t' = t_0')$ und folglich

$$\oint \frac{\alpha_k'\,dt'}{S^2} = \left(\frac{\alpha_k'}{\frac{dS^2}{dt'}}\right)_0 \oint \frac{dt'}{t' - t_0'} = 2\pi i \left(\frac{\alpha_k'}{\frac{dS^2}{dt'}}\right)_0.$$

Wurzeln. Man kann daher den Integrationsweg zu einer beliebigen, geschlossenen oder unendlichen Kurve deformieren, die zwischen den beiden reellen Wurzeln $t' = t_0'$ und $t' = t_0''$ von unten nach oben verläuft (Abb. 34). Die einfachste dieser Kurven ist die Gerade, welche in der Richtung der imaginären Achse durch den Punkt $t' = t$ geht. Wird sie zum Integrationsweg gewählt, so bekommt man nach (23) und (24) im Falle eines ruhenden Elektrons ($R =$ konst.)

$$\varphi = \frac{A_4}{i} = -\frac{e'}{\pi}\int_{t'-t=-i\infty}^{t'-t=+i\infty} \frac{i\,c\,dt'}{R^2+(x_4'-x_4)^2} = \frac{e'}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x_4'-x_4)}{R^2+(x_4'-x_4)^2} = \frac{e'}{R},$$

also das *Coulomb*sche Potential.

Bewegt sich das Elektron in der positiven X_1-Richtung mit einer Geschwindigkeit $v < c$, so ist, wenn $x_1' = v\,t' = -i\beta x_4'$ $\left(\beta = \frac{v}{c}\right)$, $x_1' = x_3' = 0$ und $t = 0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} S^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2i\beta x_1 x_4' + x_4'^2(1-\beta^2) \\ &= (1-\beta^2)\left(x_4' + \frac{i\beta x_1}{1-\beta^2}\right)^2 + \frac{x_2^2 + (1-\beta^2)(x_2^2+x_3^2)}{1-\beta^2}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun $x_1^2 + (1-\beta^2)\,(x_2^2 + x_3^2)$ mit R^{*2} [nach (17b)] und führt statt t' die Veränderliche

$$u = (1-\beta^2)\left(x_4' + \frac{i\beta x_1}{1-\beta^2}\right)$$

ein, so erhält man in Übereinstimmung mit den früheren Resultaten,

$$\varphi = \frac{e}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{R^{*2}+u^2} = \frac{e}{R^*} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \varphi\frac{\mathfrak{v}}{c}.$$

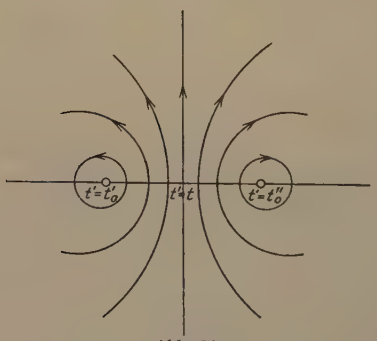

Abb. 34.

Es sei bemerkt, daß in diesen Fällen die gewöhnlichen „retardierten" Potentiale, die dem Augenblick $t' = t_0'$ entsprechen, mit den „voreilenden", die sich als negative Residuen in bezug auf den Punkt $t' = t_0''$ ergeben, zusammenfallen.

Im allgemeinen Falle eines beliebig bewegten Elektrons werden die voreilenden Potentiale von den retardierten ganz verschieden; sie werden als „physikalisch sinnlos" unbeachtet gelassen. Dabei aber könnte man noch eine Menge von Potentialen in Betracht ziehen, die zu *komplexen* Wurzeln von (23c) und (23d) gehören und die von der Art der Bewegung in ganz spezieller „singulärer" Weise abhängen. Diesen singulären Potentialen entspricht eine elektrische Fernwirkung, die weder verzögert, noch voreilend ist, und die vielleicht in der Natur auch stattfinden kann. Doch ist diese Frage bisher noch nicht untersucht worden.

§ 5. Formale Zurückführung der retardierten Fernwirkungen auf momentane.

Die Formel (23) mit dem Wert (24) für die Konstante α, läßt sich mittels der Identität

$$\frac{1}{S^2} = \frac{1}{[R + c(t-t')][R - c(t-t')]} = \frac{1}{2R}\left[\frac{1}{R - c(t-t')} + \frac{1}{R + c(t-t')}\right]$$

in der Form

$$A_k = \frac{e'}{2\pi i}\oint \frac{dx_k'}{R[R - c(t-t')]} + \frac{e'}{2\pi i}\oint \frac{dx_k'}{R[R + c(t-t')]} \tag{25}$$

schreiben.

Den Integrationsweg (l') wählen wir derart, daß er *nur eine* Wurzel von $S^2 = 0$, und zwar die der retardierten Wirkung entsprechende effektive Zeit t_0', und *außerdem noch den betrachteten Zeitpunkt* $t' = t$, für welchen die Potentiale zu berechnen sind, enthält. Dabei fällt das zweite Integral in der vorhergehenden Formel weg, denn die Funktion $\frac{1}{R[R + c(t-t')]}$ bleibt innerhalb l' regulär. Wir nehmen ferner an, daß für alle auf l' liegende Zeitpunkte (t') die Bedingung

$$|R| < |c(t-t')| \tag{25a}$$

erfüllt ist. Es sei bemerkt, daß für die beiden *reellen* Punkte von l' (wo diese Kurve sich mit der reellen Zeitachse schneidet) die Ungleichung (25a) immer gilt, solange die Geschwindigkeit des Elektrons kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bleibt [siehe Ungleichung (1a)]. Es scheint deshalb möglich, die Gültigkeit von (25) auch für andere komplexe Punkte von l' vorauszusetzen.

Bei dieser Voraussetzung (die aber auch nicht zutreffend sein kann) läßt sich die Funktion $\frac{1}{R - c(t-t')}$ in eine (innerhalb und *auf* der Kurve l') konvergente nach positiven Potenzen von $\frac{R}{c(t'-t)}$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Man hat

$$\frac{1}{R[R - c(t-t')]} = \frac{1}{Rc(t'-t)\left[1 + \frac{R}{c(t'-t)}\right]} = \frac{1}{Rc(t'-t)}\sum_{n=0}^{\infty}(-)1^n\left(\frac{R}{c(t'-t)}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{R^{n-1}}{c^{n+1}(t'-t)^{n+1}}$$

und dementsprechend nach (25)

$$A_k = \frac{e'}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \oint \frac{\frac{dx_k'}{cdt'}\, R^{n-1} c\, dt'}{c^{n+1}\,(t'-t)^{n+1}}.$$

Bedeutet $F(t')$ irgendeine innerhalb der Integrationskurve reguläre Funktion, so besteht bekanntlich die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F(t')\,dt'}{(t'-t)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n F(t')}{dt'^n}\right)_{t'=t} = \frac{F^{(n)}(t)}{n!}.$$

Wir bekommen also für die A_k die folgende (sogenannte *Lagrange*sche) Reihe

$$A_k = e' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{c^n dt'^n}\left(\frac{dx'_k}{c\,dt'} R^{n-1}\right) \qquad (t'=t) \qquad (26)$$

d. h. die Reihe

$$\varphi = e' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n (R^{n-1})}{c^n\, dt'^n} \qquad (t'=t) \qquad (26a)$$

für das skalare Potential und

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{c^n dt'^n}\left(e' \frac{\mathfrak{v}'}{c} R^{n-1}\right) \qquad (t'=t) \qquad (26b)$$

für das Vektorpotential.

In diesen Formeln beziehen sich die Größen $\mathfrak{v}$ und R, d. h. die Geschwindigkeit des Elektrons und sein Abstand vom Aufpunkt $P(x_1, x_2, x_3) = P(\mathfrak{r})$ auf *denselben Augenblick* $t' = t$, für welchen seine Wirkung in P berechnet wird.

Diese Wirkung darf also *formal* als eine augenblickliche oder *momentane Fernwirkung* behandelt werden, die aber ganz äquivalent der früher betrachteten und durch die Formeln (3), (4) ausgedrückten *retardierten Fernwirkung* ist.

Diese formale Zurückführung der tatsächlichen retardierten Fernwirkung auf eine fiktive momentane ist offenbar nur für solche Bewegungen des Elektrons zulässig, bei denen seine Geschwindigkeit nicht nur der Bedingung (1a), sondern auch der Bedingung, daß alle seine Ableitungen nach der Zeit endlich und stetig bleiben, genügt. Ferner sind die Reihen (26) bis (26b) im allgemeinen nur für genügend kleine Abstände R unbedingt konvergent. Dagegen scheinen sie für große Abstände divergent — oder im besten Falle semikonvergent — zu werden (als natürliche Längeneinheit bei periodischer Bewegung darf dabei, wie schon in Kap. V behauptet wurde, die Wellenlänge angesehen werden). Dies hängt offenbar damit zusammen, daß unsere obige Voraussetzung über die Gültigkeit der Ungleichung (25a) auf der *ganzen* Integrationskurve l' (die zunächst die beiden Punkte t'_0 und t enthalten muß) im allgemeinen nicht erfüllt ist.

Die Formeln (26a) und (26b) sind (in dem entsprechenden Konvergenzbereich) bei der Untersuchung der *Wechselwirkung* zwischen zwei oder mehreren Elektronen sehr bequem, da sie erlauben, alle diese Elektronen (ebenso wie in der gewöhnlichen Mechanik der Systeme

materieller Punkte), für denselben Augenblick zu betrachten, statt für jedes Elektronenpaar zwei verschiedene „effektive" Zeiten einzuführen. Man kann sie auch bei der Betrachtung der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Elementen desselben Elektrons (solange das letztere als ein räumlich ausgedehntes Gebilde behandelt wird) anwenden.

Beschränkt man sich auf die ersten zwei Glieder der Reihe (26b), so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{e'\mathfrak{v}}{cR} - \frac{e'\mathfrak{w}}{c^2} \tag{27}$$

(wobei die Akzente bei $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ weggelassen sind, da diese Größen sich auf den Augenblick t beziehen).

Das zweite Glied der Reihe (26a) ist offenbar gleich null. Berücksichtigt man noch das nächste Glied, so wird

$$\varphi = \frac{e'}{R} + \frac{e'}{2}\frac{d^2R}{c^2 dt^2}.$$

Nun ist

$$\frac{dR}{dt} = -v_R = -\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{v}}{R}$$

und folglich

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{w}}{R} - \left(\frac{1}{R}\frac{d\mathfrak{R}}{dt} - \frac{\mathfrak{R}}{R^2}\frac{dR}{dt}\right)\mathfrak{v} = -\mathfrak{R}_0\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{v}^2 - (\mathfrak{R}_0\mathfrak{v})^2}{R}.$$

Wir bekommen also

$$\varphi = \frac{e'}{R}\left\{1 + \frac{\mathfrak{v}^2 - (\mathfrak{R}_0\mathfrak{v})^2}{2c^2}\right\} - \frac{e'}{2c^2}\mathfrak{R}_0\mathfrak{w}. \tag{27a}$$

Es sei bemerkt, daß die zweiten Glieder auf der rechten Seite von (27) und (27a) solche (momentane) Fernwirkungen darstellen, deren Intensität vom Abstand *ganz unabhängig* ist. Die weggelassenen Glieder höherer Ordnung in (26a) und (26b) führen im allgemeinen auf Fernwirkungen, die mit dem Abstand sogar nicht abnehmen, sondern im Gegenteil *zunehmen*, und zwar als positive Potenzen dieses Abstands.

Solche momentane Fernwirkungen, die in ihrer Gesamtheit die den Potentialen (3) und (4) entsprechenden retardierten Fernwirkungen ersetzen, sind offenbar bloße mathematische Fiktionen, die *einzeln* gar keinen physikalischen Sinn haben.

Aus den Formeln (27) und (27a) ergeben sich nach den allgemeinen Gleichungen $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$ die folgenden Ausdrücke für die magnetische und elektrische Feldstärke:

$$\mathfrak{H} = \frac{e'\mathfrak{v}\times\mathfrak{R}_0}{cR^2} \tag{28}$$

(Bio-Savartsches Gesetz) und

$$\mathfrak{E} = \frac{e'\mathfrak{R}_0}{R^2}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{R}_0)^2}{c^2}\right\} - e'\frac{\mathfrak{w} + \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w})}{2c^2R} + \frac{e'}{c^3}\frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \tag{28a}$$

Diese angenäherten Formeln weichen von den exakten Formeln (8) und (9) ziemlich stark ab.

Das letzte Glied in dem vorhergehenden Ausdruck für $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{E}^{(3)} = \frac{e'}{c^3}\frac{d\mathfrak{w}}{dt} \tag{28b}$$

spielt, wie wir unten sehen werden, eine wichtige Rolle in der Strahlungstheorie.

Siebentes Kapitel.

Energie und Bewegungsgröße bei zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Erscheinungen; Dynamik der Elektronen.

§ 1. Die elektrische Energie eines Systems ruhender Ladungen.

Die gegenseitige (oder „relative") Energie zweier ruhender Punktladungen e' und e drückt sich bekanntlich durch die Formel

$$U = \frac{e'e}{R} \tag{1}$$

aus, wo R wie immer den Abstand zwischen den entsprechenden Punkten P' und P bedeutet.

Da $\frac{e'}{R} = \varphi$ das Potential von e' im Punkte P darstellt, und ebenso $\frac{e}{R} = \varphi'$ das Potential von e im Punkte P', so kann man auch

$$U = e\varphi = e'\varphi' = \frac{1}{2}(\varphi e + \varphi' e') \tag{1a}$$

setzen.

Diese Formeln lassen sich leicht verallgemeinern für den Fall eines Systems von beliebig vielen Ladungen $e_1, e_2, \ldots . e_n$. Diese Ladungen seien ursprünglich in den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_n$ konzentriert. Wir stellen uns nun vor, daß sie sich aus dieser Lage in die neue $P_1', P_2', \ldots . P_n'$ verschieben. Die dabei geleistete Arbeit A ist definitionsgemäß gleich der algebraischen Abnahme der gegenseitigen potentiellen Energie der betreffenden Ladungen, d. h. der elektrischen Energie des von ihnen gebildeten Systems. Bezeichnet man die Werte dieser Energie in der Anfangs- und Endlage mit U bzw. U', so ist

$$A = U - U'.$$

Die Arbeit A setzt sich offenbar zusammen aus den Einzelbeträgen, die von der Wirkung jeder Ladung auf jede andere herrühren. Bezeichnet man also mit $A_{\alpha\beta}$ die Arbeit, welche durch die auf e_β seitens e_α wirkende Kraft geleistet wird, so gilt

$$A = \sum_{\alpha \neq \beta}\sum A_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta}\sum (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \neq \beta}\sum (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}).$$

Die Summe $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$ ist nun offenbar gleich der algebraischen Abnahme der gegenseitigen Energie von e_α und e_β, d. h. der Differenz $U_{\alpha\beta} - U'_{\alpha\beta}$. Folglich haben wir

$$U - U' = \sum_{\alpha<\beta}\sum U_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha<\beta}\sum U'_{\alpha\beta}$$

d. h.

$$U = \sum_{\alpha<\beta}\sum U_{\alpha\beta}$$

oder nach (1)

$$U = \sum_{\alpha<\beta}\sum \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\sum \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}. \tag{2}$$

Führen wir nun das in dem Punkte P_β, wo die β-te Ladung sich befindet, von allen anderen Ladungen erzeugte Potential

$$\varphi^*_\beta = \sum_{\alpha\neq\beta} \frac{e_\alpha}{R_{\alpha\beta}} \tag{2a}$$

ein, so kann die Energie U in der Form

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} \varphi^*_\beta e_\beta \tag{2b}$$

dargestellt werden.

Diesen Energieausdruck kann man nun auf eine ganz andere Weise transformieren, die für das Folgende von grundlegender Bedeutung ist.

Es seien φ_α und $\mathfrak{E}_\alpha$ das Potential bzw. die elektrische Feldstärke der α-ten Ladung in *irgendeinem* Punkte P, φ'_α und $\mathfrak{E}'_\alpha$ die von allen anderen Ladungen in diesem Punkte herrührenden Beträge ($\varphi'_\alpha = \varphi - \varphi_\alpha$, $\mathfrak{E}'_\alpha = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_\alpha$); im Punkte P_α, wo sich die Ladung e_α befindet, ist $\varphi'_\alpha = \varphi^*_\alpha$. Es sei ferner S eine alle diese Ladungen einschließende Fläche. Mittels der Formel

$$e_\alpha = \frac{1}{4\pi}\oint (\mathfrak{E}_\alpha)_n dS$$

erhält man

$$\varphi^*_\alpha e_\alpha = \frac{1}{4\pi}\oint (\varphi^*_\alpha \mathfrak{E}_\alpha)_n dS = \frac{1}{4\pi}\int (\varphi'_\alpha \mathfrak{E}_\alpha)_n dS - \frac{1}{4\pi}\oint [(\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha)\mathfrak{E}_\alpha]_n dS.$$

Das letzte Integral formen wir nach dem *Gauß*schen Satze um:

$$\oint [(\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha)\mathfrak{E}_\alpha]_n dS = \int \operatorname{div}(\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha)\,\mathfrak{E}_\alpha \cdot dV$$

$$= \int (\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha)\operatorname{div}\mathfrak{E}_\alpha dV + \int (\mathfrak{E}_\alpha \cdot \operatorname{grad}(\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha))dV.$$

Da außerhalb des Punktes P_α $\operatorname{div}\mathfrak{E}_\alpha = 0$ ist, während

$$\int \operatorname{div}\mathfrak{E}_\alpha dV = \oint (\mathfrak{E}_\alpha)_n dS = 4\pi e_\alpha$$

eine *endliche* Größe hat, so wird

$$\int (\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha) \operatorname{div} \mathfrak{E}_\alpha \, dV = 0.$$

Ferner ist

$$\operatorname{grad} (\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha) = \operatorname{grad} \varphi'_\alpha = - \mathfrak{E}'_\alpha$$

und folglich

$$\int \mathfrak{E}_\alpha \operatorname{grad} (\varphi'_\alpha - \varphi^*_\alpha) dV = - \int \mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}'_\alpha dV.$$

Wir bekommen also die folgende Formel

$$U = \frac{1}{2} \sum_\alpha \varphi^*_\alpha e_\alpha = \frac{1}{8\pi} \oint \Big(\sum_\alpha \varphi'_\alpha \mathfrak{E}_\alpha \Big)_n dS + \frac{1}{8\pi} \int \sum_\alpha (\mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}'_\alpha) \, dV,$$

oder, indem die Fläche S ins Unendliche verschoben wird, wobei das Flächenintegral verschwindet (da $\Sigma \varphi'_\alpha \mathfrak{E}_\alpha$ umgekehrt proportional zur dritten oder einer noch höheren Potenz des Abstandes abnimmt)

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \sum_\alpha \mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}'_\alpha dV = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{\alpha < \beta} \sum \mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}_\beta \, dV \tag{3}$$

Bei Annäherung an jeden der Punkte P_α ($\alpha = 1, 2, \ldots$) wird die entsprechende Feldstärke $\mathfrak{E}_\alpha$ unendlich, und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes l_α von P_α. Da aber die Größe eines sehr kleinen Volums V_α, welches P_α enthält, der dritten Potenz seiner Linearabmessungen proportional ist, so muß das Integral $\int \mathfrak{E}_\alpha dV_\alpha$ für $V_\alpha \to 0$ verschwinden. In der Tat, führt man neben dem Abstand l_α noch einen unendlich kleinen Raumwinkel $d\Omega_\alpha$ mit der Spitze in P_α ein, so hat man wegen $dV_\alpha = l^2 \, d\Omega_\alpha \, dl_\alpha$ und $E_\alpha = \frac{e_\alpha}{l^2_\alpha}$

$$\int E_\alpha \, dV_\alpha = e_\alpha \int\int dl_\alpha \, d\Omega_\alpha = e_\alpha \, [V_\alpha^{1/3}], \tag{3a}$$

wo das Symbol $[A]$ eine Zahl von der Größenordnung A bedeutet. Es ist also für $V_\alpha \to 0$, $\int E_\alpha \, dV_\alpha \to 0$. Dadurch erklärt sich die Tatsache, daß das Integral (3), trotz des Unendlichwerdens der Größen E_α in einzelnen Punkten einen endlichen Wert behält.

Mit Rücksicht auf $\mathfrak{E}'_\alpha = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_\alpha$ haben wir:

$$\sum_\alpha \mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}'_\alpha = (\sum_\alpha \mathfrak{E}_\alpha) \mathfrak{E}^2 - \sum_\alpha E^2_\alpha = E^2 - \sum_\alpha E^2_\alpha$$

Dementsprechend könnte man die Formel (3) folgendermaßen schreiben

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV - \frac{1}{8\pi} \sum_\alpha \int E^2_\alpha \, dV. \tag{4}$$

Diese Darstellung der Energie hat aber keinen Sinn, da die Integrale $\int E^2 dV$ und $\int E^2_\alpha dV$, einzeln genommen, unendlich sind. Es ist, z. B. nach (3a)

$$\int E^2_\alpha dV_\alpha = e^2_\alpha \int\int \frac{d\, l_\alpha}{l^2_\alpha} \, d\Omega_\alpha = e^2_\alpha [V_\alpha^{-1/3}] \to \infty. \tag{4a}$$

Wir denken uns nun statt eines Systems von Punktladungen eine *kontinuierliche* Verteilung der Elektrizität innerhalb eines endlichen Volums V_0 mit der *endlichen* Volumdichte ϱ. Bezeichnet man mit $\mathfrak{E}_\alpha$ die elektrische Feldstärke, die von einer in dem sehr kleinen Volum V_α enthaltenen elektrischen Ladung $e_\alpha = \int \varrho\, dV_\alpha \cong \varrho V_\alpha$ herrührt, so muß das Integral $\int E_\alpha^2 dV_\alpha$ bei $V_\alpha \to 0$ nicht unendlich groß, sondern *unendlich klein* werden. In der Tat, wäre die Ladung e_α in einem Punkte P_α konzentriert (wodurch das Integral $\int E_\alpha^2 dV_\alpha$ keine beträchtliche Änderung erleiden würde), so hätten wir beim Zusammenziehen von V_α auf P_α, nach (4a)

$$\int E_\alpha^2 dV_\alpha = \varrho^2 [V_\alpha^{5/3}] \to 0. \qquad (4b)$$

Die Größenordnung des Integrals $\int E_\alpha^2 dV'$, erstreckt auf das ganze Volum V_0 mit Ausschluß von $V_\alpha (V'_\alpha = V - V_\alpha)$ muß offenbar unendlich klein von noch höherer Ordnung als (4b) sein (denn es ist $\int E_\alpha^2 dV'_\alpha = \varrho^2 [V_\alpha^2] [V_0^{1/3}]$). Man hat also

$$\int E_\alpha^2 dV = \varrho^2 [V_\alpha^{5/3}],$$

und folglich, wenn das Volumen V in Elementarvolumina von derselben Größe (oder Größenordnung) V_α eingeteilt wird,

$$\sum_\alpha \int E_\alpha^2 dV = \varrho^2 \left[\frac{V_0}{V_\alpha}\right] [V_\alpha^{5/3}] = \varrho^2 V_0 [V_\alpha^{2/3}] \to 0. \qquad (4c)$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch für den Fall der Verteilung der Elektrizität auf einer Fläche S_0 mit der endlichen *Flächendichte* η. Teilt man S_0 in unendlich kleine Flächenelemente S_α ein, die in unendlich kleinen Volumelementen V_α von denselben Linearabmessungen enthalten sein mögen, so wird statt (4b)

$$\int E_\alpha^2 dV_\alpha = \eta^2 [S_\alpha^2] [V_\alpha^{-1/3}] = \eta^2 [V_\alpha^{4/3}] [V_\alpha^{-1/3}] = \eta^2 [V_\alpha], \qquad (4d)$$

und statt (4c)

$$\sum_\alpha \int E_\alpha^2 dV = \eta^2 [V_\alpha] \left[\frac{S_0}{S_\alpha}\right] = \eta^2 S_0 [V_\alpha^{1/3}] \to 0. \qquad (4e)$$

Es muß aber betont werden, daß bei einer Verteilung der Elektrizität längs einer *Linie* σ_0 mit endlicher *Liniendichte* $\zeta \left(= \frac{de}{d\sigma}\right)$, die Summe $\sum_\alpha \int E_\alpha^2 dV$ für $\sigma_\alpha \to 0$ und $V_\alpha \to 0$ *endlich* bleibt, und zwar von der Größenordnung $\zeta^2 \sigma_0$.

Wir sehen also, daß bei einer kontinuierlichen Verteilung der Elektrizität mit endlicher Volum- oder Flächendichte (aber *nicht* Liniendichte!), die gegenseitige elektrische Energie der unendlich kleinen Ladungselemente, die in den unendlich kleinen Volum- bzw. Flächen-

elementen des betrachteten Systems ihren Sitz haben, sich ausdrückt durch das Integral

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV . \tag{5}$$

Dieses Resultat bleibt auch für unendlich große geladene Volumina V_0 oder Flächen S_0 gültig, sofern die Gesamtladung $\int \varrho dV_0$ bzw. $\int \eta dS_0$ endlich ist.

Nach der Formel (5) kann man die elektrische Energie als eine räumlich lokalisierbare Größe behandeln, etwa von derselben Art wie die elektrische Ladung (im Falle der Volumverteilung). Dabei kann man sich vorstellen, daß im Volumelement dV die Energiemenge $\frac{E^2}{8\pi} dV$ aufgespeichert ist, d. h. daß die Energie im Raume mit der Volumdichte

$$\xi = \frac{E^2}{8\pi} \tag{5a}$$

verteilt ist. Diese „Volumdichte" der Energie ist dabei in jedem Punkte durch die entsprechende *resultierende* Feldstärke bestimmt.

Wir wollen nun die Formel (5) „rückwärts" transformieren, d. h. die durch sie dargestellte Energie auf die Gestalt zurückführen, welche unserer ursprünglichen Formel (26) für die gegenseitige Energie eines Systems von Punktladungen entspricht.

Zu diesem Zweck führen wir die in (5) angedeutete Integration zunächst für ein begrenztes Volum (V) aus. Wir wollen uns dabei auf den Fall der Volumverteilung beschränken. Dann gilt $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho$, und folglich, wegen der Identität $\operatorname{div} \varphi \mathfrak{E} = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{grad} \varphi$ und der Beziehung $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi$,

$$E^2 = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{E} - \operatorname{div} \varphi \mathfrak{E} = 4\pi\varphi\varrho - \operatorname{div} \varphi \mathfrak{E}.$$

Es ist also, wenn man die das Volum V begrenzende Fläche mit S bezeichnet,

$$\frac{1}{8\pi} \int_{(V)} E^2 dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varphi\varrho dV - \frac{1}{8\pi} \oint \varphi E_n dS.$$

Wir verschieben nun S ins Unendliche; dabei verschwindet das Flächenintegral (sofern die elektrische Ladung im Endlichen verteilt bleibt) so daß nach (5)

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi\varrho dV \tag{6}$$

wird.

Für eine Flächenverteilung der Elektrizität bekommt man durch eine ganz analoge Transformation von (5) mittels der Gleichung (23b) Kap. IV

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi\eta dS . \tag{6a}$$

Diese Formeln scheinen auf den ersten Blick der Formel (2b) vollkommen zu entsprechen. In Wirklichkeit aber besteht zwischen ihnen ein

sehr wesentlicher Unterschied. Dieser Unterschied äußert sich schon in der Tatsache, daß die durch (6) und (6a) definierte Energie immer positiv sein muß (da die erwähnten Formeln mit (5) identisch sind), während die durch die Formel (2b) bestimmte Energie eines Systems von elektrischen *Punkt*ladungen positiv oder negativ ausfällt, je nachdem ob die gleichnamigen oder entgegengesetzten Ladungen einander näher liegen.

Die in der Formel (2b) vorkommende Größe φ_α stellt das Potential im Punkte P_α aller Ladungen mit Ausnahme der Ladung e_α, die sich in P_α selbst befindet. Dagegen bedeutet die Größe φ in der Formel (6) (oder 6a) den *vollständigen* Wert des Potentials in dem betrachteten Punkte — den Wert also, welcher nicht nur von den „fernliegenden" Ladungen, sondern auch von der zu diesem Punkt gehörigen Ladung herrührt. Wegen der vorausgesetzten Endlichkeit der Ladungsdichte ϱ (bzw. η) ist die erwähnte Ladung tatsächlich gleich Null. Genauer gesprochen: der von einer innerhalb des Volumelements V_α steckenden Ladung ϱV_α (odere ηS_α) herrührende Anteil des Potentials in irgendeinem Punkte P_α dieses Volumelementes ist eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $V_\alpha^{2/3}$ (bzw. $V_\alpha^{1/3}$). Es gibt deshalb praktisch keinen Unterschied zwischen dem Totalwert φ des Potentials in V_α und dem Wert φ_α^*, welcher nur durch die außerhalb V_α liegenden Ladungen bedingt wird.

Der Formel (2b) entspricht in dem betrachteten Fall die Summe $\frac{1}{2}\sum \varphi_\alpha^* \varrho V_\alpha$, welche die *gegenseitige* Energie der in den unendlich kleinen Volumelementen steckenden Elementarladungen darstellt. Im Limes $V_\alpha \to 0$ fällt aber diese Summe zusammen mit dem Integral (6). Dieses Integral kann man also als die *gegenseitige* elektrische Energie der verschiedenen unendlich kleinen Elemente der elektrischen Ladung definieren. Man kann es aber auch als die *vollständige* elektrische Energie des betrachteten Systems bezeichnen, da darin noch die im Limes verschwindende Summe der „inneren" Energien der einzelnen Ladungselemente (d. h. die „gegenseitige" Energie der noch kleineren Elemente, aus welchen sie zusammengesetzt sind) steckt.

Der Umstand, daß die durch (6) und (6a) dargestellte Energie immer *positiv* ist, erklärt sich dadurch, daß die nächstliegenden Elemente der elektrischen Ladung, welche am meisten zur „gegenseitigen" Energie des ganzen Systems beitragen, wegen der (vorausgesetzten) Stetigkeit der Dichtefunktion ϱ (oder η), *dasselbe Vorzeichen* haben. Im Falle eines Punktladungssystems können dagegen diese nächstliegenden Ladungen ebensogut dasselbe wie das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen (siehe oben).

Diese Ausführungen zeigen, daß hinsichtlich des Energiebegriffs ein wesentlicher prinzipieller Unterschied zwischen Systemen von

Punktladungen („punktförmigen Elektronen") einerseits und den kontinuierlichen Elektrizitätsverteilungen mit endlicher Volum- oder Flächendichte existiert[1]). Dieser Unterschied hat seine physikalische Wurzel in der Form des fundamentalen (*Coulomb*schen) Gesetzes der elektrostatischen Wirkungen. Wäre z. B. die Anziehungs- oder Abstoßungskraft zwischen zwei Ladungen nicht dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional, sondern etwa direkt proportional der ersten Potenz der letzteren, so würde zwischen Punktsystemen und kontinuierlichen Verteilungen eine Irreduzibilität der erwähnten Art nicht bestehen.

Diese Irreduzibilität äußert sich am klarsten in der Tatsache, daß die Darstellung der Energie in der Form (5), wobei sie als eine „stoffartige" Größe mit einer durch die resultierende elektrische Feldstärke nach (5a) bestimmten Volumdichte auftritt, für ein System von Punktladungen unmöglich ist, und durch die ursprüngliche Darstellung (3), wo die elementaren, von den einzelnen Punktladungen herrührenden Feldstärken explizite auftreten, ersetzt werden muß.

Es ist deshalb sehr wichtig für den Weiteraufbau der Energielehre festzustellen, ob die Elektronen als Punktladungen oder als räumlich ausgedehnte Gebilde — etwa kleine Kugeln mit Flächen- oder Volumladung — anzusehen sind. Wir wollen zunächst die zweite Vorstellung, die besonders von *Lorentz* und *Abraham* entwickelt wurde, wählen, und zwar ohne auf ihre Kritik von physikalischer oder erkenntnistheoretischer Seite einzugehen. Diese kritischen Betrachtungen sollen erst am Ende des vorliegenden Kapitels Platz finden, wo wir die auf Grund der erwähnten „klassischen" Vorstellung gewonnenen Resultate an die Vorstellung der „punktförmigen" Elektronen anzupassen versuchen werden.

Die elektrische Energie eines Systems von ruhenden Elektronen werden wir dementsprechend durch die Formel (5) darstellen. Diese Energie setzt sich offenbar zusammen aus zwei Anteilen, und zwar aus der *gegenseitigen* Energie der verschiedenen Elektronen und aus der „inneren" Energie der einzelnen Elektronen, d. h. der wechselseitigen Energie der unendlich kleinen Elemente jedes einzelnen Elektrons. Die erste Energie wollen wir mit U^g und die zweite mit der Summe $\sum_\alpha U_\alpha$ bezeichnen, wobei der Index $\alpha\,(= 1, 2, \ldots)$ sich auf die einzelnen Elektronen beziehen soll. Es ist also

$$U = U^g + \sum_\alpha U_\alpha . \tag{7}$$

Der angeführten Einteilung der „totalen" Energie U entspricht die sich nach der Identität

$$E^2 = (\sum_\alpha \mathfrak{E}_\alpha)^2 = \sum_{\alpha \neq \beta} \sum (\mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}_\beta) + \sum_\alpha E_\alpha^2$$

[1]) Den Fall endlicher Liniendichte werden wir im folgenden außer acht lassen.

ergebende Aufspaltung des Integrals (5) in die folgenden Teilintegrale

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\sum\int \mathfrak{E}_\alpha\mathfrak{E}_\beta\,dV + \sum_\alpha \frac{1}{8\pi}\int E_\alpha^2\,dV\,,$$

wobei offenbar gilt

$$U^g = \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\sum\int \mathfrak{E}_\alpha\mathfrak{E}_\beta\,dV \tag{7a}$$

und

$$U_\alpha = \frac{1}{8\pi}\int E_\alpha^2\,dV\,. \tag{7b}$$

Die Formel (7a) ist äußerlich identisch mit unserer ursprünglichen Formel (3) für die gegenseitige Energie eines Systems von Punktladungen. Tatsächlich aber müssen die Elementarfeldstärken $\mathfrak{E}_\alpha$, wenigstens innerhalb der Elektronen, von den üblichen *Coulomb*schen Ausdrücken für Punktladungen verschieden sein.

Betrachtet man das Elektron als eine Kugel vom Radius a, auf deren Oberfläche oder in deren Innerem die Elektronenladung e (den Index α lassen wir fort) *gleichförmig*, und zwar mit der Flächendichte $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$ bzw. der Volumdichte $\varrho = \frac{3e}{4\pi a^3}$ verteilt ist, so kann man folgendes behaupten. „Außerhalb" des Elektrons fällt sein elektrisches Feld zusammen mit dem Feld einer Punktladung derselben Größe, die in seinem Mittelpunkt konzentriert ist (vgl. Kap. IV, § 5). Was nun das „Elektroneninnere" betrifft, so muß man die beiden erwähnten Fälle voneinander unterscheiden. Und zwar muß im Falle einer gleichförmigen Oberflächenladung die elektrische Feldstärke innerhalb der Kugel verschwinden. Ist die Ladung dagegen gleichförmig im ganzen Kugelvolum verteilt, so hängt die elektrische Feldstärke E im Abstande r vom Zentrum, nur von der innerhalb der Kugel vom Radius r befindlichen Ladung ab. Dabei wirkt diese Ladung offenbar so, als ob sie im Kugelmittelpunkt konzentriert wäre. Es ist also in dem betrachteten Fall für $r < a$

$$E = \frac{4\pi\varrho r^3}{3r^2} = \frac{4\pi}{3}\varrho r = \frac{er}{a^3}\,.$$

Wir können jetzt die „innere" oder Eigenenergie unseres Elektrons mittels der Formel (7b) berechnen[1]). Im Falle des flächengeladenen Elektrons ergibt sich $U = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{r=a}^{\infty}\frac{e^2}{r^4}\,dV$, d. h. mit $dV = 4\pi r^2 dr$,

$$U = \frac{e^2}{2a}\,. \tag{8}$$

[1]) Man könnte selbstverständlich dazu auch die Formeln (6) oder (6a) benutzen.

Für das volumgeladene Elektron bekommt man

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_0^a \frac{e^2}{a^6} r^2 dV + \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty \frac{e^2}{r^4} dV,$$

d. h.

$$U = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a}. \tag{8a}$$

Es sei bemerkt, daß die Eigenenergie eines Elektrons, d. h. die gegenseitige Energie der unendlich kleinen Elemente seiner elektrischen Ladung, die Arbeit darstellt, welche von den zwischen diesen Elementen tätigen Abstoßungskräften bei ihrem Voneinanderfliegen ins Unendliche — also bei einer *Explosion* des Elektrons — geleistet würde. Soweit aber eine derartige Explosion unmöglich erscheint, und im allgemeinen, soweit die Struktur des Elektrons unveränderlich bleibt, spielt seine Eigenenergie nur die Rolle einer unwesentlichen additiven Konstante in dem Ausdruck (7) der totalen Energie eines Systems von Elektronen. Es ist also bei der Betrachtung der elektrostatischen Wirkungen praktisch gleichgültig, ob man mit der totalen oder nur der gegenseitigen Energie der Elektronen rechnet. Ihre Eigenenergie bleibt physikalisch belanglos. Wir werden aber sehen, daß die Sachlage ganz verschieden wird, sobald man vom Ruhezustand der Elektronen zur Bewegung übergeht.

§ 2. Die magnetische Energie von elektrischen Strömen.

Wir haben in § 2, Kap. V gesehen, daß die gegenseitige magnetische Energie T zweier linearer Ströme, welche definiert ist als die Größe, deren Abnahme bei irgendeiner Änderung der Lage der Stromlinien oder der Stromstärken gleich der vollständigen von den Transversalen („pondermotorischen") und longitudinalen („elektromotorischen") Kräften geleisteten Arbeit ist, sich durch die Formel ausdrückt

$$T = i\int H_n dS = i'\int H'_{n'} dS' = T', \tag{9}$$

wo $\mathfrak{H}$ die von i' herrührende magnetische Feldstärke und $\int H_n dS = \Phi$ ihren Fluß durch die Stromlinie $\sigma(i)$ bedeutet. Dieselbe Bedeutung haben die Größen $\mathfrak{H}'$ und $\int H'_{n'} dS' = \Phi'$ für die zweite Stromlinie $\sigma'(i')$. Führt man statt der magnetischen Feldstärken die entsprechenden Vektorpotentiale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ ein, so läßt sich nach (20b) Kap. III, die Energie $T = T'$ auf eine hinsichtlich der beiden Stromlinien symmetrische Form bringen, nämlich

$$T = Lii' \tag{9a}$$

mit

$$L = \oint\oint \frac{\tau\tau'}{R} d\sigma d\sigma'. \tag{9b}$$

Die Formel (9a) ist ganz analog der Formel (1) für die gegenseitige elektrische Energie zweier Punktladungen. Dabei spielen die Stromstärken die Rolle der Ladungen (e bzw. e') und der Koeffizient L — die Rolle des reziproken Abstandes zwischen den letzteren. Dieser Koeffizient, der nur von der relativen Lage der beiden Stromlinien abhängig ist, heißt der *gegenseitige Induktionskoeffizient*. Er kann nach (9a) definiert werden als die gegenseitige magnetische Energie der betrachteten Ströme bei der Stromstärke *eins* ($i = i' = 1$). Man kann ihn auch definieren als den magnetischen Fluß, welcher durch eine Stromlinie infolge der Anwesenheit der anderen durchgeht, wenn die Stromstärke in der letzteren gleich 1 ist. In der Tat, für beliebige Stromstärken gilt nach (9) und (9a)

$$\Phi = i'L, \quad \Phi' = iL. \tag{9c}$$

Es sei bemerkt, daß die Formel (9) in der Gestalt

$$T = i\Phi = i'\Phi' = \tfrac{1}{2}(i\Phi + i'\Phi')$$

geschrieben werden kann; daraus folgt durch Vergleich mit (1a), daß der magnetische Fluß für die magnetische Energie von linearen Strömen dieselbe Rolle spielt wie das skalare Potential für die elektrische Energie von Punktladungen. Die obigen Resultate lassen sich auf ein System von beliebig vielen linearen Strömen verallgemeinern, und zwar auf dieselbe Weise, wie in dem oben behandelten Falle eines Systems von Punktladungen. Wegen der soeben aufgestellten Analogie zwischen den elektrischen und magnetischen Größen dürfen wir dabei ohne weiteres im Anschluß an (2) setzen

$$T = \sum_{\alpha} \sum_{\beta}{}' L_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta, \tag{10}$$

oder entsprechend (2a) und (2b)

$$\Phi^*_\beta = \sum_{\alpha \neq \beta} L_{\alpha\beta} i_\alpha \tag{10a}$$

und

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Phi^*_\alpha i_\alpha. \tag{10b}$$

Dabei bedeutet Φ^*_α den magnetischen Fluß durch die Stromlinie σ_α, welcher von den anderen Stromlinien erzeugt wird. Dieser Fluß ist offenbar gleich der algebraischen Summe der Flüsse $\Phi_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} i_\beta$, die von jedem der betreffenden Ströme herrühren. Die Induktionskoeffizienten sind durch Formeln vom Typus (9b) bestimmt und genügen der Symmetriebedingung

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}.$$

Wir wollen nun statt der linearen Ströme, die eine mathematische Fiktion darstellen, solche stationäre Ströme in Betracht ziehen, die im Inneren oder auf der Oberfläche irgendwelcher Körper (etwa von

Metalleitern) zirkulieren. Die Verallgemeinerung des Energiebegriffs für diesen Fall geschieht folgendermaßen. Wir denken uns die betrachtete Elektrizitätsströmung in unendlich dünne geschlossene Stromfäden eingeteilt (was bei stationären Strömen immer möglich ist). Diese elementaren Stromfäden behandeln wir als lineare Ströme und definieren den Limes ihrer nach (10b) bestimmten gegenseitigen Energie als die vollständige magnetische Energie des betreffenden Stromsystems.

Die magnetischen Flüsse $\Phi_\alpha^* = \int \mathfrak{H}_\alpha^* n_\alpha dS_\alpha$ lassen sich durch Einführung der entsprechenden Vektorpotentiale $\mathfrak{A}_\alpha^*$ ($\mathfrak{H}_\alpha^* = \operatorname{rot} \mathfrak{A}_\alpha^*$) in der Form $\Phi_\alpha^* = \int \mathfrak{A}_\alpha^* \tau_\alpha d\sigma_\alpha$ darstellen. Ferner kann man im Falle einer Stromverteilung mit endlicher Volumdichte $\mathfrak{j}$, $i_\alpha \tau_\alpha d\sigma_\alpha$ durch $\mathfrak{j}_\alpha dV_\alpha$ ersetzen, wo dV_α das Volumelement bedeutet, das dem Element $d\sigma_\alpha$ der es vertretenden Stromlinie äquivalent ist. Es wird also nach (10b)

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int \mathfrak{A}_\alpha^* \mathfrak{j} dV_\alpha .$$

Im Limes für unendlich kleine Querschnitte der elementaren Stromfäden muß der Betrag des Vektorpotentials, welches von jedem dieser Stromfäden auf sich selbst erzeugt wird, wie leicht einzusehen, verschwinden. Deshalb können wir bei dem angedeuteten Grenzübergange das „gegenseitige" Potential $\mathfrak{A}_\alpha^*$, welches in der vorhergehenden Formel auftritt, durch das *vollständige* Vektorpotential in dem betreffenden Punkte $\mathfrak{A}$ ersetzen. Da dabei die Einteilung der elektrischen Strömung in einzelne Fäden belanglos wird, und die Kombination der Volumintegration für einen Stromfaden ($\int dV_\alpha$) mit der Summation über alle Stromfäden einer Integration über das ganze durchströmte Gebiet äquivalent ist, so bekommen wir

$$T = \frac{1}{2} \int \mathfrak{A} \mathfrak{j} dV . \tag{11}$$

Für den Fall einer flächenverteilten Strömung ergibt sich auf dieselbe Weise

$$T = \frac{1}{2} \int \mathfrak{A} \mathfrak{k} dS , \tag{11a}$$

wo $\mathfrak{k}$ die (endliche) Flächendichte des Stromes bedeutet. Dabei ist das Vektorpotential in jedem äußeren oder inneren Punkt nach (20) Kap. III durch

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{j}' dV'}{R} \tag{11b}$$

bzw.

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{k}' dS'}{R} \tag{11c}$$

bestimmt. Man kann folglich die magnetische Energie der betrachteten Elektrizitätsströmung in der Gestalt eines Doppelintegrals über das

durchströmte Raumgebiet darstellen, nämlich

$$T = \frac{1}{2}\int\int \frac{\mathfrak{j}\mathfrak{j}'}{R}\, dV\, dV' \tag{12}$$

für das Volum- und

$$T = \frac{1}{2}\int\int \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'}{R}\, dS\, dS' \tag{12a}$$

für die Flächenströmung.

Diese Ausdrücke könnte man direkt erhalten durch Anwendung der im § 6, Kap. III aufgestellten Formel (23) für die „effektive" gegenseitige Energie zweier bewegter Punktladungen. Denn vertauscht man in dieser Formel das Vorzeichen entsprechend der allgemeinen Beziehung (5), Kap. V, so bekommt man für die betreffenden Ladungen eine „effektive" elementare magnetische Energie

$$T = \frac{1}{R}\frac{e\mathfrak{v}}{c}\cdot\frac{e'\mathfrak{v}'}{c}. \tag{12b}$$

Diese Energie darf in dem Sinne als „effektive" gegenseitige Energie definiert werden, als in dem Falle von stationären oder quasistationären Strömen, mit *geschlossenen* Stromfäden, die Summe der Ausdrücke (12b) für alle Ladungspaare, die sich in verschiedenen Stromfäden befinden, den richtigen Ausdruck für die gegenseitige magnetische Energie dieser Stromfäden ergeben muß. Dagegen hat jeder Summand von Typus (12b) keine unmittelbare physikalische Bedeutung, denn die zwischen zwei bewegten Punktladungen wirkenden elektromagnetischen Kräfte lassen sich nicht aus irgendeiner Energiefunktion ableiten. Die Formel (12b) ist der entsprechenden Formel (1) für die elektrostatische Energie ganz analog. Seine Verallgemeinerung für beliebige Stromsysteme, und besonders solche mit kontinuierlicher Volum- oder Flächenverteilung geschieht also auf dieselbe Weise wie die entsprechende Verallgemeinerung von (1). Dadurch ergibt sich der Beweis der Zulässigkeit der oben gemachten Ersetzung des gegenseitigen Potentials $\mathfrak{A}_a^*$ durch das vollständige $\mathfrak{A}$. Wir können ferner behaupten, daß in dem Falle von *linearen* Strömen mit endlicher Stromstärke, d. h. mit endlicher „Liniendichte" des elektrischen Impulses, eine derartige Ersetzung unmöglich wird.

Im Falle einer *stationären* Volumströmung, die durch die Beziehung $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{j}$ charakterisiert werden kann, läßt sich die Formel (11) auf dieselbe Weise wie die entsprechende Formel (6) für die elektrische Energie transformieren. Und zwar haben wir [nach Formel (25) Einleitung],

$$\mathfrak{A}\mathfrak{j} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\mathfrak{H}\times\mathfrak{A}) + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{A},$$

d. h. wegen $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{j} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\mathfrak{H}\times\mathfrak{A}) + \frac{1}{4\pi}H^2,$$

und folglich

$$T = \frac{1}{2}\int \mathfrak{A}\mathfrak{j}\,dV = \frac{1}{8\pi}\oint (\mathfrak{H}\times\mathfrak{A})_n\,dS + \frac{1}{8\pi}\int_{(V)} H^2\,dV\,.$$

Verschiebt man die Oberfläche S ins Unendliche und erstreckt dementsprechend die Volumintegration auf den ganzen Raum, so ergibt sich, ebenso wie in § 1,

$$T = \frac{1}{8\pi}\int H^2\,dV\,. \tag{13}$$

Dieselbe Formel ergibt sich auch aus (11a) [mittels der Beziehung (23) Kap. IV]. Man muß aber beachten, daß im Falle eines Systems von *linearen* Strömen sie jeden Sinn verliert, ebenso wie die entsprechende Formel (5) des § 1 für kontinuierliche Verteilungen der elektrischen Ladung mit endlicher Liniendichte.

Für ein System, das aus zwei oder mehreren voneinander getrennten fadenförmigen Strömen (z. B. in Metalldrähten) besteht, zerfällt die Energie T in die *gegenseitige* magnetische Energie dieser Ströme $i_\alpha\,(\alpha = 1, 2, \ldots)$

$$T^g = \frac{1}{8\pi}\int \sum_{\alpha\neq\beta}\sum \mathfrak{H}_\alpha\mathfrak{H}_\beta\,dV = \frac{1}{4\pi}\int \sum_{\alpha<\beta}\sum \mathfrak{H}_\alpha\mathfrak{H}_\beta\,dV \tag{13a}$$

und die „innere" oder „Eigenenergie" jedes von ihnen

$$T_\alpha = \frac{1}{8\pi}\int H_\alpha^2\,dV\,. \tag{13b}$$

Dabei bleibt der Ausdruck (13a) auch für lineare Ströme bestehen, während der Ausdruck (13b) in diesem Falle unendlich wird.

Da die „Elementarfeldstärken" $\mathfrak{H}_\alpha$ der entsprechenden Stromstärken proportional sind, so kann man T^g in der Form

$$T^g = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\sum L_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta$$

schreiben im Einklang mit der Formel (10). Die gegenseitigen Induktionskoeffizienten $L_{\alpha\beta}$ sind dabei nur von der Lage und Gestalt der Stromfäden abhängig; man kann sich leicht überzeugen, daß im Grenzfalle unendlich dünner Stromfäden der neue (allgemeine) Ausdruck des gegenseitigen Induktionskoeffizienten

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_\alpha\mathfrak{H}_\beta\,dV \quad (i_\alpha = i_\beta = 1) \tag{14}$$

sich auf die ursprüngliche Gestalt (9b) reduzieren läßt. Wir können nunmehr auf eine zu (14) entsprechende Weise die *Selbstinduktionskoeffizienten* der einzelnen Ströme oder genauer Stromleiter — definieren. Setzt man nämlich

$$L_{\alpha\alpha} = \frac{1}{4\pi}\int H_\alpha^2\,dV \quad (i_\alpha = 1),$$

so ergibt sich für die „Eigenenergie" des Stromes i_α der Ausdruck

$$T_\alpha = \frac{1}{2} L_{\alpha\alpha} i_\alpha^2. \tag{14a}$$

Dementsprechend könnte man die Größe

$$\Phi_{\alpha\alpha} = L_{\alpha\alpha} i_\alpha$$

als den magnetischen „Selbstfluß" des betrachteten Stromes definieren. Da aber letzterer keineswegs — auch nicht approximativ — als linienförmig angesehen werden darf, so verliert dieser Begriff die Schärfe, die ihm nach der ursprünglichen, sich auf die gegenseitige Energie linearer Ströme beziehenden Definition zukam. Der durch die Formel

$$\Phi_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} i_\beta \tag{14b}$$

in Verbindung mit (14) definierte magnetische Fluß des Stromes (β) durch den Stromfaden (α) kann nur approximativ für einen verschwindend kleinen Querschnitt dieses Fadens in der Form des Flächenintegrals $\int \mathfrak{H}_\beta \mathfrak{n}_\alpha dS_\alpha$ dargestellt werden.

Die Eigenenergie eines elektrischen Stromes $T = \frac{1}{2} Li^2$ (die Indizes α lassen wir im folgenden weg), ist ihrem Wesen nach nichts anderes als die *gegenseitige* magnetische Energie der unendlich dünnen Stromfäden, in welche die betrachtete Strömung zerlegt werden kann. Nach den Erörterungen des § 2, Kap. V ist diese Energie gleich der Arbeit, die bei einem Anstieg der Stromstärke von Null bis i geleistet werden muß, gegen die wechselseitigen elektrischen Induktionskräfte, welche durch die gleichzeitige Vermehrung der elementaren Stromstärken in den einzelnen Teilfäden erzeugt werden. Diese elementaren Induktionskräfte setzen sich zusammen zu einer totalen elektromotorischen Kraft, die im Limes durch den Ausdruck

$$\psi = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} L \frac{di}{dt} \tag{15}$$

gegeben wird. Sie entspricht einer skalaren Potentialdifferenz derselben Größe (in elektrostatischen Einheiten), so daß zu ihrer Überwindung die Arbeit $\psi c i dt = L \frac{di}{dt} i dt = Li di$ notwendig ist. Durch Integration dieses Ausdruckes ergibt sich tatsächlich die magnetische Energie des betrachteten Stromes $\frac{1}{2} Li^2$.

§ 3. Die elektromagnetische Theorie der Masse.

Die Analogie der auf diese Weise definierten und ausgedrückten magnetischen Energie eines Stromkreises mit der gewöhnlichen *kinetischen Energie* eines materiellen Teilchens springt in die Augen. Dabei entspricht die Stromstärke der Geschwindigkeit des Teilchens $\mathfrak{v}$ und

der Selbstinduktionskoeffizient seiner Masse m; die Selbstinduktionskraft (15) ist der „Trägheitskraft“

$$-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-m\mathfrak{w},$$

die bei einer *Beschleunigung* des Teilchens überwunden werden muß, vollkommen analog.

Diese Analogie verwandelt sich in eine Identität, wenn wir statt eines geschlossenen Stromkreises die Translationsbewegung eines Körpers betrachten, der eine flächenhaft oder räumlich verteilte Ladung trägt.

Wir denken uns z. B. ein starres kugelförmiges Elektron, das sich geradlinig gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt. Da diese Bewegung nicht stationär ist, so kann man strenggenommen den Begriff der magnetischen Energie auf den betrachteten Fall nicht anwenden. Versucht man trotzdem die entsprechende magnetische Energie T zu berechnen, so ergibt sich zunächst auf Grund der Formel (12b)

$$T=U\frac{v^2}{c^2},$$

wo U die elektrische Energie des Elektrons im Ruhezustand bedeutet. Dieser Ausdruck ist mit der kinetischen Energie eines Teilchens mit der Masse

$$m=\frac{2U}{c^2}$$

identisch. Es muß aber beachtet werden, daß die Formel (12b) auf den vorliegenden Fall sicher unanwendbar ist. Wir wollen deshalb die Energie T noch mittels der (wie wir später sehen werden, allgemeingültigen) Formel (13) berechnen. Wir bemerken dazu, daß die Beziehung

$$\mathfrak{H}=\frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\mathfrak{E},$$

welche nach (13b) Kap. VI zwischen der magnetischen und elektrischen Feldstärke einer geradlinig-gleichförmig bewegten Punktladung besteht, offenbar auch für die entsprechenden *resultierenden* Feldstärken irgendeines Systems von elektrischen Ladungen, die sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit bewegen, gelten muß. Es ist also

$$H^2=\frac{1}{c^2}\{E^2v^2-(\mathfrak{E}\mathfrak{v})^2\}$$

und folglich nach (13) und (5)

$$T=U\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8\pi c^2}\int(\mathfrak{E}\mathfrak{v})^2\,dV. \qquad (16)$$

In dem betrachteten Fall (Elektron mit einer kugelsymmetrischen Verteilung der Ladung) muß das elektrische Feld für den Ruhezustand und angenähert für kleine Bewegungsgeschwindigkeiten ($v\ll c$) auch kugel- oder radialsymmetrisch sein. Bezeichnet man also den Winkel

zwischen $\mathfrak{v}$ und dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$ des Volumelementes dV (relativ zum Mittelpunkt des Elektrons) mit θ, so wird $|\mathfrak{E}\mathfrak{v}| = Ev\cos\theta$ und folglich

$$\frac{1}{8\pi c^2}\int(\mathfrak{E}\mathfrak{v})^2\,dV = \left(\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV\right)\frac{v^2}{c^2}\,\overline{\cos^2\theta}\,.$$

Hier bedeutet $\overline{\cos^2\theta}$ den Mittelwert von $\cos^2\theta$ für alle Richtungen von $\mathfrak{r}$. Bekanntlich gilt $\overline{\cos^2\theta} = \frac{1}{3}$ so daß nach (16)

$$T = \frac{2}{3}\,U\frac{v^2}{c^2} \tag{16a}$$

wird. Dieser Ausdruck ist also um ein Drittel kleiner als der früher berechnete und entspricht einer elektromagnetischen Masse

$$m = \frac{4}{3}\,\frac{U}{c^2}\,, \tag{16b}$$

d. h. $m = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{a\,c^2}$ im Falle der Flächenladung und $m = \frac{4}{5}\,\frac{e^2}{a\,c^2}$ im Falle der Volumladung [vgl. (8) und (8a)].

Von der Richtigkeit dieser Formeln[1]) kann man sich direkt überzeugen durch Berechnung der elektrischen Induktionskraft, mit welcher das Elektron, bei einer *beschleunigten* Bewegung, auf sich selbst wirken muß. — Wir haben in Kap. VI, § 2 gesehen, daß der von der Beschleunigung einer Punktladung de' abhängige Anteil seiner elektrischen Feldstärke sich *bei kleinen Geschwindigkeiten* durch

$$d\,\mathfrak{E}^{(2)} = -\frac{de'}{c^2 R}\{\mathfrak{w}' - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w}')\} \tag{17}$$

ausdrückt.

Daraus folgt, daß die Kraft, mit welcher ein unendlich kleines Element de' des Elektrons auf ein anderes de wirkt, dargestellt werden kann als Produkt der durch c^2 dividierten gegenseitigen elektrischen Energie der beiden Elemente $\frac{de\,de'}{c^2 R}$ mit dem Vektor $-\{\mathfrak{w} - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w}\}$ (den Akzent lassen wir weg und betrachten die Wechselwirkung der verschiedenen Elemente des Elektrons als momentan, vgl. unten § 3). Durch Summation dieser Produkte für alle Elemente de und de' bekommt man offenbar

$$-\frac{2\,U}{c^2}\{\mathfrak{w} - \mathfrak{R}_0\overline{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w})}\}\,,$$

wo $\overline{\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w})}$ den Mittelwert des Vektors $\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w})$ für verschiedene Richtungen des von de' nach de gezogenen Radiusvektors $\mathfrak{R}\left(\mathfrak{R}_0 = \frac{\mathfrak{R}}{R}\right)$ bedeutet. Wegen des kugelsymmetrischen Aufbaus des Elektrons muß die zu $\mathfrak{w}$ senkrechte Komponente des Vektors $\overline{\mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w})}$ verschwinden. Für die dazu parallele Komponente bekommt man dagegen, wenn der

[1]) Für kleine Geschwindigkeiten; die genaueren für beliebige Geschwindigkeiten geltende Formeln werden wir später ableiten.

Winkel zwischen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{w}$ durch θ' bezeichnet wird,

$$\overline{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{w} \cos\theta'} = w\overline{\cos^2\theta'} = \frac{1}{3} w .$$

Die gesuchte, durch die Beschleunigung des Elektrons bedingte „Selbstinduktionskraft" drückt sich also durch die Formel

$$\mathfrak{F} = -\frac{4U}{3c^2}\mathfrak{w} \qquad (17a)$$

aus. Diese Kraft ist folglich mit der gewöhnlichen Trägheitskraft eines Teilchens von der Masse (16b) — jedenfalls *formal* — identisch.

Es sei bemerkt, daß der in der vorhergehenden Rechnung außer acht gelassene Anteil der elektrischen Feldstärke ebenso wie die durch die magnetische Feldstärke bedingte Kraft bei (doppelter) Summation über alle Elemente des Elektrons keinen Beitrag zur resultierenden „Selbstkraft" liefern. Für ein geradlinig-gleichförmig bewegtes Elektron muß somit diese „Selbstkraft" verschwinden.

Die obigen Resultate[1]) bilden die Grundlage der sogenannten *elektromagnetischen Theorie der Masse.* Nach dieser Theorie ist die Masse eines Elektrons nicht als eine primitive Eigenschaft — wie etwa seine Ladung — zu betrachten, sondern als eine Eigenschaft, welche durch die Größe und die räumliche Verteilung der Elektronenladung nach der Formel (16b) bestimmt ist. Die Masse eines Elektrons kann also als sein Selbstinduktionskoeffizient definiert werden.

Der eigentliche physikalische Sinn dieser Aussage besteht in der Behauptung, daß bei einer (beschleunigten) Bewegung des Elektrons die auf dieses wirkende *äußere* Kraft $\mathfrak{F}^{(a)}$ in jedem Augenblick durch die entsprechende Selbstkraft $\mathfrak{F}$ entgegengewichtet sein muß. Aus diesem von *H. A. Lorentz* herrührenden Gleichgewichts- oder besser *Bewegungsprinzips* läßt sich die Bewegungsgleichung eines Elektrons in einem gegebenen äußeren elektromagnetischen Felde aufstellen. — Setzt man also allgemein

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^{(a)} = 0 \qquad (17b)$$

und benützt den aus (17a) und (17) folgenden Ausdruck für $\mathfrak{F}^{(a)}$ $(= -m\mathfrak{w})$, so bekommt man die bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F} . \qquad (17c)$$

Daraus folgt, da der angeführte Ausdruck für die Selbstkraft nur einen Näherungswert für kleine Geschwindigkeiten darstellt, daß auch die obige Bewegungsgleichung ungenau ist und jedenfalls bei großen Geschwindigkeiten durch eine kompliziertere Gleichung ersetzt werden muß.

Da die Ladung und die Masse der Elektronen experimentell festgestellt werden können, so ist es möglich, unter gewissen Voraussetzungen über ihre „Struktur" (d. h. Ladungsverteilung) ihre geometrischen

[1]) Die zum ersten Mal von *J. J. Thomson* aufgestellt worden sind.

Abmessungen abzuschätzen. Bei der einfachsten Annahme, daß die Elektronen starre Kugeln mit gleichförmig verteilter Flächen- oder Volumladung sind, ergibt sich für den Radius dieser Kugeln im Falle von negativen Elektronen ($e = -4{,}77 \cdot 10^{-10}$, $m = 9{,}8 \cdot 10^{-27}$ g)

$$a \simeq 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

und im Falle von positiven Elektronen oder „Protonen" ($e = +4{,}77 \cdot 10^{-10}$, $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ g)

$$a \simeq 10^{-16} \text{ cm}.$$

Es sei schließlich bemerkt, daß die Masse irgendeines Systems von Elektronen, z. B. eines Atoms oder materiellen Körpers — von der Summe der Massen dieser Elektronen im allgemeinen verschieden ist. Denn man hat alsdann neben der „Eigenmasse" der einzelnen Elektronen noch ihre „gegenseitige Masse" in Betracht zu ziehen. Diese gegenseitige Masse der verschiedenen Elektronen ist dem gegenseitigen Induktionskoeffizienten von verschiedenen Strömen analog. Sie entspricht der gegenseitigen magnetischen Energie, oder der gegenseitigen Induktionskraft, die auftreten müssen, wenn das betrachtete Elektronensystem sich als Ganzes gleichförmig bzw. beschleunigt bewegt. Der Größenordnung nach ist sie nach (16) gleich[1]) der gegenseitigen *elektrischen* Energie der verschiedenen Elektronen, dividiert durch c^2, d. h. durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Solange der Abstand der Elektronen voneinander groß gegenüber ihren Abmessungen (Radius) bleibt, muß ihre gegenseitige Masse auch gering sein im Verhältnis zu der Summe ihrer Eigenmassen. Wir möchten nochmals betonen, daß die Eigenmasse eines Elektrons sich nach der skizzierten elektromagnetischen Theorie darstellt als die gegenseitige Masse der voneinander untrennbaren Elemente, in welche das Elektron gedanklich eingeteilt werden kann.

Es gibt also strenggenommen keine „eigene", sondern nur eine gegenseitige Masse. Der Begriff der Masse steht in einfacher und unmittelbarer Beziehung nicht zum *Materie-, sondern zum Energiebegriff.* Die Materie ist nämlich nichts anderes als die Gesamtheit der Elektronen, die als unzerstörbare und unvariable Dinge anzusehen sind. Die Masse eines materiellen Körpers ist aber eine zum Teil veränderliche und zugleich keine additive Größe, die von der relativen Lage der diesen Körper bildenden Elektronen abhängt, und zwar auf dieselbe Weise wie ihre gegenseitige elektrische Energie. Dementsprechend erhebt sich noch die Frage nach der *Lokalisierung* der Masse. Diese Frage muß sich offenbar gleichzeitig mit der Frage nach der Lokalisierung der Energie lösen.

[1]) Man beachte, daß die Formel (16), ebenso wie die ihr zugrunde liegende Beziehung $\mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{E}$, nicht nur für ein einziges Elektron, sondern für beliebige sich als Ganzes geradlinig-gleichförmig bewegende elektrische Systeme gelten muß.

Insofern die elektromagnetische Energie eines Systems von Elektronen als eine Funktion ihrer gegenseitigen Abstände (und eventuell auch Geschwindigkeiten) ausgedrückt wird, kann von einer solchen Lokalisierung keine Rede sein. Wir haben aber gesehen, daß im Falle von zeitlich-konstanten elektrischen und magnetischen Feldern die „totale" Energie sich als eine „stoffartige" Größe auffassen läßt, die im ganzen Raum mit der Volumdichte $\frac{1}{8\pi} E^2$ bzw. $\frac{1}{8\pi} H^2$ verteilt ist. Wir wollen nun versuchen, diese Darstellung der elektromagnetischen Energie als einer stoffartigen, räumlich lokalisierbaren Größe auf beliebige zeitlich variable Erscheinungen zu verallgemeinern.

§ 4. Elektromagnetische Energie und Strahlung.

Wir betrachten ein System von Elektronen, die sich ganz beliebig bewegen mögen, und charakterisieren sie durch eine zunächst willkürliche räumliche Verteilung von elektrischer Ladung und Impuls mit endlicher Volumdichte ϱ bzw. $\mathfrak{j}$. Man kann dabei

$$\mathfrak{j} = \varrho \frac{\mathfrak{v}}{c} \tag{18}$$

setzen (vgl. § 1, Kap. VI) und dementsprechend das Erhaltungsprinzip der Elektrizität in der Form

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} = 0 \tag{18a}$$

schreiben.

Um eine allgemeingültige Definition der Energie zu erhalten, müssen wir zu der *Quelle* dieses Begriffes zurückkehren, also die *Arbeit* betrachten, die von den elektrischen und elektromagnetischen Kräften geleistet wird. Dabei werden wir nicht nur die „äußere" auf ein Elektron seitens der anderen wirkenden Kräfte berücksichtigen, sondern auch die entsprechenden *Selbstkräfte*; mit anderen Worten, unter der Kraft $d\mathfrak{F}$, die auf eine in dem Volumelement dV befindliche Ladung $de = \varrho dV$ wirkt, werden wir die *Totalkraft* verstehen, einschließlich des Anteils, welcher von den nächstliegenden Elementen des betreffenden Elektrons — und prinzipiell auch vom betrachteten Element ϱdV selbst — herrührt (letzterer muß aber im Grenzfalle $dV \to 0$ verschwinden).

Dementsprechend werden wir die *totale* elektrische und magnetische Feldstärke betrachten, die mit ϱ und $\mathfrak{j}$ durch die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{j}$$

verknüpft sind.

Die auf die Ladung $de = \varrho dV$ wirkende Kraft drückt sich durch die Formel

$$d\mathfrak{F} = de \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \mathfrak{v} \times \mathfrak{H} \right) \tag{18b}$$

aus. Ihre Arbeit während der Zeit dt bekommen wir durch innere Multiplikation von $d\mathfrak{F}$ mit der entsprechenden Verschiebung des betrachteten Ladungselements $\mathfrak{v}\,dt$. Diese Arbeit ist also gleich

$$d\mathfrak{F}\mathfrak{v}\,dt = \varrho\mathfrak{E}\mathfrak{v}\,dV\,dt,$$

denn das Produkt $(\mathfrak{v}\times\mathfrak{H})\mathfrak{v}$ verschwindet (die elektromagnetische Kraft bleibt immer „arbeitslos"). Bezeichnet man die auf die Volum- und Zeiteinheit bezogene Arbeit durch l, so wird

$$l = \varrho\mathfrak{E}\mathfrak{v},$$

oder nach (18)

$$l = c\,\mathfrak{E}\mathfrak{j}. \tag{19}$$

Wir ersetzen nun in diesem Ausdruck $\mathfrak{j}$ durch $\frac{1}{4\pi}\left(\text{rot}\,\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right)$ und addieren dazu den konjugierten Ausdruck

$$l^* = -\frac{c}{4\pi}\mathfrak{H}\left(\text{rot}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\right), \tag{19a}$$

der nach (49a) Kap. V die Arbeit der magnetischen Kräfte bei nicht verschwindender „magnetischer" Stromdichte $\mathfrak{j}^*$ darstellen würde. Tatsächlich aber ist $\mathfrak{j}^*$ und folglich l^* gleich Null, so daß die Hinzufügung von l^* belanglos ist (sie erlaubt aber die betrachtete Arbeit in eine symmetrische Gestalt zu bringen, die sich leicht in dem gewünschten Sinne transformieren läßt). Es ist also:

$$l = l + l^* = \frac{c}{4\pi}\{\mathfrak{E}\,\text{rot}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\text{rot}\,\mathfrak{E}\} - \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\right)$$

d. h.

$$l = -\frac{c}{4\pi}\,\text{div}\,(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}. \tag{19b}$$

Multipliziert man nun diese Gleichung mit dV und integriert über ein durch die Fläche S begrenztes Volum (V), so ergibt sich für die ganze in diesem Volum pro Zeiteinheit geleistete Arbeit $A = \int l\,dV$

$$A = -\frac{dW}{dt} - \oint K_n\,dS, \tag{20}$$

wo zur Abkürzung

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(E^2+H^2)\,dV \tag{20a}$$

und

$$\mathfrak{K} = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H} \tag{20b}$$

gesetzt ist.

Die Größe W läßt sich nach den Ergebnissen der vorigen Paragraphen interpretieren als die in dem Volum V aufgespeicherte elektromagnetische Energie. Diese Interpretation entspricht vollkommen der Rolle, die W in der allgemeinen Formel (20) spielt. Denn denken wir uns für einen Augenblick, daß das Flächenintegral $\int K_n\,dS$ verschwindet, so

bedeutet die Formel (20), daß die Arbeit A *auf Kosten* der Größe W geleistet wird. Dies ist aber gerade das charakteristische Merkmal der Energie.

Im allgemeinen bleibt, wie wir sofort sehen werden, das Integral $\oint K_n dS$ auch bei Verschiebung der Fläche S ins Unendliche von Null verschieden. Dagegen muß die Arbeit A, wenn die Bewegung der einzelnen Elektronen so geschieht, daß die auf jedes von ihnen wirkende äußere Kraft durch die entsprechende Selbstkraft aufgehoben wird [vgl. (17b)], für eine beliebige geschlossene Fläche, die kein Elektron schneidet, verschwinden. Setzt man also die Gültigkeit dieses *Lorentz*schen Bewegungsprinzips voraus, so reduziert sich die Gleichung (20) auf

$$-\frac{dW}{dt} = \oint K_n dS\,. \tag{21}$$

Es sei bemerkt, daß das *Lorentz*sche Prinzip keine direkte Beziehung zur Gleichung (20) hat. Diese Gleichung läßt sich jedenfalls auf die Form (21) immer dann reduzieren, wenn innerhalb der Fläche S gar keine Elektronen enthalten sind.

Die Gleichung (21) ist ganz analog zu der Gleichung

$$-\frac{d}{dt}\int \varrho dV = \oint c j_n dS$$

(Kap. II, § 2), welche das Erhaltungsprinzip der Elektrizität ausdrückt. Dabei entspricht der Ladungsdichte ϱ die *Energiedichte*

$$\xi = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \tag{21a}$$

und der Stromdichte $c\mathfrak{j} = \mathfrak{J}$ (in elektrostatischen Einheiten) der Vektor $\mathfrak{K}$. Es liegt deshalb nahe, die elektromagnetische Energie als eine Art von Substanz — in derselben Weise wie die Elektrizität — zu behandeln und die Gleichung (21) als die Aussage des Erhaltungsprinzips dieser Substanz aufzufassen. Dementsprechend bezeichnet man den Vektor $\mathfrak{K}$ als die *Dichte des Energiestromes*. Wäre die erwähnte Analogie zwischen Energie und Elektrizität vollkommen, so müßte zwischen $\mathfrak{K}$ und ξ eine Beziehung von der Gestalt

$$\mathfrak{K} = \xi \mathfrak{C} \tag{21b}$$

bestehen, entsprechend der Beziehung (18) zwischen J und ϱ. Dabei würde der Vektor $\mathfrak{C}$ die Bedeutung der *Geschwindigkeit der Energieströmung* in dem betreffenden Punkte haben. Ein solcher Vektor läßt sich offenbar immer *definieren*, einfach als der Quotient von $\mathfrak{K}$ durch ξ. Es fragt sich aber, ob und wie weit ihm irgendwelche physikalische Bedeutung zukommt. Damit steht auch die Frage in engem Zusammenhang, ob und wie weit die oben geschilderte „Substanzvorstellung" der elektromagnetischen Energie zulässig ist.

Zur Entscheidung dieser Frage wollen wir den Vektor $\mathfrak{K}$ für den einfachsten Fall des elektromagnetischen Feldes eines elementaren Oszillators berechnen. Dabei betrachten wir zunächst nur das Feld in der Wellenzone, identifizieren also $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ mit den durch die Formeln (31) und (32) Kap. V bestimmten Feldstärken $\mathfrak{E}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$. Mittels der Relationen

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{R}_0 \tag{22}$$

bekommt man sofort, nach (20b)

$$\mathfrak{K} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{R}_0 E^2 = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{R}_0 H^2 = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \mathfrak{R}_0 c\,. \tag{22a}$$

Daraus folgt durch Vergleich mit (21a) und (21b)

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{R}_0 c. \tag{22b}$$

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ ist also im vorliegenden Falle nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im betrachteten Punkte. — Dieses Ergebnis läßt sich offenbar verallgemeinern auf beliebige Systeme von elektrischen (oder magnetischen) Oszillatoren — und überhaupt auf beliebige elektrische Systeme, die sich beständig in einem beschränkten Raumgebiet befinden — denn in sehr großen Entfernungen von diesem Gebiet muß immer die für die Wellenzone charakteristische Beziehung (22) bestehen (vgl. Kap. V, § 8).

Damit ist die oben aufgestellte Frage für die Wellenzone ganz allgemein, und zwar im positiven Sinne erledigt.

Es ist aber leicht sich zu überzeugen, daß für die anderen in der obigen Überlegung außer acht gelassenen Bestandteile des elektromagnetischen Feldes, die für kleine Entfernungen („kleine" selbstverständlich relativ zur Wellenlänge) die Hauptrolle spielen, die durch (21b) definierte Geschwindigkeit physikalisch sinnlos wird. Wir stellen uns z. B. ein System vor, das aus einer ruhenden Ladung und einem elementaren Strom besteht. Für nicht zu kleine Abstände kann man sich die beiden in demselben Punkt vereinigt denken. Da die elektrischen Kraftlinien radial gerichtet sind, während die magnetischen in den durch die magnetische Achse des Stromes bestimmten Meridionalebenen laufen, so müssen die Linien, welche den Vektor $\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$ darstellen, koaxiale Kreise (Parallelen) sein. Wir haben also in diesem Fall eine „Strömung der Energie" um die Achse des elektrischen Stromes in einer Richtung, die von dem Vorzeichen der erwähnten Ladung abhängt und mit einer Geschwindigkeit [im Sinne der Formel (21b)], die bei verschwindender Ladung gleich Null wird. Dieser Vorgang stellt offenbar eine bloße Fiktion dar, da die Ladung und der Strom, die wir zu einem System zusammengefaßt haben, sich gegenseitig gar nicht beeinflussen.

In dem oben betrachteten Fall der Wellenzone eines (elementaren) Oszillators ist die elektromagnetische Energiedichte nach (31) und (32)

Kap. V durch den Ausdruck

$$\xi = \frac{|\ddot{\mathfrak{p}}' \times \mathfrak{R}_0|^2}{4\pi c^4 R^2}$$

gegeben. Bezeichnet man den Winkel zwischen $\mathfrak{R}$ und $\ddot{\mathfrak{p}}'$ (wobei durch den Akzent angedeutet wird, daß diese Größe sich auf die effektive Zeit $t' = t - R/c$ bezieht) mit θ, so bekommt man für den Vektor $\mathfrak{R}$ nach (22a) den Ausdruck

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_0}{4\pi R^2} \frac{|\ddot{\mathfrak{p}}'|^2}{c^3} \sin^2\theta \,. \tag{23}$$

Für den vollständigen Energiestrom durch eine Kugelfläche mit dem Radius R ergibt sich daher die Formel

$$Q = \oint K_n \, dS = \frac{1}{c^3} |\ddot{\mathfrak{p}}'|^2 \overline{\sin^2\theta} \,,$$

oder, da $\overline{\sin^2\theta} = 1 - \overline{\cos^2\theta} = \frac{2}{3}$ ist,

$$Q = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathfrak{p}}'|^2}{c^3} \,. \tag{23a}$$

Dieser Energiestrom ist von der Größe der Kugel unabhängig, wenn man sich auf die Betrachtung eines bestimmten *effektiven* Zeitpunktes beschränkt. Man kann also Folgendes behaupten: Durch die „beschleunigte" Bewegung des Oszillators während eines unendlich kleinen Zeitintervalles zwischen t' und $t' + dt'$ wird die *Ausstrahlung* einer bestimmten Energiemenge $Q\,dt'$ bedingt. Diese Energie pflanzt sich in der Wellenzone nach allen Seiten mit Lichtgeschwindigkeit fort und bleibt in jedem nachfolgenden Augenblick t innerhalb einer Kugelschale von der Dicke $c\,dt'$ lokalisiert, die von zwei Kugelflächen mit den Radien $c(t - t')$ und $c(t - t' - dt')$ begrenzt ist.

Im Falle der Lichtwellen bestimmt der Vektor $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt die Richtung und zugleich die Intensität der Lichtstrahlen. Man pflegt ihn deshalb als „Strahlungsvektor" zu bezeichnen[1]).

Nach der Formel (21) muß die Ausstrahlung der Energie durch irgendeine geschlossene Oberfläche S auf Kosten der innerhalb dieser Oberfläche aufgespeicherten Energie geschehen. Denkt man sich also S als die Trennungsfläche zwischen der Wellenzone und dem „inneren" Raumgebiet, wo die Feldstärken $\mathfrak{E}^{(0)}$, $\mathfrak{E}^{(1)}$ und $\mathfrak{H}^{(1)}$ die Hauptrolle spielen, so kann man den oben beschriebenen Vorgang der Energieausstrahlung betrachten als eine Verwandlung der Energie $W^{(0)} + W^{(1)}$ welche den erwähnten Feldstärken entspricht, in die Energie $W^{(2)}$ des elektromagnetischen Feldes $\mathfrak{E}^{(2)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$, welches in der Wellenzone herrscht und sich mit der Zeit immer weiter nach allen Seiten ausbreitet.

---

[1]) Er wird auch oft als *Poynting*scher Vektor genannt, da er zuerst von *J. Poynting* eingeführt wurde.

Die Energie $W^{(0)} + W^{(1)}$ setzt sich zusammen aus der elektrischen und der magnetischen Energie der Elektronen, welche den betrachteten Oszillator bilden. Dabei bleibt die Summe der elektrischen Eigenenergien dieser Elektronen konstant und darf deshalb außer acht gelassen werden. Dagegen muß ihre gegenseitige elektrische Energie abnehmen. Diese Abnahme kann zum Teil durch eine Zunahme der magnetischen Energie der Elektronen, d. h. ihrer kinetischen Energie zum Teil kompensiert werden (es sei erinnert, daß die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}^{(1)}$ dem *Biot-Savart*schen Gesetze folgt, also der Geschwindigkeit der Elektronen proportional ist). Auf diese Frage wollen wir hier nicht eingehen. Die angeführte Überlegung hat nur den Zweck, die Beziehung zwischen den Energien $W^{(0)} + W^{(1)}$ einerseits und $W^{(2)}$ andererseits aufzuklären.

Die Energie $W^{(0)} + W^{(1)}$ entspricht der gewöhnlichen „mechanischen" Energie eines Systems von materiellen Teilchen; man könnte sie näherungsweise als Summe der potentiellen (elektrischen) und kinetischen (magnetischen) Energie der Elektronen darstellen, wobei die erstere von ihrer relativen Lage und die zweite von ihren Geschwindigkeiten abhängt (die gegenseitige kinetische Energie bleibt verhältnismäßig sehr klein.) Dagegen gibt es in der klassischen Mechanik eine der Energie $W^{(2)}$ entsprechende Größe nicht. Diese Energie, welche durch die Beschleunigung der Elektronen bedingt wird und sich mit den elektromagnetischen Wellen ins Unendliche fortpflanzt, bezeichnet man als die *Strahlungsenergie* (oder „Strahlende Energie"). Wir können also den Vorgang der Energieausstrahlung grob definieren als die Verwandlung von mechanischer Energie in Strahlungsenergie. Man darf aber nicht vergessen, daß die angeführte Einteilung der elektromagnetischen Energie in „mechanische" und „strahlende" *keine* genaue ist; eine genaue Einteilung dieser Art ist sogar prinzipiell unmöglich.

Die Verminderung der „mechanischen" Energie eines Systems von Elektronen durch Strahlung bezeichnet man im allgemeinen als *Strahlungsdämpfung*. Diese Strahlungsdämpfung kann — jedenfalls formal — auf gewisse Kräfte von derselben Art wie die *Reibungskräfte* der gewöhnlichen Mechanik zurückgeführt werden. Der Einfachheit halber stellen wir uns einen Oszillator vor, der nur *ein* bewegtes (schwingendes oder kreisendes) Elektron enthält. Das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ dieses Oszillators kann man dabei gleich $e\mathfrak{r}$ setzen, wo e die Ladung des bewegten Elektrons und $\mathfrak{r}$ seinen Radiusvektor in bezug auf einen festen Punkt (z. B. das entgegengesetzte festgehaltene Elektron) bedeutet. Dementsprechend hat man $\ddot{\mathfrak{p}} = e\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = e\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e\mathfrak{w}$ und folglich nach (23a)

$$Q = \frac{2}{3}\frac{e^2 w^2}{c^3}. \qquad (23b)$$

Das ist also die Energie, welche das bewegte Elektron, oder richtiger *der Oszillator*, pro Zeiteinheit durch Strahlung verliert. Dieser Energie-

verlust muß durch eine zusätzliche (bisher unberücksichtigt gebliebene) „Reibungskraft" $\mathfrak{f}$ verursacht werden. Zur Bestimmung dieser Kraft setzen wir die von ihr in dem Zeitintervall (t_1, t_2) geleistete Arbeit $\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{f}\mathfrak{v}\,dt$ entgegengesetzt gleich der während desselben Intervalles ausgestrahlten Energie $\int_{t_1}^{t_2} Q\,dt$. Es ergibt sich also nach (23b)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{f}\mathfrak{v}\,dt = -\frac{2}{2}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2} w^2\,dt. \tag{24}$$

Das rechtsstehende Integral formen wir durch partielle Integration um. Dabei wird

$$\int_{t_1}^{t_2} w^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{w}\,d\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{v}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,dt.$$

Die Größe

$$[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{v}]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dv^2}{dt}\right)_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{dv^2}{dt}\right)_1$$

muß offenbar bei stationären oder schwach gedämpften Schwingungen praktisch (im Mittel) Null bleiben, wenigstens im Verhältnis zu der Größe $\int_{t_1}^{t_2} w^2\,dt$. Wir dürfen deshalb für Zeitintervalle (t_1, t_2) die genügend groß relativ zur Schwingungsperiode sind (sonst aber sehr kurz sein können),

$$\int_{t_1}^{t_2} w^2\,dt \cong -\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,dt$$

setzen und dementsprechend nach (24)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{f}\mathfrak{v}\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{v}\,dt,$$

oder schließlich

$$\mathfrak{f} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \tag{24a}$$

Diese Reibungskraft, die gewöhnlich als *Strahlungsdämpfung* bezeichnet wird[1]), muß offenbar einen im letzten Paragraph außer acht gelassenen Anteil der „Selbstkraft" $\mathfrak{F}$, d. h. der Resultierenden der elementaren Kräfte, mit welchen die verschiedenen unendlich kleinen Elemente des Elektrons (de, de') aufeinander wirken, darstellen. In der Tat, berücksichtigt man bei der Berechnung dieser Kraft auf Grund der Formel (17) die *Verspätung* der entsprechenden elementaren Kraftwirkungen, so

[1]) Und die zuerst von *M. Planck* eingeführt wurde.

muß man unter $\mathfrak{w}'$ die Beschleunigung des Elektrons nicht im betrachteten Augenblick t, sondern in dem früheren Augenblick $t' = t - R/c$ verstehen, wo R den Abstand des „aktiven" Ladungselements de' vom „passiven" de bedeutet. Dabei ist vorausgesetzt, daß *das Elektron sich als ein starrer Körper bewegt*, d. h. daß die verschiedenen Elektronenelemente in demselben Augenblick dieselbe Geschwindigkeit und folglich dieselbe Beschleunigung haben[1]).

Entwickelt man nun die Beschleunigung $\mathfrak{w}'$ als Funktion von t' nach Potenzen der Differenz $t' - t$, so wird in erster Annäherung

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{w} + (t' - t)\frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

wo $\mathfrak{w}$ und $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ sich auf den Zeitpunkt t beziehen, oder wegen $t' - t = -\frac{R}{c}$

$$\mathfrak{w}' = \mathfrak{w} - \frac{R}{c}\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{w} - \frac{R}{c}\dot{\mathfrak{w}}.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (17) bekommen wir

$$\mathfrak{E}^{(2)} = -\frac{de'}{c^2 R}\{\mathfrak{w} - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\mathfrak{w})\} + \frac{de'}{c^3}\{\dot{\mathfrak{w}} - \mathfrak{R}_0(\mathfrak{R}_0\dot{\mathfrak{w}})\},$$

woraus sich nach Multiplikation mit de und doppelter Summation über die verschiedenen Elemente des (kugelsymmetrischen) Elektrons ergibt [vgl. die Ableitung von (17a)]

$$\mathfrak{F} = -m\mathfrak{w} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{w}}. \qquad (24\,\mathrm{b})$$

Diese Formel ist als die Vervollständigung unserer früheren Formel (17a) für die Selbstkraft des Elektrons anzusehen; dabei haben wir in dem Ausdruck dieser Kraft die Elektronenmasse m nach (16b) eingeführt. Die Selbstkraft setzt sich also zusammen aus zwei Anteilen: der Trägheitskraft $-m\mathfrak{w}$ und der oben auf eine andere Weise berechneten Dämpfungskraft $\mathfrak{f} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{w}}$

Am Ende des Kapitels VI haben wir schon bemerkt, daß bei der Betrachtung der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Teilen eines elektrischen Ladungssystems, den gewöhnlichen Ausdrücken für die *retardierten* elektromagnetischen Potentiale und Feldstärken die entsprechenden Reihenentwicklungen, welche sie als momentane Fernwirkungen darstellen, vorzuziehen sind. In der Tat, die Formel (24b) könnte man unmittelbar aus der ein wenig korrigierten Formel (28a), Kap. VI ableiten. Dabei entspricht dem ersten in $\frac{1}{R}$ quadratischen Gliede von (28) keine resultierende Selbstkraft; dem zweiten in $\frac{1}{R}$ linearen Gliede eine Selbstkraft

$$-\{\mathfrak{w} + \overline{\mathfrak{R}_0(\mathfrak{w}\mathfrak{R}_0)}\}\frac{U}{c^2} = -\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\mathfrak{w} = -m\mathfrak{w}$$

[1]) Vgl. unten die Theorie des deformierbaren (*Lorentz*schen) Elektrons.

in Übereinstimmung mit (17a), und dem dritten von R unabhängigen Gliede die Selbstkraft

$$+\frac{e^2}{c^3}\frac{d\mathfrak{w}}{dt}.$$

In diesem Ausdruck fehlt noch der Faktor $\frac{2}{3}$, was sich durch die Ungenauigkeit der Formel (28a), erklärt. Hätten wir in den Reihen (27) und (27a) Kap. VI noch einen Term berücksichtigt, so würde sich der betrachtete Anteil der Selbstkraft mit dem richtigen Faktor ergeben.

Es sei noch zum Schluß auf Folgendes hingewiesen. Die Gleichung (21), welche als der Integralausdruck des Gesetzes der Erhaltung der Energie angesehen werden darf, kann man ebenso wie die entsprechende Gleichung für das Erhaltungsprinzip der Elektrizität durch eine Differentialgleichung ersetzen, welche offenbar lautet

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{R} = 0. \qquad (25)$$

Dies ist nichts anderes als die Gleichung (19b), wo wir aber $l = 0$ gesetzt haben. Es muß nun beachtet werden, daß die letzte Gleichung nicht allgemeingültig ist. Denn aus dem Verschwinden der Arbeit $\int l\,dV$ für ein *ganzes* Elektron (nach dem *Lorentz*schen Bewegungsprinzip) darf man noch nicht schließen, daß die elementaren Arbeiten $l\,dV$ für jedes Element des Elektrons einzeln verschwinden. Die Entwicklung dieser Frage ist ohne ein tieferes Eingehen auf die Struktur des Elektrons nicht möglich.

§ 5. Transformation der elektrischen und magnetischen Kräfte; elektromagnetische Bewegungsgröße.

Die Totalkraft $d\mathfrak{F}$, welche auf ein Ladungselement $de = \varrho\,dV$ wirkt, kann in der Form $d\mathfrak{F} = \mathfrak{f}\,dV$ dargestellt werden. Der Vektor $\mathfrak{f}$ drückt sich nach (18b) durch die Formel

$$\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} + \mathfrak{j} \times \mathfrak{H} \qquad (26)$$

aus, und läßt sich definieren als die auf die Volumeinheit bezogene Kraft, oder auch als der *Impuls* dieser Kraft pro Zeiteinheit. In dieser Fassung entspricht der Vektor $\mathfrak{f}$ dem Skalar l: letzterer bedeutet die auf die Volum- und Zeiteinheit bezogene Arbeit, ersterer den entsprechenden Impuls.

Wir wollen nun zeigen, daß der Ausdruck (26) auf eine Weise transformiert werden kann, die ganz analog zu der im vorigen Paragraph ausgeführten Transformation des Ausdruckes (19) ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß das elektrische und magnetische Feld zeitlich konstant sind. Dann lassen sich die beiden Anteile von (26) einzeln unabhängig voneinander transformieren.

Mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

kann die resultierende elektrische Kraft

$$\mathfrak{F}^{(e)} = \int \mathfrak{E}\varrho \, dV ,$$

welche auf alle sich im Volum V befindenden Ladungen wirkt, zunächst in der Form

$$\mathfrak{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} \, dV$$

geschrieben werden. Ferner haben wir nach der allgemeinen Formel (16c), Einleitung,

$$\int \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} \, dV = \oint (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \, \mathfrak{E} \, dS - \int (\mathfrak{E} \operatorname{grad}) \, \mathfrak{E} \, dV ,$$

und nach (27) (ibid.), wegen $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$,

$$(\mathfrak{E} \operatorname{grad}) \, \mathfrak{E} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} E^2 .$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \oint (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \, \mathfrak{E} \, dS - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} E^2 \, dV$$

und schließlich nach (16), Einleitung:

$$\mathfrak{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \oint \left(\mathfrak{E} E_n - \mathfrak{n} \frac{E^2}{2} \right) dS . \tag{27}$$

Durch diese Formel wird die Kraft $\mathfrak{F}^{(e)}$ dargestellt als die Resultierende von elastizitätsartigen *Spannungen*, die im ganzen elektrischen Feld (auch dort, wo keine Ladungen vorkommen) wirksam sind. Dabei können wir uns nach (27) vorstellen, daß auf jedes Flächenelement dS eine bestimmte Kraft $-T_n^{(e)} \, dS$ wirkt, wobei $T_n^{(e)}$ — die auf die Flächeneinheit bezogene „Spannung" — durch die Formel

$$\mathfrak{T}_n^{(e)} = \mathfrak{n} \frac{E^2}{8\pi} - \frac{\mathfrak{E} E_n}{4\pi} \tag{27a}$$

gegeben wird.

Solche Spannungen oder Flächenkräfte betrachtet man in der Elastizitätstheorie, wo sie die Wechselwirkung zweier längs der betrachteten Fläche aneinander grenzender Körperteile charakterisieren. In unserem Falle sind diese Spannungen bloße mathematische Fiktionen, welche die Wechselwirkung zwischen den elektrischen Ladungen, die sich auf verschiedenen Seiten irgendeiner Fläche S befinden, in einer sehr bequemen und anschaulichen Weise darstellen. Ist die elektrische Feldstärke zur Flächennormale $\mathfrak{n}$ parallel ($\mathfrak{E} E_n = \mathfrak{n} E^2$), so reduziert sich die Spannung (27a) auf $-\mathfrak{n} \frac{E^2}{8\pi}$. Wir haben also in diesem Falle eine von innen nach außen wirkende *Zugkraft*; stehen dagegen die Vektoren $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{E}$ senkrecht aufeinander, so bekommen wir eine von außen nach innen gerichtete *Druckkraft* derselben Größe (von der Art des gewöhnlichen hydrostatischen Drucks). Mit anderen Worten, man kann sich

die elektrischen Kraftlinien als gespannte Fäden vorstellen, die in der Längsrichtung einem Zug und in der Querrichtung einem Druck unterworfen sind; dabei sind die erwähnten „Hauptspannungen" — Längszug und Querdruck, auf die Flächeneinheit bezogen — gleich der Volumdichte der elektrischen Energie (*Maxwell*sche Spannungen). Den Spannungsvektor $\mathfrak{T}_n^{(e)}$ kann man vom mathematischen Gesichtspunkt aus behandeln als das innere Produkt einer gewissen *Tensorgröße* ${}^2\mathfrak{T}^{(e)}$, des sogenannten elektrischen *Spannungstensors*, mit der Normale $\mathfrak{n}$. Durch Multiplikation von $\mathfrak{T}_n$ mit irgendeinen anderen Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ bekommen wir eine skalare Größe

$$T_{nk}^{(e)} = (\mathfrak{n}\mathfrak{k})\frac{E^2}{8\pi} - \frac{E_n E_k}{4\pi}, \tag{27b}$$

welche man als die *Komponente* des Tensors ${}^2\mathfrak{T}^{(e)}$ bezüglich der beiden Richtungen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ bezeichnen darf. Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ in (27b) auf eine ganz symmetrische Weise eintreten, muß man schließen, daß der elektrische Spannungstensor ein symmetrischer Tensor ist. Seine Komponenten in bezug auf irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem X_1, X_2, X_3 drücken sich nach (27b) (wobei $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ zwei Koordinatenvektoren bedeuten sollen) durch die Formeln aus:

$$\left.\begin{aligned} T_{11}^{(e)} &= \frac{1}{8\pi}(-E_1^2+E_2^2+E_3^2), \quad T_{22}^{(e)} = \frac{1}{8\pi}(-E_2^2+E_3^2+E_1^2), \\ T_{33}^{(e)} &= \frac{1}{8\pi}(-E_3^2+E_1^2+E_2^2), \\ T_{23}^{(e)} = T_{32}^{(e)} &= -\frac{E_2E_3}{4\pi}, \quad T_{31}^{(e)} = T_{13}^{(e)} = -\frac{E_1E_3}{4\pi}, \quad T_{12}^{(e)} = T_{21}^{(e)} = -\frac{E_1E_2}{4\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{27c}$$

Ganz analoge Resultate ergeben sich bei der Transformation der magnetischen (oder elektromagnetischen) Kraft

$$\mathfrak{F}^{(m)} = \int \mathfrak{j} \times \mathfrak{H}\, dV,$$

wenn die elektrische Strömung als *stationär* (und folglich die magnetische Feldstärke als zeitlich konstant) vorausgesetzt wird. In diesem Falle haben wir

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{j}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Es wird also $\mathfrak{j}\times\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ und folglich, wegen der Identität $\operatorname{grad}\frac{H^2}{2} = (\mathfrak{H}\operatorname{grad})\mathfrak{H} + \mathfrak{H}\times\operatorname{rot}\mathfrak{H}$,

$$\int \mathfrak{j}\times\mathfrak{H}\, dV = \frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{H}\operatorname{grad})\mathfrak{H}\, dV - \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{grad} H^2\, dV,$$

d. h.

$$\mathfrak{F}^{(m)} = \frac{1}{4\pi}\oint\left(\mathfrak{H}H_n - \mathfrak{n}\frac{H^2}{2}\right)dS. \tag{28}$$

Diese Formel ist vollkommen identisch mit (27). Wir brauchen deshalb

auf ihre Interpretation nicht einzugehen. Den Vektor

$$\mathfrak{T}_n^{(m)} = \mathfrak{n}\frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathfrak{H}H_n}{4\pi} \tag{28a}$$

können wir definieren als die Normalkomponente des *magnetischen Spannungstensors* ${}^2\mathfrak{T}^{(m)}$. Seine rechtwinkligen Komponenten drücken sich durch die zu (27c) ganz analogen Formeln aus:

$$\left.\begin{aligned} T_{11}^{(m)} &= \frac{1}{8\pi}(-H_1^2+H_2^2+H_3^2), \quad T_{22}^{(m)} = \frac{1}{8\pi}(-H_2^2+H_3^2+H_1^2), \\ T_{33}^{(m)} &= \frac{1}{8\pi}(-H_3^2+H_1^2+H_2^2), \\ T_{23}^{(m)} = T_{32}^{(m)} &= -\frac{H_2H_3}{4\pi}, \quad T_{31}^{(m)} = T_{13}^{(m)} = -\frac{H_1H_3}{4\pi}, \\ T_{12} &= T_{21} = -\frac{H_1H_2}{4\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{28b}$$

Die Summe

$${}^2\mathfrak{T} = {}^2\mathfrak{T}^{(e)} + {}^2\mathfrak{T}^{(m)} \tag{28c}$$

bezeichnet man als den *elektromagnetischen Spannungstensor.*

Wir gehen jetzt über zu unserer allgemeinen Aufgabe: die Transformation des Ausdruckes (26) oder des Integrals

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{f}\, dV$$

für beliebige elektrische Systeme, d. h. für zeitlich variable elektromagnetische Felder.

Wir schreiben dabei die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in der Form

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathfrak{E} &= 4\pi\varrho, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi\mathfrak{j}, \\ \operatorname{div}\mathfrak{H} &= 4\pi\varrho^*, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -4\pi\mathfrak{j}^*, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

wo die magnetischen Ladungs- und Stromdichten selbstverständlich gleich Null sind ($\varrho^* = 0$, $\mathfrak{j}^* = 0$), und fügen zu dem Ausdruck (26) den konjugierten magnetischen Ausdruck

$$\mathfrak{f}^* = \varrho^*\mathfrak{H} - \mathfrak{j}^* \times \mathfrak{E}$$

hinzu [vgl. (12a), Kap. V]. Dabei wird

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f} + \mathfrak{f}^* = \varrho\mathfrak{E} + \varrho^*\mathfrak{H} + \mathfrak{j}\times\mathfrak{H} - \mathfrak{j}^*\times\mathfrak{E}$$

oder nach (29)

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\operatorname{div}\mathfrak{H} + \operatorname{rot}\mathfrak{H}\times\mathfrak{H} + \operatorname{rot}\mathfrak{E}\times\mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\times\mathfrak{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\times\mathfrak{E}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\times\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\times\operatorname{rot}\mathfrak{H}) - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H})$$

Aus den schon oben benutzten Formeln

$$\oint(\mathfrak{E}\mathfrak{n})\mathfrak{E}\,dS = \int(\mathfrak{E}\operatorname{grad})\mathfrak{E}\,dV + \int\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}\,dV$$

und

$$\oint\frac{E^2}{2}\mathfrak{n}\,dS = \int\operatorname{grad}\frac{E^2}{2}\,dV = \int(\mathfrak{E}\operatorname{grad})\mathfrak{E}\,dV + \int\mathfrak{E}\times\operatorname{rot}\mathfrak{E}\,dV$$

ergibt sich durch Subtraktion die Identität

$$\int (\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\times\mathrm{rot}\,\mathfrak{E})\,dV = \oint \left\{ (\mathfrak{E}\mathfrak{n})\mathfrak{E} - \mathfrak{n}\frac{E^2}{2} \right\} dS\,.$$

Mittels dieser Identität und der entsprechenden Identität für $\mathfrak{H}$ bekommen wir:

$$\int \mathfrak{f}\,dV = \frac{1}{4\pi}\oint \left\{ (\mathfrak{E}\mathfrak{n})\mathfrak{E} + (\mathfrak{H}\mathfrak{n})\mathfrak{H} - \mathfrak{n}\frac{E^2+H^2}{2} \right\} dS - \frac{1}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H})\,dV\,,$$

d. h.

$$\mathfrak{F} = -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} - \oint \mathfrak{T}_n\,dS\,, \tag{30}$$

wo

$$\mathfrak{G} = \int \frac{\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}}{4\pi c}\,dV = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{K}\,dV \tag{30a}$$

ist. $\mathfrak{K}$ bedeutet den Energieströmungsvektor (20b) und $\mathfrak{T}_n$ die Normalkomponente des Spannungstensors:

$$-\mathfrak{T}_n = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{E}E_n + \mathfrak{H}H_n - \mathfrak{n}\frac{E^2+H^2}{2}\right). \tag{30b}$$

Die Formel (30) ist ganz analog zur Formel (20). Dabei entsprechen den Skalaren A (Arbeit pro Zeiteinheit) und W (Energie) die Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$; dem Vektor $\mathfrak{K}$ in (20) entspricht in (30) der *Tensor* ${}^2\mathfrak{T}$. Aus dieser rein formalen Beziehung zwischen den beiden Ausdrücken folgt, daß sie eine entsprechende physikalische Interpretation zulassen müssen. In der Tat, betrachtet man den Vektor $\mathfrak{F}$ nicht als die *Kraft*, sondern als den *Impuls* dieser Kraft pro Zeiteinheit (siehe oben) und benutzt die übliche mechanische Beziehung zwischen dem Impuls einer Kraft und der resultierenden Änderung der mechanischen *Bewegungsgröße* (die vollkommen der Beziehung zwischen Arbeit und der Änderung der kinetischen Energie entspricht) so kann man den Vektor $\mathfrak{G}$ als die im Volum V aufgespeicherte *elektromagnetische Bewegungsgröße* definieren und den Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ als die *Volumdichte der Strömung dieser Bewegungsgröße*.

Wäre der Impuls $\mathfrak{F}$ von Null verschieden, so könnte man sagen, daß er auf Kosten der elektromagnetischen Bewegungsgröße geleistet wird. Da aber für jedes einzelne Elektron dieser Impuls nach dem *Lorentz*schen Bewegungsprinzip verschwindet, reduziert sich die Formel (30) (falls die betrachtete Fläche kein Elektron schneidet) auf

$$-\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int \mathfrak{T}_n\,dS \tag{31}$$

und drückt das Gesetz *der Erhaltung der elektromagnetischen Bewegungsgröße* aus.

Die letzte Formel kann man durch die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + \mathrm{div}\,{}^2\mathfrak{T} = 0 \tag{31a}$$

ersetzen, wo

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{K}}{c^2} \tag{31b}$$

die Raumdichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße bedeutet. Man muß aber beachten, daß die Gleichung (31a) im Innern der einzelnen Elektronen *nicht* gilt.

Nach der angeführten Interpretation erscheint die elektromagnetische Bewegungsgröße — ebenso wie die elektromagnetische Energie — als etwas Substantielles, das im Raume lokalisiert werden kann. Da sie eine Vektorgröße ist, ist es unmöglich, sie selbst als eine Art von Substanz zu behandeln. Man kann aber im Anschluß an die übliche Definition der mechanischen Bewegungsgröße (Produkt von Masse und Geschwindigkeit) den Vektor $\mathfrak{g}$ definieren als Produkt eines Skalars μ, der die Bedeutung einer gewöhnlichen *Massendichte*, d. h. einer gewöhnlichen *trägen Masse* pro Volumeinheit hat, mit einem Vektor, der die Bewegungsgeschwindigkeit dieser Masse darstellen soll.

Es sei erinnert, daß wir eine analoge Zerlegung im vorigen Paragraphen für den Energieströmungsvektor $\mathfrak{K}$ durchgeführt haben. Durch Einsetzen des entsprechenden Ausdrucks (21b) in (31b) ergibt sich

$$\mathfrak{g} = \mu \mathfrak{C} \tag{32}$$

mit

$$\mu = \frac{\xi}{c^2}, \tag{32a}$$

Die letzte Gleichung drückt eine ganz allgemeine Beziehung zwischen Massendichte und Energiedichte aus. Sie entspricht der Beziehung (16b) zwischen der Masse und der (elektrostatischen) Energie eines Elektrons, die wir auf Grund der elektromagnetischen Theorie der Masse aufgestellt haben. Dabei erscheint die Masse eines Elektrons (oder irgendeines Systems von Elektronen) als eine Eigenschaft seines elektromagnetischen Feldes; und zwar muß sie nicht im Elektron selbst, d. h. in dem Raum, wo seine Ladung lokalisiert gedacht wird, sondern im ganzen Raume, über den sich das elektromagnetische Feld dieser Ladung ausdehnt, lokalisiert werden. — Ferner folgt aus der Formel (32a), daß nicht nur die elektrische, sondern auch die magnetische Energie zur Masse beiträgt; mit anderen Worten, die Masse eines Elektrons muß mit Zunahme seiner Geschwindigkeit zunehmen und nimmt nur im Grenzfall sehr kleiner Geschwindigkeiten den oben berechneten Wert an. Merkwürdigerweise fehlt in der allgemeinen Formel (32a) der in (16b) auftretende Faktor $\frac{4}{3}$. Dieser Umstand bietet für die elektromagnetische Theorie der Masse eine große Schwierigkeit, auf welche wir unten noch zurückkommen werden.

Strenggenommen erhält die Zerlegung (32), ebenso wie die entsprechende Zerlegung (21b), einen echten physikalischen Sinn nur in der Wellenzone, wo die Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ nach Größe und Richtung mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen übereinstimmt. In diesem Fall läßt sich auch der Tensor $^2\mathfrak{T}$ in einer

Form darstellen, die vollständig identisch ist mit der Form, die ihm in der gewöhnlichen Mechanik zukommen würde. Hätten wir nämlich einen kontinuierlich verbreiteten Körper mit der Massendichte μ und der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{C}$, so würden sich die Komponenten des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$ — der Strömungsdichte von $\mathfrak{g}$ — auf dieselbe Weise durch die Komponenten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{g}$ ausdrücken wie die Komponenten von $\mathfrak{g}$ — der Strömungsdichte von μ — durch die Komponenten von $\mathfrak{C}$ und den Skalar μ. Es sollten also in diesem Fall neben den Formeln $g_i = \mu C_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die entsprechenden Formeln

$$T_{ik} = \mu C_i C_k \tag{32b}$$

gelten.

Es ist nun leicht, sich zu überzeugen, daß *in der Wellenzone* diese Formeln mit der aus (30b) folgenden allgemeingültigen Formel

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-E_i E_k - H_i H_k + \delta_{ik}\frac{E^2 + H^2}{2}\right) \tag{33}$$

übereinstimmen; dabei bedeuten die δ_{ik} die Komponenten des Einheitstensors

$${}^2\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33a}$$

so daß $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$ und $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ ist.

Wir denken uns z. B. die erste Achse in die Fortpflanzungs- (oder Strahlen-)richtung, die zweite Achse in die Richtung der elektrischen Feldstärke und die dritte in die Richtung der magnetischen Feldstärke gelegt. Dabei bekommen wir nach (22) ein rechtshändiges Koordinatensystem, in bezug auf welches die Tensorkomponenten (33) sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} T_{11} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \xi\,, \quad T_{22} = \frac{-E^2 + H^2}{8\pi} = 0\,, \quad T_{33} = \frac{E^2 - H^2}{8\pi} = 0 \\ T_{23} = T_{31} = T_{12} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{33b}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich nach der Formel (32b), wenn man unter $\mathfrak{C}$ den Lichtgeschwindigkeitsvektor versteht und die Beziehung (32a) zwischen Massen- und Energiedichte berücksichtigt.

Es muß aber betont werden, daß diese Übereinstimmung *nur* für die Wellenzone gilt. Im allgemeinen läßt sich ein Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{C}$, der eine Darstellung der Tensorkomponenten (33) in der Gestalt (32b) gestatten würde, überhaupt *nicht definieren* — schon aus dem Grunde, weil wir durch das Gleichsetzen von (32b) und (33) 6 Gleichungen für drei Unbekannte (die Komponenten von $\mathfrak{C}$) bekommen würden.

Die erwähnte „Substanzvorstellung" des elektromagnetischen Feldes als Träger von Energie und Masse bleibt also nur für die Wellenzone unbedingt gültig; sonst aber ist eine Zerlegung des Energieströmungs-

vektors (oder der Bewegungsgröße) und besonders des „Impulsströmungstensors“ ${}^2\mathfrak{T}$, in Analogie zur klassischen Mechanik, nicht nur physikalisch sinnlos, sondern, im letzten Falle auch mathematisch unmöglich. — Es sei noch bemerkt, daß in dem Raumgebiet, wo diese Zerlegung gestattet ist, die elektromagnetische Energie sich doppelt so groß ergibt als die kinetische Energie (im Sinne der gewöhnlichen Mechanik) einer mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Masse der nach (32a) zugeordneten Größe.

Die beiden Auffassungen des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$ — als Strömungsdichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße und als Spannungstensor — sind offenbar einander ganz äquivalent. Wir wollen diese Äquivalenz an dem folgenden einfachen Beispiel erklären. Wir betrachten ein Lichtstrahlenbündel, d. h. einen seitlich begrenzten Wellenzug, der auf eine materielle Platte senkrecht auffällt und in dieser Platte absorbiert wird. Dabei geht die von dem betrachteten Strahlenbündel übertragene Energie und Bewegungsgröße sozusagen in die Platte hinein, wo sie die gewöhnliche Form einer kinetischen oder Wärmeenergie annimmt bzw. einer gewöhnlichen „mechanischen“ Bewegungsgröße, die sich in einer Bewegung der Platte in der Richtung der Lichtstrahlen äußern kann. Daraus folgt, daß die Platte durch die Lichtstrahlen eine gewisse *Druckkraft* erfährt. Dieser sogenannte *Lichtdruck* ist offenbar gleich der auf die Platte pro Zeiteinheit übertragenen Bewegungsgröße, d. h. (falls die Druckkraft auf die Flächeneinheit bezogen wird) gleich dem Produkte gc; andererseits muß sie der oben berechneten Komponente des Spannungstensors $T_{11} = \xi$ gleich sein. Diese Größen sind aber identisch, denn aus (32) und (32a) folgt

$$g = \frac{\xi}{c}.$$

Wir können also sagen, daß der Lichtdruck auf eine zu den Lichtstrahlen normale absorbierende Fläche numerisch gleich der elektromagnetischen Energiedichte ist.

Bei schiefem Einfall der Strahlen läßt sich die von ihnen ausgeübte Flächenkraft (Spannung) $\mathfrak{T}_n$ nicht auf einen einfachen hydrostatischen Druck reduzieren. Die Projektion dieser Kraft auf irgendeinen Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ drückt sich allgemein, nach den bekannten Regeln der Tensorrechnung [Einleitung (34)], durch die Formel aus

$$({}^2\mathfrak{T}\,\mathfrak{n})\,\mathfrak{k} = T_{nk} = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T_{\alpha\beta}\, n_\alpha k_\beta .$$

In dem Spezialfall des Koordinatensystems, auf welches sich die Formeln (33b) beziehen, bekommen wir

$$T_{nk} = \xi\, n_1 k_1 = \xi \cos\theta \cos\theta', \tag{34}$$

wo θ und θ' die Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{k}$ und den Licht-

strahlen bedeuten. Der normal zur Oberfläche wirkende Druck ist also in dem betrachteten Fall gleich

$$T_{nn} = \xi \cos^2 \theta \,. \qquad (34a)$$

§ 6. Die Translationsbewegung eines Lorentzschen Elektrons.

Die in den zwei vorigen Paragraphen angeführten Transformationsformeln für die Arbeit (20) und besonders für die Kraft (30) erlauben uns, auf eine neue Weise die von einem willkürlich bewegten Elektron ausgeübte *Selbstkraft* zu berechnen, und damit, auf Grund des Lorentzschen Bewegungsprinzips, die exakte Form der Bewegungsgleichung eines Elektrons aufzustellen. Dazu brauchen wir bei der Berechnung der elektromagnetischen Bewegungsgröße (oder Energie) nur das von dem betrachteten Elektron selbst erzeugte Feld zu berücksichtigen.

Man könnte selbstverständlich die gesuchte Selbstkraft *direkt* bestimmen als die Resultierende der elementaren Kräfte zwischen den verschiedenen Elementen des Elektrons — ebenso wie wir es näherungsweise im § 2 und 3 [Formel (24b)] getan haben. Die einzuschlagende [1]) indirekte Methode hat aber gegen die direkte den folgenden Vorteil: Das elektromagnetische Feld des Elektrons in einem bestimmten Augenblick t kann man mittels der Formeln (26a) und (26b), Kap. VI, durch eine Reihe darstellen, deren einzelne Glieder von seiner Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, Beschleunigung $\mathfrak{w}$ und den höheren Ableitungen von $\mathfrak{v}$ nach der Zeit abhängen[2]). Bei der Berechnung der Selbstkraft nach der direkten Methode sind die nur von der Geschwindigkeit abhängigen Glieder (1-ter Ordnung) belanglos; man muß also zunächst die Glieder 2-ter Ordnung betrachten, welche den Hauptteil der Selbstkraft, nämlich die Trägheitskraft liefern. Es sei bemerkt, daß diese Glieder neben der Beschleunigung noch die Geschwindigkeit enthalten können; in der erwähnten angenäherten Berechnung haben wir uns aber nur auf den Fall kleiner Geschwindigkeiten beschränkt, und dementsprechend nur die in $\mathfrak{w}$ linearen Glieder, welche von $\mathfrak{v}$ unabhängig sind, behandelt. Die Glieder 3-ter Ordnung bestimmen den nächsten Anteil der Selbstkraft, welche der Strahlungsdämpfung entspricht; sie können neben $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ noch $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ enthalten; wir haben aber bei der Berechnung der Dämpfungskraft $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ als verhältnismäßig klein vorausgesetzt. Analoge Betrachtungen gelten für Glieder höherer Ordnung.

Dagegen muß man bei der indirekten Methode, wegen des Auftretens der *zeitlichen Ableitungen* der Energie und der Bewegungsgröße in den

---

[1]) Von *Abraham* herrührende.

[2]) Soweit alle diese Ableitungen stetig und folglich endlich sind. Im entgegengesetzten Falle muß man die Zeitintervalle, in welchen sie endlich bleiben, einzeln betrachten und dementsprechend für verschieden entfernte Teile des Feldes verschiedene Entwicklungen benutzen.

Formeln (20) und (30), bei der Berechnung der Selbstkraft (oder ihrer Arbeit) schon die Glieder *erster* Ordnung, die nur von der Geschwindigkeit abhängen, berücksichtigen. Diese Glieder spielen sogar die Hauptrolle — denn aus dem entsprechenden Gliede der Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$ bekommt man durch Differentiation nach der Zeit Glieder, die von der Beschleunigung linear abhängen, also die Trägheitskraft bestimmen. Kurzgefaßt kann diese Beziehung folgendermaßen formuliert werden: Glieder n-ter Ordnung in der Reihenentwicklung des elektromagnetischen Feldes gestatten denselben (n-ten) Anteil der Selbstkraft mittels der indirekten Methode zu berechnen, der sich bei der direkten Methode nur aus den Gliedern $(n+1)$-ter Ordnung bestimmen läßt. Handelt es sich also um die *genaue* Berechnung der „Trägheitskraft", d. h. desjenigen Teiles der Selbstkraft, welcher der Beschleunigung des Elektrons proportional ist, wobei aber auch seine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit zu berücksichtigen ist, so genügt es bei der Benutzung der indirekten Methode, das elektromagnetische Feld des Elektrons für eine Bewegung mit *konstanter Geschwindigkeit* zu ermitteln. Dabei fallen die in (20) und (30) auftretenden Integrale $\oint K_n dS$ und $\oint \mathfrak{T}_n dS$ für eine unendlich entfernte Oberfläche weg (denn die elektrische und magnetische Feldstärke nehmen bei geradlinig-gleichförmiger Bewegung — ebenso wie bei Ruhe — umgekehrt proportional zum Quadrate der Entfernung ab), so daß diese Formeln die folgende einfache Gestalt erhalten:

$$\mathfrak{F} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} \tag{35}$$

und

$$A = \mathfrak{F}\mathfrak{v} = -\frac{dW}{dt}. \tag{35a}$$

Die Integrale (30a) und (20a), welche $\mathfrak{G}$ und W bestimmen, müssen dabei selbstverständlich über den ganzen Raum erstreckt werden.

In Kapitel VI haben wir gezeigt, daß das elektromagnetische Feld einer geradlinig-gleichförmig (mit Unterlichtgeschwindigkeit) bewegten *Punktladung de* sich ausdrückt durch die Formeln

$$d\mathfrak{E} = (1-\beta^2)\, de \frac{\mathfrak{R}}{R^{*3}}; \quad d\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{v} \times d\mathfrak{E} \tag{36}$$

[vgl. (13), (13a) und (13b), Kap. VI)]. Wir können nun die unendlich kleinen Elemente *de* des betrachteten Elektrons als Punktladungen behandeln und die resultierenden Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ einfach durch Integration der Ausdrücke (36) bestimmen.

Es sei erinnert, daß der Vektor $\mathfrak{R}$ den Radiusvektor des betreffenden Aufpunktes P bezüglich der *gleichzeitigen* (momentanen) Lage P^* des Elementes *de* bedeutet und daß in einem rechtwinkligen Koordinatensystem X_1, X_2, X_3, dessen Ursprung in P^* liegt und dessen X_1-Achse in die Bewegungsrichtung fällt, die Formel gilt

$$R^* = \sqrt{x_1^2 + (1-\beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}, \tag{36a}$$

wo x_1, x_2, x_3 die Komponenten von $\mathfrak{R}$ sind.

Wir führen nun ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem X_1', X_2', X_3' ein, mit demselben Ursprung und derselben Orientierung der Achsen, aber mit einem anderen Maßstab für die erste (der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ parallele) Achse, nach den Formeln:

$$x_1 = x_1' \sqrt{1-\beta^2}, \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_1. \tag{37}$$

Dabei läßt sich der obige Ausdruck für R^* in der Form

$$R^* = \sqrt{1-\beta^2}\, R' \tag{37a}$$

darstellen, wo

$$R' = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \tag{37b}$$

die Bedeutung des Abstandes P^*P in dem neuen Koordinatensystem hat. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Formel (36) für $d\mathfrak{E}$ bekommen wir:

$$d\mathfrak{E} = \frac{de}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathfrak{R}}{R'^3},$$

oder in Komponenten nach den Koordinatenachsen:

$$\left.\begin{aligned} dE_1 &= \frac{de}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{x_1}{R'^3} = de\, \frac{x_1'}{R'^3}, \quad dE_2 = \frac{de}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{x_2'}{R'^3}, \\ dE_3 &= \frac{de}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{x_3'}{R'^3}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Daraus folgt, daß der Vektor $d\mathfrak{E}'$, mit den Komponenten

$$dE_1' = dE_1, \quad dE_2' = dE_2 \sqrt{1-\beta^2} \quad dE_3' = dE_3 \sqrt{1-\beta^2} \tag{38a}$$

behandelt werden kann als die elektrische Feldstärke einer Punktladung de, die im Anfang des Koordinatensystems X' ruht.

Durch Summation über die verschiedenen Elemente der Elektronenladung ergeben sich aus (38a) die Formeln

$$E_1 = E_1', \quad E_2 = \frac{E_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_3 = \frac{E_3'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{38b}$$

Dabei bedeuten E_1', E_2', E_3' die Komponenten der resultierenden Feldstärke des betrachteten Elektrons bezüglich des Koordinatensystems X'.

Nun bemerken wir, daß dieses Koordinatensystem aus dem ursprünglichen X, nach den Transformationsformeln (37), durch eine *Dilatation in der Bewegungsrichtung* entsteht, und zwar in dem Verhältnis $1:\sqrt{1-\beta^2}$. Stellt sich also das Elektron in dem Koordinatensystem X als kugelförmig dar, so muß es in dem transformierten Koordinatensystem X' als ein Rotationsellipsoid erscheinen, dessen Längsachse in dem Verhältnis $1:\sqrt{1-\beta^2}$ größer ist als die Querachse, d. h. als der ursprüngliche Kugelradius a. Die Gesamtladung des Elektrons bleibt dabei unverändert, so daß die Ladungsdichte ϱ' (bezüglich X') in demselben Verhältnis gegenüber der wahren Ladungsdichte ϱ (bezüglich X) vermindert erscheint.

In der angeführten Überlegung haben wir stillschweigend angenommen, daß das Elektron sich als ein absolut starrer Körper (im Sinne der gewöhnlichen Mechanik) bewegt. Nun ist diese von *Abraham* herrührende Vorstellung *keineswegs die natürlichste.* Wir haben nämlich in Kap. VI, § 3 gesehen, daß die Wechselwirkung zwischen den Elementen eines geradlinig-gleichförmig bewegten Punktladungssystems sich aus einem *Konvektionspotential* ψ auf dieselbe Weise bestimmen läßt wie die Wechselwirkung derselben Punktladungen im Ruhezustand des Systems aus dem gewöhnlichen skalaren Potential φ. Wir haben ferner gesehen, daß die Flächen $\psi =$ konst sich für jede mit der konstanten Geschwindigkeit $v = c\beta$ bewegte Punktladung als *abgeplattete* Rotationsellipsoide darstellen, und zwar abgeplattet in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$. Von dem transformierten Koordinatensystem X' beurteilt erscheinen diese Ellipsoide wieder als Kugeln.

Es erhebt sich nun die folgende Frage: warum muß das bewegte Elektron dieselbe Gestalt wie das ruhende beibehalten, trotz der durch die Bewegung hervorgerufenen Änderung in der Wechselwirkung seiner Elemente?

Im Ruhezustand bei Annahme der Kugelsymmetrie reduziert sich diese Wechselwirkung auf eine radial gerichtete Spannung, die irgendwie durch die zwischen den Elementen des Elektrons wirkenden Bindungskräfte aufgehoben wird (sonst würde das Elektron „explodieren"). Dabei fällt die Oberfläche des Elektrons mit einer Niveaufläche $\varphi =$ konst zusammen; dasselbe gilt überhaupt für alle Flächen konstanter Ladungsdichte. Es scheint nun ganz natürlich, diese Übereinstimmung der Flächen $\varrho =$ konst und der Flächen $\varphi =$ konst als die eigentliche *Gleichgewichtsbedingung* des Elektrons anzusehen, wodurch speziell auch seine äußere Gestalt bestimmt werden muß.

Wir wollen nun dieses *Gleichgewichtsprinzip* nach *Lorentz* (und *Fitz Gerald*) für den Fall eines geradlinig-gleichförmig bewegten Elektrons verallgemeinern, indem wir das skalare Potential durch das Konvektionspotential ψ ersetzen (für $\mathfrak{v} = 0$ wird $\psi = \varphi$). Wir nehmen also folgendes an: *in einem bewegten Elektron müssen die Flächen* $\varrho =$ *konst — und speziell die „freie" Oberfläche — mit den Flächen* $\psi =$ *konst. zusammenfallen.*

Das Konvektionspotential eines Elementes de des Elektrons drückt sich nach (15a) Kap. VI durch die Formel aus

$$d\psi = de \frac{(1 - \beta^2)}{R^*} \tag{39}$$

oder wegen (37a)

$$d\psi = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{R'} de. \tag{39a}$$

Die Flächen $d\psi =$ konst erscheinen also bezüglich des Koordinatensystems X' als kugelförmig. Daraus folgt, daß für ein *bezüglich dieses*

Systems kugelförmiges Elektron, d. h. für ein solches Elektron, für welches die Flächen $\varrho' =$ konst konzentrische Kugeln in X' sind, die Niveauflächen des resultierenden Konvektionspotentials auch kugelförmig (in X') sein müssen. Das Integral $\int \frac{de}{R'} = \varphi'$ ist in diesem Fall identisch mit dem skalaren Potential eines ruhenden Elektrons, welches sich bekanntlich in der Form $\frac{e}{r'}$ darstellen läßt (r' bedeutet den in X' gemessenen Abstand des Aufpunktes vom Mittelpunkt O des Elektrons). Dabei ist

$$\psi = \sqrt{1-\beta^2}\,\varphi' = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{e}{r'}. \tag{39b}$$

Damit aber das betrachtete Elektron bezüglich des Koordinatensystems X' kugelsymmetrisch erscheint, muß es in Wirklichkeit (d. h. bezüglich X) ein im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ abgeplattetes Rotationsellipsoid sein. Auf diese Weise werden wir zu der folgenden sogenannten *Lorentzschen Kontraktionshypothese* geführt. *Ein geradlinig gleichförmig bewegtes Elektron muß sich in der Bewegungsrichtung im Verhältnis* $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ *kontrahieren* (seine Querdimensionen bleiben dabei ohne Änderung).

Durch diese Annahme wird unsere Aufgabe — die Berechnung der Bewegungsgröße — sehr vereinfacht, nämlich auf eine schon gelöste elektrostatische Aufgabe zurückgeführt. — Die Raumdichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$$

läßt sich zunächst mittels der Beziehung $\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{E}$ in der Form

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c^2}\,(\mathfrak{v}\,E^2 - \mathfrak{E}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{E})) \tag{40}$$

darstellen, oder in Komponenten nach den Koordinatenachsen X_1, X_2, X_3:

$$g_1 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{v}{c^2}\,(E_2^2 + E_3^2), \quad g_2 = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{v}{c^2}\,E_1 E_2, \quad g_3 = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{v}{c^2}\,E_1 E_3.$$

Führen wir hier statt E_1, E_2, E_3 die Größen E_1', E_2', E_3' nach (38b) ein, so wird

$$g_1 = \frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{v}{1-\beta^2}\,(E_2'^2 + E_3'^2), \quad g_2 = -\frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,E_1' E_2',$$

$$g_3 = -\frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,E_1' E_3'.$$

Zur Berechnung der vollständigen Bewegungsgröße $\mathfrak{G} = \int \mathfrak{g}\,dV$ bemerken wir, daß einem Volumelement $dV = dx_1\,dx_2\,dx_3$ in X in dem Koordinatensystem X' nach (37), das Volumelement

$$dV' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3' = \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

entspricht. Es ist also

$$dV = \sqrt{1-\beta^2}\, dV'$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{4\pi} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV', \\ G_2 &= -\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{4\pi} \int E_1' E_2' dV', \\ G_3 &= -\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{4\pi} \int E_1' E_3' dV'. \end{aligned}\right\} \quad (40a)$$

Da im Ruhezustand das Elektron kugelsymmetrisch ist und diese Kugelsymmetrie infolge der *Lorentz*kontraktion bezüglich des mitbewegten Koordinatensystems X' erhalten bleibt, muß das Feld des Vektors E_1', E_2', E_3' von diesem Koordinatensystem beurteilt identisch sein mit dem gewöhnlichen elektrostatischen Feld desselben Elektrons im Ruhezustand bezüglich des Koordinatensystems X. Daraus folgt

$$\int E_1' E_2' dV' = \int E_1' E_3' dV' = 0$$

und

$$\int E_1'^2 dV' = \int E_2'^2 dV' = \int E_3'^2 dV' = \frac{1}{3}\int E'^2 dV' = \frac{1}{3}\int E^2 dV$$

d. h.

$$\frac{1}{4\pi}\int (E_2'^2 + E_3'^2)\, dV' = \frac{4}{3} U_0.$$

Dabei bedeutet

$$U_0 = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV$$

die gewöhnliche elektrische Energie des Elektrons im Ruhezustand. Definiert man die entsprechende *Ruhmasse* des Elektrons im Anschluß an (16b) durch die Formel

$$m_0 = \frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2} \quad (41)$$

so wird nach (40a)

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\mathfrak{v}. \quad (41a)$$

Die Größe

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (41b)$$

ist die tatsächliche Masse des Elektrons bei der Geschwindigkeit $v = c\beta$.

Wir sehen also, daß im Gegensatz zu der gewöhnlichen Mechanik die Masse des Elektrons keine konstante Größe ist, sondern von der Geschwindigkeit abhängt und zwar derart, daß sie für $v \to c$ unendlich wird. Daraus folgt, daß die Lichtgeschwindigkeit c eine Grenzgeschwindigkeit darstellt, welche durch die Wirkung endlicher Kräfte niemals erreicht werden kann.

In der gewöhnlichen Mechanik definiert man die Masse als Verhältnis zwischen der äußeren Kraft $\mathfrak{F}^a$ und der Beschleunigung $\mathfrak{w}$. Diese Definition erweist sich nun als nur bei kleinen Geschwindigkeiten gültig. In der Tat hat die Bewegungsgleichung des Elektrons, vorausgesetzt, daß seine Selbstkraft durch $-\frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ dargestellt werden kann, nach dem *Lorentz*schen Bewegungsprinzip die folgende allgemeine Form

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{F}^a . \tag{42}$$

Wir betrachten nun den Spezialfall, daß der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleibt und nur ihre Richtung sich mit der Zeit ändert (dieser Fall entspricht z. B. der Bewegung in einem äußeren Magnetfeld). Dann bleibt m auch konstant und die Formel (42) reduziert sich auf die Gestalt

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F}^a . \tag{42a}$$

Im entgegengesetzten Falle, wenn die Richtung der Geschwindigkeit konstant, ihre Größe dagegen variabel ist, bekommen wir nach (42) und (41b)

$$\frac{d}{dt}(mv) = m_0\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right) = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

und folglich

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = F^a . \tag{42b}$$

Die Masse, als Verhältnis der Kraft zur Beschleunigung, ergibt sich in den beiden Fällen (42a) und (42b) als verschieden. Man nennt dementsprechend die Größe $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ die *transversale* und $\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}$ die *longitudinale* Masse des Elektrons. Es ist aber zweckmäßiger, die Masse als eine einheitlich durch (41b) bestimmte Größe zu betrachten und sie bloß als Koeffizienten des Geschwindigkeitsvektors in dem allgemeinen Ausdruck (41a) der Bewegungsgröße zu definieren.

Durch innere Multiplikation der Kraft $\mathfrak{F}^a$ mit $\mathfrak{v}$ bekommen wir die von dieser Kraft pro Zeiteinheit geleistete Arbeit A. Nun ist nach (42) und (41b)

$$A = \mathfrak{F}^a \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v}\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}^2\frac{dm}{dt} + m\left(\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = \frac{m_0 v^2/c^2}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{d(v^2)}{dt}$$
$$+ \frac{m_0}{2\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{m_0}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{d(v^2)}{dt} = m_0 c^2\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} .$$

Wir sehen also, daß die während eines beliebigen Zeitintervalls geleistete Arbeit gleich der (algebraischen) Zunahme der Größe

$$W^* = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 \tag{43}$$

ist, so daß die Differenz

$$T^* = c^2(m - m_0) = c^2 m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right), \tag{43a}$$

die für $v = 0$ verschwindet, die Rolle der *kinetischen Energie* der gewöhnlichen Mechanik spielt. Entwickelt man $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ nach Potenzen von $\frac{v^2}{c^2}$, so ergibt sich die Reihe

$$T^* = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} \tag{43b}$$

deren erstes Glied tatsächlich mit dem üblichen Ausdruck der kinetischen Energie bei konstanter Masse übereinstimmt.

Es sei bemerkt, daß die durch (43a) definierte kinetische Energie des Elektrons von seiner *magnetischen* Energie $T = \frac{1}{8}\int H^2 dV$ *verschieden* ist. In der Tat, mittels der Beziehung $\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}}{e} \times \mathfrak{E}$, oder in Koordinatendarstellung

$$H_1 = 0, \quad H_2 = -\frac{v}{c} E_3, \quad H_3 = +\frac{v}{c} E_2,$$

bekommen wir nach (38b):

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \beta^2 (E_2^2 + E_3^2) = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} (E_2'^2 + E_3'^2)$$

und folglich

$$T = \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{8\pi} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV' = \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{2}{3} U_0,$$

d. h.

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{2} m v^2. \tag{44}$$

Der Umstand, daß diese Größe mit der kinetischen Energie des Elektrons nicht übereinstimmt, kann man zunächst dadurch erklären, daß die elektrische Energie eines bewegten Elektrons U von der entsprechenden Ruhenergie U_0 verschieden ist. Wir sollten deshalb erwarten, daß $T^* = T + U - U_0$ ist. Dies ist aber auch nicht der Fall. Sondern nach (38b) haben wir:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \left(E_1^2 + \frac{E_2'^2 + E_3'^2}{1-\beta^2} \right) \sqrt{1-\beta^2}\, dV'$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sqrt{1-\beta^2} \int E_1'^2 dV' + \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV' = \frac{1}{3} U_0 \left(\sqrt{1-\beta^2} + \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

und folglich

$$W = U + T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - v^2/c^2} \right). \tag{44a}$$

Die Differenz $W - U_0$ ist also nicht gleich T^*. Im Grenzfalle sehr großer, der Lichtgeschwindigkeit nahekommender Geschwindigkeiten fällt die elektromagnetische Energie (44a) mit der oben definierten Größe W^* zusammen. Dagegen bekommen wir für $v = 0$ $W^* = c^2 m_0$ und $W = \frac{3}{4} m_0 c^2$. Die letzte Formel ist identisch mit (41) (denn für $v = 0$ wird $W = U_0$). Nach der allgemeinen Beziehung (32a) zwischen der Masse und der Energie des elektromagnetischen Feldes sollten wir aber nicht U_0,

sondern die Größe $W_0^* = m_0 c^2$ als die Energie des Elektrons im Ruhezustand betrachten. Dementsprechend hätte die nach der allgemeinen Gleichung (43) bestimmte Größe W^* die Bedeutung der vollständigen Energie des Elektrons bei (konstanter) Geschwindigkeit v.

Diese Unstimmigkeiten scheinen mit der unserer Rechnung zugrunde liegenden Kontraktionshypothese unmittelbar verknüpft zu sein. Denn die Annahme, daß ein bewegtes Elektron sich in der Bewegungsrichtung komprimiert, führt eine eigenartige durch die allgemeinen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes nicht übersehbare Abhängigkeit dieses Feldes von der Geschwindigkeit des Elektrons als Ganzes herbei. Auf diese Frage werden wir noch später zurückkommen. — Es sei hier bemerkt, daß die auf Grund des *Lorentz*schen Bewegungsprinzips und der Kontraktionshypothese aufgestellten Gleichungen (41b) und (42) in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den Erfahrungstatsachen über die Ablenkung der frei beweglichen Elektronen (in den Kathodenstrahlen z. B.) durch elektrische und magnetische Kräfte stehen. Dagegen führt die *Abraham*sche Vorstellung des absolut starren Elektrons zu einer Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, die für große Geschwindigkeiten völlig versagt. Auf die *Abraham*sche Theorie, die heute nur noch historisches Interesse besitzt, wollen wir hier nicht eingehen; wir werden aber sofort zeigen, daß die *Lorentz*sche Formel (41b) aus ganz allgemeinen Prinzipien, ohne irgendwelche spezielle Vorstellungen über die Beschaffenheit des Elektrons abgeleitet werden kann.

Diese Prinzipien sind erstens das durch die Formel (32a) ausgedrückte *Äquivalenzgesetz zwischen Masse und Energie* und zweitens die allgemeine Form der Bewegungsgleichung (42), d. h. die Darstellbarkeit der Bewegungsgröße als Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Da die Arbeit der äußeren Kraft $\mathfrak{F}^a$ gleich der Zunahme der Energie des Elektrons sein muß, so folgt aus den obigen Prinzipien

$$\frac{d}{dt}(c^2 m) = \mathfrak{v}\frac{d(m\mathfrak{v})}{dt}$$

d. h. mit $v = c\beta$

$$dm = \frac{1}{2} m d(\beta^2) + \beta^2 dm$$

oder

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{2}\frac{d(\beta^2)}{1-\beta^2}.$$

Durch Integration dieser Gleichung bekommen wir

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d. h. die *Lorentz*sche Formel.

Nach der dargelegten Theorie muß man die Gleichung $\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{F}^a$ als die angenäherte Form einer verwickelteren Bewegungsgleichung

ansehen, die nur für den Grenzfall kleiner Beschleunigungen genaue Gültigkeit besitzt. Hätten wir bei der Berechnung von $\mathfrak{G}$ noch die Beschleunigung des Elektrons berücksichtigt, so würden wir eine Gleichung erhalten, in welcher neben der Trägheitskraft $-\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v})$ noch die Dämpfungskraft auftreten würde. Um aber diese Kraft genau zu bestimmen, würde es nötig sein, gewisse Voraussetzungen über die Abhängigkeit der Elektronengestalt nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern auch von der Beschleunigung zu machen. Ein solcher Weg zur Aufstellung der exakten Bewegungsgleichung scheint aber von vornherein ungangbar.

§ 7. Die Rotationsbewegung eines kugelförmigen Elektrons.

Sofern das Elektron als ein starrer oder quasi-starrer Körper betrachtet wird, kann man neben seiner Translationsbewegung auch die prinzipiell mögliche *Rotationsbewegung* um eine durch seinen Mittelpunkt gehende freie Achse untersuchen, sowie die Änderung, welche diese Rotationsbewegung durch Einwirkung äußerer *Drehkräfte* erleiden muß.

Die Rotation eines kugelsymmetrischen Elektrons um irgendeine freie Achse mit konstanter Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bedeutet offenbar eine *stationäre* Elektrizitätsströmung. Wenn also dabei keine Änderung der Ladungsverteilung im Elektron auftritt, und speziell seine Gestalt erhalten bleibt — was wir im folgenden immer voraussetzen werden, — so muß sein elektrisches Feld unverändert bleiben und sein magnetisches Feld zeitlich konstant und der Drehgeschwindigkeit proportional sein. Daraus folgt, daß diese Drehgeschwindigkeit beliebig groß sein kann, und daß die Lineargeschwindigkeit der äquatorialen Zone des Elektrons durch die Lichtgeschwindigkeit nicht beschränkt zu werden braucht.

In dem allgemeinen Fall einer beliebigen Ladungsverteilung drückt sich das magnetische Moment des Elektrons durch die Formel

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\int \mathfrak{r} \times \varrho \frac{\mathfrak{v}}{c} dV,$$

($\mathfrak{r}$ — Radiusvektor des Volumelementes dV bezüglich des Mittelpunktes O). Setzt man hier $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{r}$ ein, so wird

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\int \varrho \{\mathfrak{u} r^2 - \mathfrak{r}^2 (\mathfrak{u}\mathfrak{r})\} dV,$$

oder bei kugelsymmetrischer Verteilung der Ladung, wegen

$$\overline{\mathfrak{r}_0 (\mathfrak{u}\mathfrak{r}_0)} = \mathfrak{u}\,\overline{\cos^2 (\mathfrak{u}, \mathfrak{r}_0)} = \frac{1}{3}\mathfrak{u}$$

[vgl. die Ableitung von (17a)],

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{u}}{3c}\int \varrho\, r^2\, dV. \qquad (45)$$

Im Falle der Flächenladung ergibt sich speziell die schon bekannte

Formel (vgl. § 7, Kap. IV)

$$\mathfrak{m} = \frac{e a^2}{3c} \mathfrak{u}\,, \tag{45a}$$

wo a den Radius des Elektrons bedeutet. Bei gleichförmig verteilter Volumladung (ϱ = konst) bekommen wir mit $dV = 4\pi r^2 dr$

$$\mathfrak{m} = \frac{e a^2}{5c}\,. \tag{45b}$$

Der Einfachheit halber werden wir uns im folgenden auf den Fall der Flächenladung beschränken. Dabei ist das elektrische Feld innerhalb des Elektrons gleich Null, und außerhalb identisch mit dem Feld einer in O konzentrierten Punktladung, also gleich

$$\mathfrak{E} = \frac{e \mathfrak{r}_0}{r^2}\,. \tag{46}$$

Das magnetische Feld im Außenraum ist äquivalent dem Feld eines elementaren magnetischen Dipols in O

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{r^2}\{3(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{m}\}\,. \tag{46a}$$

Innerhalb des Elektrons dagegen herrscht ein homogenes Feld

$$\mathfrak{H} = \frac{2\mathfrak{m}}{a^3} \tag{46b}$$

[vgl. § 7, Kap. V].

Befindet sich das betrachtete Elektron in einem äußeren magnetischen Feld, dessen Feldstärke $\mathfrak{H}^a$ innerhalb des entsprechenden sehr kleinen Raumgebiets als konstant angesehen werden darf, so muß es eine Drehkraft erfahren mit dem Moment

$$\mathfrak{M}^a = \mathfrak{m} \times \mathfrak{H}^a\,. \tag{47}$$

Bei stark inhomogenem Felde muß man noch die Zusatzkraft

$$\mathfrak{F}^a = (\mathfrak{m}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}^a \tag{47a}$$

berücksichtigen.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der *inneren Drehkraft* über, die durch eine ungleichförmige Rotation des Elektrons bedingt werden kann. Dabei werden wir zur Berechnung dieser „Selbstdrehkraft" eine indirekte[1]) Methode benutzen, die sich an die entsprechende Methode für die Bestimmung der Selbstkraft anschließt. Zunächst wollen wir zeigen, daß eine solche Methode sich tatsächlich angeben läßt.

Dazu betrachten wir das Drehmoment einer Kraft $d\mathfrak{F} = \mathfrak{f} dV$, die auf das Volumelement dV wirkt, in bezug auf irgendeinen Punkt O (z. B. den Mittelpunkt des Elektrons). Nach der allgemeinen Formel (30) kann man dabei die auf die Volumeinheit bezogene Kraft $\mathfrak{f}$ in der Form

$$\mathfrak{f} = -\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} - \mathrm{div}\,{}^2\mathfrak{T} \tag{48}$$

[1]) auch von *Abraham* herrührende.

darstellen [vgl. (31a) wo $\mathfrak{f} = 0$ gesetzt wurde]. Durch äußere Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathfrak{r}$ (Radiusvektor von dV) bekommen wir das zugehörige Drehmoment

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{f} = -\mathfrak{r} \times \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} - \mathfrak{r} \times \operatorname{div} {}^2\mathfrak{T}.$$

Da $\mathfrak{r}$ von t unabhängig ist, so kann man $\mathfrak{r} \times \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}$ setzen. Ferner gilt wegen der Symmetrie des Tensors ${}^2\mathfrak{T}$

$$(\mathfrak{r} \times \operatorname{div} {}^2\mathfrak{T})_1 = x_2 \operatorname{div} T_3 - x_3 \operatorname{div} T_2 = x_2 \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right)$$
$$- x_3 \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 T_{31}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 T_{32})$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2 T_{33}) - \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 T_{21}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 T_{22}) - \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 T_{23}),$$

d. h.

$$(\mathfrak{r} \times \operatorname{div} {}^2\mathfrak{T})_1 = \operatorname{div} (\mathfrak{r} \times {}^2\mathfrak{T})_1.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{r} \times {}^2\mathfrak{T}$ einen asymmetrischen Tensor ${}^2\mathfrak{N}$ mit den Komponenten

$N_{11} = x_2 T_{31} - x_3 T_{21}$, $N_{22} = x_3 T_{12} - x_1 T_{32}$, $N_{33} = x_1 T_{23} - x_2 T_{13}$,
$N_{12} = x_2 T_{32} - x_3 T_{22}$, $N_{21} = x_3 T_{11} - x_1 T_{31}$, usw.

oder im allgemeinen

$$N_{ik} = (\mathfrak{r} \times \mathfrak{T}_k)_i \qquad (49)$$

($\mathfrak{T}_k$ ist der Vektor mit den Komponenten T_{k1}, T_{k2}, T_{k3}; vgl. Einleitung § 20).

Es wird also:

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{g}) - \operatorname{div} {}^2\mathfrak{N} \qquad (49a)$$

und folglich für ein beliebiges Volumen

$$\int \mathfrak{r} \times \mathfrak{f}\, dV = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}\, dV - \int {}^2\mathfrak{N}\, \mathfrak{n}\, dS. \qquad (49b)$$

Man könnte den Tensor ${}^2\mathfrak{N}$ in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen zerlegen und letzteren durch einen Vektor ersetzen; dies ist aber unnötig, denn im folgenden werden wir diesen Tensor gar nicht brauchen. Wir werden nämlich nur *den* Teil des „inneren" oder „Selbstdrehmoments" $\mathfrak{M}$ untersuchen, der von der Winkelbeschleunigung des Elektrons, d. h. nur von der ersten Ableitung des Vektors $\mathfrak{u}$ nach der Zeit (und außerdem von der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$) abhängt. Dabei können wir nach (49b) die Größen $\mathfrak{g}$ und ${}^2\mathfrak{T}$ für eine Rotation des Elektrons mit konstanter Winkelgeschwindigkeit berechnen; da aber in diesem Falle die Tensorkomponenten T_{ik} wie die Quadrate der elektrischen und magnetischen Feldstärken abnehmen, d. h. nach (46) und (46a) wenigstens umgekehrt proportional zur 4-ten Potenz des Abstandes, und folglich die Komponenten von ${}^2\mathfrak{N}$ umgekehrt proportional zur 3-ten Potenz, so fällt das Flächenintegral in (49b) bei

Verschiebung der Oberfläche S ins Unendliche weg und wir bekommen die folgende einfache Gleichung

$$\mathfrak{M} = -\frac{d\mathfrak{J}}{dt} \tag{50}$$

mit

$$\mathfrak{J} = \int \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}\, dV . \tag{50a}$$

Der Vektor $\mathfrak{J}$ heißt *das elektromagnetische Impulsmoment* des Elektrons. Auf dieselbe Weise wird es für ein beliebiges elektromagnetisches Feld definiert.

Zur Berechnung dieses Vektors bemerken wir, daß innerhalb des Elektrons $\mathfrak{E}$ und folglich $\mathfrak{g}$ verschwindet, während im Außenraum nach (46) und (46a),

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \frac{e}{4\pi c}\frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{r}_0}{r^5} \tag{51}$$

ist. Es wird also

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{g} = \frac{e}{4\pi c}\frac{\mathfrak{m} - \mathfrak{r}_0(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)}{r^4}$$

und mit Rücksicht auf den schon einige Male benutzten Umstand, daß der Mittelwert des Vektors $\mathfrak{r}_0(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)$ für alle Richtungen des Einheitsvektors $\mathfrak{r}_0$ gleich $\frac{1}{3}\mathfrak{m}$ ist,

$$\mathfrak{J} = \frac{e\mathfrak{m}}{4\pi c} \cdot \frac{2}{3}\int_a^\infty \frac{dV}{r^4} = \frac{2e\mathfrak{m}}{3c}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} ,$$

d. h.

$$\mathfrak{J} = \frac{2}{3}\frac{e}{ca}\mathfrak{m} . \tag{51a}$$

Führt man hier statt des Radius des Elektrons seine Ruhmasse m_0 nach der Formel

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e}{c^2 a} ,$$

die der Flächenladung entspricht, ein, so ergibt sich die folgende Beziehung

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{cm_0}\mathfrak{J} . \tag{51b}$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß bei gleichförmiger Volumladung $\mathfrak{J} = \frac{4}{7}\frac{e}{ca}\mathfrak{m}$ ist[1]), oder, da man in diesem Falle $m_0 = \frac{4}{5}\frac{e^2}{c^2 a}$ hat,

$$\mathfrak{m} = \frac{7}{5}\frac{e}{cm_0}\mathfrak{J} ,$$

[1]) Die magnetische Feldstärke innerhalb des Elektrons im Abstande r vom Mittelpunkt setzt sich dabei aus zwei Teilen zusammen. Der Teil $\mathfrak{H}'$, welcher von der inneren Kugel vom Radius r erzeugt wird, drückt sich durch die Formel (46a) aus, wobei das totale magnetische Moment $\mathfrak{m}$ durch das Moment $\mathfrak{m}_r$ der erwähnten Kugel zu ersetzen ist; letzteres ist aber nach (45b) gleich $\frac{1}{5}\frac{e_r r^3}{c}\mathfrak{u}$, wo $e_r = e\frac{r^3}{a^3}$ die Ladung dieser Kugel bedeutet. Der zweite Anteil, der von der äußeren Kugel-

Der Ausdruck (51a) für $\mathfrak{J}$ läßt sich mit Rücksicht auf die Formel (45a) in der Form

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{3} m_0 a^2 \mathfrak{u} \tag{52}$$

schreiben. Dies entspricht einem „Trägheitsmoment" des Elektrons von dem Betrage $\frac{1}{3} m_0 a^2$. Es sei zum Vergleich bemerkt, daß das Trägheitsmoment einer Hohlkugel mit derselben Masse (m_0) sich doppelt so groß ergibt. Um die Beziehung zwischen den gewöhnlichen mechanischen und den elektromagnetischen Größen, welche die Rotationsbewegung charakterisieren, festzustellen, wollen wir noch die magnetische Energie des Elektrons berechnen. Der im Außenraum lokalisierte Anteil dieser Energie ist gegeben durch das Integral

$$T' = \frac{1}{8\pi} \int_{r=a}^{\infty} \frac{1}{r^6} \{9(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)^2 r_0^2 - 6(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)^2 + m^2\} dV,$$

oder, da $r_0^2 = 1$ und der Mittelwert von $(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)^2$ gleich $\frac{1}{3}\mathfrak{m}^2$ ist,

$$T' = \frac{1}{8\pi} \cdot 2\mathfrak{m}^2 \int_a^r \frac{4\pi r^2 dr}{r^6} = \frac{\mathfrak{m}^2}{3a^3}$$

Das magnetische Feld innerhalb des Elektrons gibt zu seiner Energie den Beitrag

$$T'' = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2\mathfrak{m}}{a^3}\right)^2 \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{m}^2}{a^3}$$

Es wird folglich

$$T' + T'' = T = \frac{\mathfrak{m}^2}{a^3}, \tag{52a}$$

oder nach (45a)

$$T = \frac{1}{9} \frac{e^2 a^2}{c^2 a} \mathfrak{u}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_0 a^2\right) \mathfrak{u}^2. \tag{52b}$$

Wir bekommen also den gewöhnlichen Ausdruck für die kinetische Energie eines rotierenden Körpers mit dem Trägheitsmoment $\frac{1}{3} m_0 a^2$.

---

schale herrührt, wird nach (45) und (46b) durch das Integral

$$\mathfrak{H}'' = \int_r^a \frac{2\mathfrak{u}}{3cr^3} r^2 \cdot 4\pi \varrho r^2 dr = \frac{2\mathfrak{u}}{3c} 4\pi\varrho \int_r^a r dr = \frac{e\mathfrak{u}}{a^3}(a^2 - r^2)$$

dargestellt, so daß für die Summe $\mathfrak{H}' + \mathfrak{H}''$ sich der folgende Wert ergibt:

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{5ca^3} \{3(\mathfrak{r}\mathfrak{u})\mathfrak{r} - \mathfrak{u} r^2 + 5(a^2 - r^2)\mathfrak{u}\} = \frac{1}{a^5} \{3(\mathfrak{r}\mathfrak{m})\mathfrak{r} + (5a^2 - 6r^2)\mathfrak{m}\}$$

Was das elektrische Feld betrifft, so wird es für $r < a$ durch die Formel $\mathfrak{E} = \frac{e\mathfrak{r}}{a^3}$ bestimmt. Daraus läßt sich leicht berechnen, daß der von dem inneren elektromagnetischen Feld des Elektrons herrührende Anteil des Impulsmomentes gleich $-\frac{2}{21}\frac{e}{ca}\mathfrak{m}$ ist. Der andere (äußere) Anteil drückt sich offenbar durch (52a) aus. In Summa bekommen wir also $\mathfrak{J} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{21}\right)\frac{e}{ca}\mathfrak{m} = \frac{4}{7}\frac{e}{ca}\mathfrak{m}$.

Die Rotationsbewegung des Elektrons unter der Wirkung einer äußeren Drehkraft mit dem Moment $\mathfrak{M}^a$ wird nach dem *Lorentz*schen Bewegungsprinzip durch die Gleichung $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}^a = 0$ bestimmt, d. h. nach (50) durch

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \mathfrak{M}^a \tag{53}$$

in vollkommener Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Mechanik. Diese Gleichung wollen wir noch in der Form

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\mathfrak{m}}{dt} = \mathfrak{M}^a \tag{53a}$$

und

$$I\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{M}^a \tag{53b}$$

schreiben, mit den Abkürzungen

$$\varkappa = \frac{e}{cm_0}, \tag{54}$$

$$I = \frac{1}{3}m_0 a^2. \tag{54a}$$

Der Koeffizient $\varkappa$ stellt dabei das Verhältnis des magnetischen Moments des Elektrons zu seinem Impulsmoment dar und I bedeutet das Trägheitsmoment.

Hängt das Drehmoment $\mathfrak{M}^a$ von einem äußeren magnetischen Feld $\mathfrak{H}^a$ ab, so bekommen wir nach (47)

$$\frac{d\mathfrak{m}}{dt} = \varkappa\mathfrak{m} \times \mathfrak{H}^a. \tag{55}$$

Durch innere Multiplikation der beiden Seiten dieser Gleichung mit $\mathfrak{m}$ ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{m}^2 = 0,$$

d. h. $|\mathfrak{m}| = \text{konst.}$

Für ein zeitlich konstantes äußeres Feld folgt auf dieselbe Weise

$$\mathfrak{H}^a\frac{d}{dt}\mathfrak{m} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{m}\mathfrak{H}^a) = 0,$$

d. h. der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{H}^a$ bleibt auch konstant.

Man kann leicht zeigen, daß die Bewegung des Elektrons sich in diesem Falle zusammensetzt aus der „ungestörten" Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und aus einer gleichförmigen Rotation oder *Präzession* des Vektors $\mathfrak{u}$ um die Feldrichtung $\mathfrak{H}^a$ mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = -\varkappa\mathfrak{H}^a. \tag{55a}$$

In der Tat, die zeitliche Ableitung des Vektors $\mathfrak{u}$ muß dabei gleich der linearen Geschwindigkeit eines Punktes mit dem Radiusvektor $\mathfrak{u}$ sein, d. h. $\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{u}$. Ebenso haben wir $\frac{d\mathfrak{m}}{dt} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{m}$; diese Gleichung stimmt wegen (55a) mit (55) überein.

§ 8. Kombination der Rotations- und Translationsbewegung.

Wir wollen nun den Fall untersuchen, daß das rotierende Elektron sich gleichzeitig mit einer *geringen Translationsgeschwindigkeit* $\mathfrak{v}$ ($v \ll c$) bewegt. Bei Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes $\mathfrak{E}^a$ muß es dabei eine zusätzliche äußere Drehkraft (und Kraft) erleiden. Wir wollen diese zunächst auf Grund der Annahme bestimmen, daß das rotierende Elektron hinsichtlich seiner magnetischen Wirkungen *vollkommen äquivalent* einem magnetischen Dipol ist. (Wir werden unten — Kap. IX, § 2 — sehen, daß diese Annahme in Wirklichkeit unzutreffend ist; dementsprechend sind die daraus folgenden Formeln auch falsch).

Ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegter magnetischer Pol μ muß in einem äußeren Felde $\mathfrak{H}^a$, $\mathfrak{E}^a$, nach (12a), Kap. V die Kraft $\mu\left(\mathfrak{H}^a - \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}^a\right)$ erleiden; es ergeben sich folglich für das betrachtete Ersatzdipol zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die sich zu einem resultierenden Drehmoment $\mathfrak{l} \times \left[\mu\left(\mathfrak{H}^a - \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}^a\right)\right]$ zusammensetzen. Dabei bedeutet $\mathfrak{l}$ die Länge des Dipols (vom negativen Pol — μ zum positiven + μ gerechnet). Das Produkt $\mu\mathfrak{l}$ ist nichts anderes als das magnetische Moment des Elektrons $\mathfrak{m}$. Wir bekommen also neben dem magnetischen Drehmoment (47) noch das elektrische

$$\mathfrak{M}^a = -\mathfrak{m} \times \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}^a\right). \tag{57}$$

Bei stark inhomogenem Feld muß man auch die zusätzliche äußere Kraft

$$\mathfrak{F}^a = (\mathfrak{m}\,\mathrm{grad})\left(\mathfrak{E}^a \times \frac{\mathfrak{v}}{c}\right) = -\frac{\mathfrak{v}}{c} \times [(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E}^a] \tag{57a}$$

berücksichtigen.

Es treten aber in dem betrachteten Falle zusätzliche *innere* Kräfte und Drehkräfte auf, welche von dem durch die Kombination der Rotation und Translation hervorgerufenen elektromagnetischen Feld herrühren.

Zunächst bestimmen wir das magnetische Feld $\mathfrak{H}^v$, das der reinen Translation entspricht. Dieses Feld ist bei konstanter Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit dem elektrischen Grundfeld $\mathfrak{E}$ des Elektrons durch die allgemeine, schon vielfach benutzte Beziehung

$$\mathfrak{H}^v = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E} \tag{58}$$

verknüpft. Innerhalb des Elektrons verschwindet dieses Feld ebenso wie $\mathfrak{E}$ und außerhalb reduziert es sich nach (46) auf das magnetische Feld einer im Mittelpunkt des Elektrons konzentrierten Ladung e.

Dazu kommt aber noch ein zusätzliches *elektrisches* Feld $\mathfrak{E}^m$, welches von der Kombination der beiden Bewegungsarten herrührt. Dieses Feld läßt sich auf die Tatsache zurückführen, daß die elektrische Strömung, welche die „Rotation" des Elektrons bildet, bei Zusammensetzung

mit der Translationsbewegung *ihren stationären Charakter verliert.* In der Tat, die durch die Rotation erzeugte magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ muß dabei in jedem festgehaltenem Aufpunkt P sich mit der Zeit ändern. Dasselbe gilt offenbar auch für das zugehörige Vektorpotential $\mathfrak{A}$, mit welchem $\mathfrak{H}$ durch die Formel $\mathfrak{H} = \text{rot}\,\mathfrak{A}$ verknüpft ist. Einer zeitlichen Änderung des Vektorpotentials entspricht aber ein zusätzliches elektrisches Feld

$$\mathfrak{E}^m = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}.$$

Da in einem mitbewegten, d. h. bezüglich des Elektrons (abgesehen von seiner Rotation) festen Aufpunkte die Feldstärken und die Potentiale konstant bleiben, so haben wir, ebenso wie im Falle der einfachen Translation [vgl. (16a) Kap. VI], die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\text{grad})\mathfrak{A} = 0$$

d. h.

$$-\frac{\partial \mathfrak{A}}{c\partial t} = +\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\text{grad}\right)\mathfrak{A}$$

oder nach der Identität (27) Einleitung,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \text{grad}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{A}\right) - \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}.$$

Das elektrische Zusatzfeld $\mathfrak{E}^m$ setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen:

$$\mathfrak{E}' = -\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H} \tag{58a}$$

und

$$\mathfrak{E}'' = \text{grad}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{A}\right). \tag{58b}$$

Die Formel (58a) ist ganz analog zu (58); sie entspricht vollkommen den „magnetischen" Differentialgleichungen (11a), (11b) Kap. V und ergibt sich daraus auf dieselbe Weise wie (58), wenn man die Existenz von magnetischen Polen zuläßt [entgegengesetzte Vorzeichen in (58) und (58a) entsprechen den entgegengesetzten Vorzeichen von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}^*$ in (8a) und (11b), Kap. V]. Insofern das rotierende Elektron hinsichtlich seiner magnetischen Wirkungen durch einen magnetischen Dipol ersetzt werden kann, muß die Translationsbewegung dieses Dipols auf dieselbe Weise das Zusatzfeld (58a) hervorrufen, wie die Translation der Elektronenladung das Zusatzfeld (58).

Diese symmetrische (oder „schiefsymmetrische") Beziehung zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern wird aber zerstört durch das Auftreten des zweiten Anteiles von $\mathfrak{E}^m$, d. h. des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}''$. Letzteres kann behandelt werden als ein gewöhnliches elektrostatisches Feld, das von dem skalaren Potential

$$\varphi'' = -\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{A} \tag{59}$$

herrührt. In dem betrachteten Fall ist das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ im Außenraum ($r > a$) durch die Formel

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{r}_0}{r^2} \tag{59a}$$

bestimmt [vgl. (27), Kap. III]; dagegen haben wir innerhalb des Elektrons [vgl. § 7, Kap. IV]

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{m} \times \mathfrak{r}}{a^3}. \tag{59b}$$

Es wird also für $r > a$, wegen $\mathfrak{v}(\mathfrak{m} \times \mathfrak{r}_0) = \mathfrak{r}_0(\mathfrak{v} \times \mathfrak{m})$,

$$\varphi'' = \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}_0}{r^2}, \tag{60}$$

mit

$$\mathfrak{p} = -\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m} \tag{60a}$$

Daraus folgt, daß φ'' (für $r > a$) das skalare Potential eines Dipols mit dem elektrischen Moment $\mathfrak{p}$ darstellt, der sich im Mittelpunkt des Elektrons befindet. Für das Elektroneninnere bekommen wir auf dieselbe Weise

$$\varphi'' = \frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}}{a^3}. \tag{60b}$$

Wir haben im Kap. IV, § 7 gesehen, daß die Potentiale (60) und (60b) außerhalb bzw. innerhalb einer Kugel mit dem Radius a durch eine insgesamt verschwindende Flächenladung erzeugt werden können, die auf der Kugeloberfläche mit der Dichte

$$\eta = p \cos\theta \quad (\theta \sphericalangle \mathfrak{p},\ \mathfrak{r}) \tag{60c}$$

verteilt ist. — Wir werden unten (Kap. X) auf Grund der Relativitätstheorie zeigen, daß in Wirklichkeit die Translationsbewegung des rotierenden Elektrons von einer kleinen Änderung der Ladungsverteilung auf seiner Oberfläche (oder in seinem Innern) begleitet sein muß, die dem Auftreten einer zu (60c) genau entgegengesetzten Ladungsverteilung äquivalent ist. Durch diese zusätzliche Ladungsverteilung oder *Polarisation* des Elektrons wird das Feld $\mathfrak{E}''$ aufgehoben und das zusätzliche elektrische Feld $\mathfrak{E}^m$ auf seinen ersten Anteil $\mathfrak{E}'$ reduziert.

Der vollständige Wert der elektromagnetischen Bewegungsgröße (pro Volumeinheit)

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'') \times (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^v)$$

setzt sich zusammen aus dem früher berechneten Vektor $\mathfrak{g}^{(0)} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$, den Zusatzgliedern erster Ordnung in v/c

$$\mathfrak{g}^v = \frac{1}{4\pi c}\,\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}^v, \quad \mathfrak{g}' = \frac{1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}' \times \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{g}'' = \frac{1}{4\pi c}\,\mathfrak{E}'' \times \mathfrak{H}$$

und einem Zusatzglied zweiter Ordnung $\frac{1}{4\pi c}(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'') \times \mathfrak{H}^v$, das wir vernachlässigen dürfen.

Das Glied $\mathfrak{g}^v$ entspricht der reinen Translation ohne Rotationsbewegung, und ist schon im vorigen Paragraphen bei der Berechnung der

Trägheitskraft berücksichtigt worden. Wir wollen jetzt sehen, welche Beiträge zu dieser Kraft und folglich zu der *Elektronenmasse*, von $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ herrühren (das dem Falle $\mathfrak{v} = 0$ entsprechende Glied $\mathfrak{g}^{(0)}$ bleibt dabei belanglos). Nach (58a) gilt:

$$\mathfrak{g}' = \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{H} \times \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}\right) = \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\mathfrak{v}H^2 - \mathfrak{H}(\mathfrak{v}\mathfrak{H})\right\}.$$

Das erste Glied in der geschweiften Klammer liefert bei Integration über den ganzen Raum den Betrag $\frac{2\mathfrak{v}}{c^2}T$, wo $T = \frac{1}{8\pi}\int H^2 dV$ die schon berechnete Größe (52a) (magnetische Energie für $v = 0$) ist. Für das zweite Glied bekommen wir nach (46a) bei $r > a$ den Ausdruck

$$-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{1}{r^6}\left\{9(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)^2(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0 - 3(\mathfrak{m}\mathfrak{v})(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0 - 3(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}\mathfrak{v})\mathfrak{m}\right\}.$$

Zur Berechnung der Mittelwerte der hier auftretenden Größen über alle Richtungen des Einheitsvektors $\mathfrak{r}_0$ merken wir zunächst die folgenden Formeln an, welche für die rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{r}_0$, d. h. für seine Richtungskosinus r_1, r_2, r_3 gelten:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1; \quad \overline{r_\alpha^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{r_\alpha r_\beta} = 0 \ (\text{für } \alpha \neq \beta).$$

Ferner

$$\overline{(\sum_\alpha r_\alpha^2)^2} = 1 = 3\overline{r_\alpha^4} + 6\overline{r_\alpha^2 r_\beta^2},$$

und

$$\overline{r_\alpha r_\beta r_\gamma r_\delta} = 0,$$

wenn die vier Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht paarweise gleich sind. Für den Mittelwert von r_α^4 erhalten wir

$$\overline{r_\alpha^4} = \overline{\cos^4\theta} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \cos^4\theta \cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} r_\alpha^4 dr_\alpha = \frac{1}{5};$$

folglich wird $\overline{r_\alpha^2 r_\beta^2} = \frac{1}{15}$.

Nun ist

$$\overline{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0)} = \sum_\alpha\sum_\beta m_\alpha v_\beta \overline{r_\alpha r_\beta} = \frac{1}{3}\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha = \frac{1}{3}(\mathfrak{m}\mathfrak{v})$$

$$\overline{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)r_\alpha} = \sum_\beta m_\beta \overline{r_\beta r_\alpha} = \frac{1}{3}m_\alpha, \qquad \text{d. h.} \quad \overline{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0} = \frac{1}{3}\mathfrak{m}$$

$$\begin{aligned}\overline{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)^2(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0)r_\alpha} &= \sum_\beta\sum_\gamma\sum_\delta m_\beta m_\gamma v_\delta \overline{r_\alpha r_\beta r_\gamma r_\delta} \\ &= m_\alpha^2 v_\alpha \overline{r_\alpha^4} + \sum_{\beta\neq\alpha} m_\beta^2 v_\alpha \overline{r_\alpha^2 r_\beta^2} + 2\sum_{\gamma\neq\alpha} m_\alpha m_\gamma v_\gamma \overline{r_\alpha^2 r_\gamma^2} \\ &= \frac{1}{5}m_\alpha^2 v_\alpha + \frac{1}{15}(\mathfrak{m}^2 - m_\alpha^2)v_\alpha + \frac{2}{15}\{(\mathfrak{m}\mathfrak{v}) - m_\alpha v_\alpha\}m_\alpha \\ &= \frac{1}{15}\{\mathfrak{m}^2 v_\alpha + 2(\mathfrak{m}\mathfrak{v})m_\alpha\},\end{aligned}$$

d. h.

$$\overline{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)^2(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0} = \frac{1}{15}\{\mathfrak{m}^2\mathfrak{v} + 2(\mathfrak{m}\mathfrak{v})\mathfrak{m}\}.$$

Durch Einführung dieser Mittelwerte in den obigen Ausdruck, Multiplikation mit $4\pi r^2 dr$ und Integration von a bis ∞, bekommt man nach leichter Rechnung

$$-\frac{1}{15c^2a^3}\{3\mathfrak{m}^2\mathfrak{v}+(\mathfrak{m}\mathfrak{v})\mathfrak{m}\}.$$

Es wird folglich für den Außenraum ($r > a$)

$$\int_{r>a}\mathfrak{g}'dV=\frac{2\mathfrak{v}}{3c^2}\frac{\mathfrak{m}^2}{a^3}-\frac{1}{15c^2a^3}\{3\mathfrak{m}^2\mathfrak{v}+(\mathfrak{m}\mathfrak{v})\mathfrak{m}\}.$$

Für das Elektroneninnere ($r < a$) ergibt sich nach (46b)

$$\frac{1}{4\pi c^2}\mathfrak{H}(\mathfrak{v}\mathfrak{H})=\frac{4\mathfrak{m}(\mathfrak{m}\mathfrak{v})}{4\pi c^2a^6},$$

so daß der entsprechende Beitrag zur gesamten Bewegungsgröße $\mathfrak{G}'=\int\mathfrak{g}'dV$, durch $\frac{4\mathfrak{v}}{3c^2}\frac{\mathfrak{m}^2}{a^3}-\frac{4}{3c^2a^3}(\mathfrak{m}\mathfrak{v})\mathfrak{m}$ gegeben ist.

Schließlich wird

$$\mathfrak{G}'=\frac{9\mathfrak{m}^2}{5c^2a^3}\mathfrak{v}-\frac{7(\mathfrak{m}\mathfrak{v})}{5c^2a^3}\mathfrak{m}. \tag{61}$$

Wir sehen also, daß die betrachtete zusätzliche Bewegungsgröße zwar proportional, aber im allgemeinen *nicht parallel zur Geschwindigkeit ist*. Der erste dem Vektor $\mathfrak{v}$ parallele Anteil von $\mathfrak{G}'$ kann als eine gewöhnliche Bewegungsgröße behandelt werden, die sich zu der von der Ladung des Elektrons herrührenden Bewegungsgröße $\mathfrak{G}^0=m_0\mathfrak{v}$ einfach addiert. Dabei bekommen wir eine zusätzliche „magnetische" Masse

$$m'=\frac{9}{5}\frac{\mathfrak{m}^2}{c^2a^3}=\frac{9}{5}\frac{T^2}{c^2}, \tag{61a}$$

die nicht klein im Verhältnis zu der „elektrischen"

$$m_0=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2a}=\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}$$

zu sein braucht (siehe unten § 8).

Es sei bemerkt, daß der zweite dem Vektor $\mathfrak{m}$ parallele Anteil von $\mathfrak{G}'$ nur dann verschwindet, wenn das magnetische Moment des Elektrons senkrecht zu seiner Translationsgeschwindigkeit steht.

Die Bewegungsgröße $\mathfrak{G}''=\int\mathfrak{g}''dV$ läßt sich ganz einfach bestimmen. Und zwar haben wir für $r > a$ nach (60)

$$\mathfrak{E}''=\frac{1}{r^3}\{3(\mathfrak{p}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0-\mathfrak{p}\}$$

und folglich

$$\mathfrak{g}''=\frac{1}{4\pi c}\frac{1}{r^6}[3(\mathfrak{p}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0-\mathfrak{p}]\times[3(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)\mathfrak{r}_0-\mathfrak{m}]=$$

$$=-\frac{1}{4\pi c}\frac{1}{r^6}\{3(\mathfrak{p}\mathfrak{r}_0)(\mathfrak{r}_0\times\mathfrak{m})+3(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)(\mathfrak{p}\times\mathfrak{r}_0)-(\mathfrak{p}\times\mathfrak{m})\}.$$

Zur Berechnung des Mittelwertes des eingeklammerten Ausdrucks multiplizieren wir ihn (skalar) mit einem beliebigen festen Vektor $\mathfrak{l}$ und

schreiben das Produkt in der Form

$$3(\mathfrak{p}\mathfrak{r}_0)\,[(\mathfrak{m}\times\mathfrak{l})\mathfrak{r}_0] + 3(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)\,[(\mathfrak{l}\times\mathfrak{p})\mathfrak{r}_0] - (\mathfrak{p}\times\mathfrak{m})\mathfrak{l}.$$

Sein Mittelwert ergibt sich nach der Formel $\overline{(\mathfrak{m}\mathfrak{r}_0)(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0)} = \frac{1}{3}\mathfrak{m}\mathfrak{v}$ (siehe oben) zu

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{m}\times\mathfrak{l}) + \mathfrak{m}(\mathfrak{l}\times\mathfrak{p}) - \mathfrak{l}(\mathfrak{p}\times\mathfrak{m}) = \mathfrak{l}(\mathfrak{p}\times\mathfrak{m}).$$

Es wird somit

$$\overline{\mathfrak{g}''} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\mathfrak{l}}{r^6}\,\mathfrak{p}\times\mathfrak{m}$$

und für den ganzen Außenraum

$$\int \mathfrak{g}''\,dV = \int \overline{\mathfrak{g}''}\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\mathfrak{m}\times\mathfrak{p}}{3ca^3}.$$

Für das Elektroneninnere ($r < a$) haben wir nach (60b) und (46b)

$$\mathfrak{E}'' = -\frac{\mathfrak{p}}{a^3},$$

$$\mathfrak{g}'' = \frac{1}{4\pi c a^6}\,\mathfrak{m}\times\mathfrak{p}, \qquad \int \mathfrak{g}''\,dV = \frac{\mathfrak{m}\times\mathfrak{p}}{3ca^3},$$

also insgesamt

$$\mathfrak{G}'' = \frac{2}{3ca^3}\,\mathfrak{m}\times\mathfrak{p}$$

oder nach (60a)

$$\mathfrak{G}'' = -\frac{2\mathfrak{m}^2}{3c^2a^3}\,\mathfrak{v} + \frac{2}{3c^2a^3}(\mathfrak{m}\mathfrak{v})\,\mathfrak{m}. \tag{62}$$

Durch Addition von (61) und (62) bekommen wir

$$\mathfrak{G}^m = \frac{17}{15}\frac{\mathfrak{m}^2}{c^2a^3}\,\mathfrak{v} - \frac{11}{15}\frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{v})}{c^2a^3}\,\mathfrak{m}. \tag{62a}$$

Tatsächlich aber wird $\mathfrak{G}''$ durch die von der „Polarisation" des Elektrons herrührende Bewegungsgröße genau kompensiert, so daß die zusätzliche „magnetische" Bewegungsgröße und „magnetische" Masse durch die Formeln (61) und (61a) ausgedrückt werden.

Der merkwürdigen Tatsache, daß die Bewegungsgröße eines rotierenden oder „magnetischen" Elektrons der Translationsgeschwindigkeit nicht parallel ist, entspricht eine durch diese Geschwindigkeit erzeugte Selbstdrehkraft $\mathfrak{M}$, welche die magnetische Achse senkrecht zur Bewegungsrichtung einzustellen strebt; bei dieser Einstellung wird die Bewegungsgröße mit der Geschwindigkeit gleichgerichtet und der Vektor $\mathfrak{M}$ verschwindet.

In der Tat gilt nach der allgemeinen Formel (50)

$$\mathfrak{M} = -\frac{d\mathfrak{J}}{dt}.$$

Es sei daran erinnert, daß der in dem Ausdruck (50a) für $\mathfrak{J}$ vorkommende Radiusvektor $\mathfrak{r}$ sich auf einen *festgehaltenen* Punkt beziehen muß. Will man also die Differentiation nach der Zeit auf mitbewegte Aufpunkte (Volumelemente) beziehen — wobei $\mathfrak{g}$ als eine konstante Größe anzu-

sehen ist — so muß man $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$ setzen. Es wird also

$$\mathfrak{M} = -\int \mathfrak{v} \times \mathfrak{g}\, dV = -\mathfrak{v} \times \int \mathfrak{g}\, dV,$$

d. h.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{v}. \tag{63}$$

Diese Formel zeigt, daß $\mathfrak{M}$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{v}$ nicht parallele Komponente hat. Setzt man hier $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ ein, so ergibt sich nach (61)

$$\mathfrak{M}' = \frac{7}{5} \frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{v})(\mathfrak{v} \times \mathfrak{m})}{c^2 a^3}. \tag{63a}$$

Wäre der Ausdruck (62a) richtig, so müßte der vollständige Wert von $\mathfrak{M}$ gleich

$$\mathfrak{M} = \frac{11}{15} \frac{(\mathfrak{m}\mathfrak{v})}{c^2 a^3} (\mathfrak{v} \times \mathfrak{m}) \tag{63b}$$

sein.

§ 9. Die Magnetonen.

Die neuesten Forschungen auf dem Gebiete der optischen und magnetischen Eigenschaften der Atome haben die schon manchmal[1]) ausgesprochene Vermutung, daß die Elektronen um ihre eigene Achse rotieren — oder, genauer, *ein magnetisches Moment haben* — jedenfalls für negative Elektronen außer jeden Zweifel gesetzt[2]). Die dargelegte Theorie des kugelförmigen, flächengeladenen Elektrons liefert merkwürdigerweise den exakten Wert für das Verhältnis $\varkappa = \frac{e}{m_0 c}$ zwischen dem magnetischen Moment und dem Impulsmoment der negativen Elektronen. Es sei bemerkt, daß dieser Wert zweimal größer ist als der, welcher einer Translationsbewegung des Elektrons um einen festen Punkt entspricht. In der Tat haben wir in Kap. III, § 9 gesehen, daß das magnetische Moment eines linearen elektrischen Stromes in bezug auf irgend einen Punkt sich aus den Beiträgen

$$\mathfrak{m}' = \frac{e}{2c} \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} \tag{64}$$

zusammensetzt, welche von den einzelnen Elektronen herrühren. Das entsprechende mechanische Moment drückt sich andererseits durch die Formel

$$\mathfrak{J}' = m_0 \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} \tag{64a}$$

aus. Wir bekommen also für das Verhältnis $\mathfrak{m} : \mathfrak{J}$ in diesem Falle

$$\varkappa' = \frac{e}{2 c m_0}. \tag{64b}$$

---

[1]) Besonders von *Abraham* und *H. Compton*.

[2]) Dies verdankt man *G. Uhlenbeck* und *P. Goudsmit* (1926), die zum erstenmal die Tatsache beachtet haben, daß das magnetische Elektron bei Bewegung in einem elektrischen Felde eine Zusatzkraft erfahren muß [siehe unten, Formel (56a)], die für die verschiedenen bisher unerklärten optischen und magnetischen Eigenschaften verantwortlich ist.

Bewegt sich das Elektron um einen festen Punkt O, nach welchem hin es durch eine elektrische Zentralkraft angezogen wird, wie dies z. B. näherungsweise in allen Atomen stattfindet, so muß sein mechanisches Impulsmoment nach Größe und Richtung konstant bleiben. Dies folgt sofort aus der Bewegungsgleichung $\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{F}^a$ durch äußere Multiplikation mit dem Radiusvektor des Elektrons $\mathfrak{r}$. Denn, da die Vektoren $\mathfrak{F}^a$ und $\mathfrak{r}$ einander parallel sind, hat man

$$\mathfrak{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}^a = 0\,,$$

und folglich, wegen

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{r} \times m\mathfrak{v}) = \mathfrak{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \times m\mathfrak{v} = \mathfrak{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v})\,,$$

$$\mathfrak{r} \times m\mathfrak{v} = \mathfrak{J} = \text{konst.}$$

Dieser Satz gilt, wie aus der angeführten Ableitung hervorgeht, auch dann, wenn man die Abhängung der Masse von der Geschwindigkeit berücksichtigt[1]). Wir wollen uns im folgenden auf kleine Geschwindigkeiten beschränken, und $m = m_0 =$ konst setzen. Dann folgt aus dem obigen Satze, daß das magnetische Moment des Elektrons, oder genauer ausgesprochen, der *Elektronenbahn* (um das Anziehungszentrum O) auch konstant bleiben muß.

In Abständen, die groß gegenüber den Bahndimensionen sind, wird durch die Umlaufsbewegung des Elektrons ein magnetisches Feld erzeugt, das im Mittel für eine Zeit, die mehrere Umlaufsperioden umfaßt (zugleich aber sehr klein im Verhältnis zu der gewöhnlichen Zeiteinheit sein kann) identisch ist mit dem Felde eines stationären elementaren Stromes, oder eines elementaren Magneten (magnetiscden Dipols) im Punkte O. Man pflegt deshalb ein solches in einem Atom kreisendes Elektron als *Magneton* zu bezeichnen[2]). Es würde aber richtiger sein, von einem *Doppelmagneton* zu sprechen, denn neben der Umlaufsbewegung tritt noch eine Drehung des Elektrons um seine eigene Achse auf (ganz wie bei der Bewegung der Erde um die Sonne!), die ein magnetisches Moment $\mathfrak{m}$ im Gefolge hat. Das Elektron ist also hinsichtlich seiner magnetischen Wirkungen einem Systeme von *zwei* elementaren Magneten mit den Momenten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ äquivalent (man kann letztere selbstverständlich zu einem einzigen resultierenden Moment $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}'$ zusammengesetzt denken).

Diese Äquivalenz bezieht sich nicht nur auf die vom Elektron ausgeübten Wirkungen, sondern auch auf die Wirkungen, die es selbst in einem äußeren magnetischen Felde $\mathfrak{H}^a$ erfährt. Für den Fall der Rotationsbewegung war diese Frage schon oben (§ 6) erledigt. Was die

[1]) Er stellt also die Verallgemeinerung des üblichen „Flächensatzes" der klassischen Mechanik dar.

[2]) Diese Bezeichnung wurde von *P. Weiß* eingeführt.

Umlaufsbewegung anbetrifft, so kann man auch hier die durch das äußere Feld hervorgerufene Änderung des Vektors $\mathfrak{m}'$ durch die zu (55) ganz analoge Gleichung

$$\overline{\frac{d\mathfrak{m}'}{dt}} = \varkappa' \mathfrak{m}' \times \mathfrak{H}^a \tag{65}$$

charakterisieren. Dabei bedeutet der horizontale Strich über der zeitlichen Ableitung von $\mathfrak{m}'$, daß es sich nicht um den exakten „momentanen" Wert dieser Ableitung handelt, sondern um einen *Mittelwert* in demselben Sinne, wie bei der Bestimmung des durch die Umlaufsbewegung des Elektrons erzeugten magnetischen Feldes. Die *genaue* Formel für die Änderungsgeschwindigkeit des Impulsmomentes $\mathfrak{J}' = \frac{\mathfrak{m}'}{\varkappa'}$ lautet offenbar

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{dt} = \mathfrak{M}^a,$$

wo

$$\mathfrak{M}^a = \mathfrak{r} \times \frac{e}{c}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}^a) \tag{65a}$$

das Moment der auf das Elektron wirkenden magnetischen Kraft ist. Dieses Moment muß während jedes Umlaufes gewisse Schwankungen erleiden, die sich im Mittel gegenseitig kompensieren und für die mittlere Änderung von $\mathfrak{J}'$ belanglos bleiben. Letztere wird also ausschließlich durch den *Mittelwert* von $\mathfrak{M}^a$ über eine Umlaufsperiode (oder einige Umdrehungen, wenn die Bewegung nicht streng periodisch ist), bestimmt. Dieser Mittelwert $\overline{\mathfrak{M}^a}$ ist bei genügend schwachem äußeren Felde praktisch (d. h. in erster Annäherung) identisch mit demjenigen über die ungestörte Bewegung (bei Anwesenheit von $\mathfrak{H}^a$).

Nun bemerken wir, daß der Mittelwert der *zeitlichen Ableitung* irgendeiner Größe, die bei der ungestörten Bewegung keine systematische (monotone) Änderung erleidet, sondern bloß um einen gewissen Mittelwert schwingt, verschwinden muß — solange die Störung außer acht gelassen wird. Es wird also speziell[1])

$$\overline{\frac{d}{dt}[\mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{H}^a)]} = 0$$

oder, da $\frac{d}{dt}[\mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{H}^a)] = \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}^a) + \mathfrak{v} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{H}^a)$ ist,

$$\overline{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}^a)} + \overline{\mathfrak{v} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{H}^a)} = 0. \tag{65b}$$

Mit Rücksicht auf die Identität

$$\mathfrak{r} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}^a) + \mathfrak{H}^a \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \times (\mathfrak{H}^a \times \mathfrak{r}) = 0 \tag{65c}$$

[vgl. Einleitung (5a)] ergibt sich

$$\overline{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}^a)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \times \mathfrak{H}^a. \tag{65d}$$

[1]) Um Mißverständnisse zu vermeiden, möchten wir den Umstand betonen, daß die nachfolgenden Mittelwerte eine *nullte* Näherung (bezüglich $\mathfrak{H}^a$) darstellen, während in (65) die *erste* Näherung angedeutet ist.

Den Strich über das rechtsstehende Glied dieser Gleichung haben wir weggelassen, da in der ungestörten Bewegung der Vektor $\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$ konstant bleibt.

Wir bekommen also nach (65a) und (65d),

$$\overline{\mathfrak{M}^a} = \frac{e}{2c}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \times \mathfrak{H}^a = \mathfrak{m}' \times \mathfrak{H}^a \tag{66}$$

und schließlich

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{dt} = \mathfrak{m}' \times \mathfrak{H}^a ,$$

was mit (65) übereinstimmt.

Die von dem äußeren Feld bedingte Störung der Umlaufsbewegung reduziert sich nach dieser Gleichung auf eine *Präzession* des Vektors $\mathfrak{m}'$ um die Feldrichtung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathfrak{o}' = -\varkappa' \mathfrak{H}^a \tag{66a}$$

(sogenannte *Larmorpräzessionen*)[1]).

Diese Winkelgeschwindigkeit ist halb so groß wie die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$, mit welcher der Vektor $\mathfrak{m}$, d. h. die magnetische Achse des Elektrons um dieselbe Feldrichtung präzessieren muß.

Es sei bemerkt, daß eine solche unabhängige Präzession der beiden Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ in Wirklichkeit unmöglich ist, denn sie sind durch die Wirkung des elektrischen Zentralfeldes, welches das Elektron in der Nähe des Punktes O hält, sozusagen miteinander gekoppelt. Nimmt man z. B. an, daß bei seiner Umlaufsbewegung das Elektron die Drehkraft (57) und die Kraft (57a) erfährt, und setzt $\mathfrak{F}^a = e\mathfrak{E}^a = ef \cdot \mathfrak{r}$, wo f eine skalare Funktion des Abstandes bedeutet, so wird nach (57)

$$\mathfrak{M}^a = f\frac{e}{c}\mathfrak{m} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) = 2f\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}' . \tag{67}$$

Dieses Drehmoment entspricht offenbar einem virtuellen magnetischen Felde der Stärke

$$\mathfrak{H}' = 2f\mathfrak{m}' = \frac{2\,|\mathfrak{E}^a|}{r}\mathfrak{m}', \tag{67a}$$

das wir in einer rein formalen Weise dem Magneton, welcher die Umlaufsbewegung des Elektrons vertritt, zuschreiben könnten. Die zusätzliche Kraft (57a) läßt sich wegen $(\mathfrak{m}\ \mathrm{grad})f\mathfrak{r} = \mathfrak{m}f + \mathfrak{r}(\mathfrak{m}\ \mathrm{grad}\ f)$ in der Form

$$-ef\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m} - e\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{r}\right)(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\,f) = +ef\mathfrak{p} + 2(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\,f) \cdot \mathfrak{m}'$$

schreiben, wo $\mathfrak{p}$ das durch (60a) definierte Dipolmoment bedeutet. Für das Drehmoment dieser Kraft, welches die Änderung des Vektors $\mathfrak{m}'$ bedingt, bekommen wir folglich

$$\mathfrak{M}'^a = ef\mathfrak{r} \times \mathfrak{p} + 2(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\,f)(\mathfrak{r} \times \mathfrak{m}). \tag{67b}$$

Dieser Ausdruck ist von (67) ganz verschieden. Wir werden unten, (Kap. IX, § 2) sehen, daß in Wirklichkeit beide — ebenso wie die ihnen

[1]) Nach *J. Larmor*.

zugrunde liegenden Formeln (57) und (57a) — *falsch sind.* Die zusätzliche Kraft und Drehkraft, welche durch die Translationsbewegung des rotierenden Elektrons in einem elektrischen Feld bedingt werden, rühren nicht von dem magnetischen Ersatzdipol, sondern von einer *elektrischen Polarisation* des Elektrons, d. h. des entsprechenden elektrischen Dipols (mit dem Moment $-\mathfrak{p}$) her, und haben eine ganz symmetrische Wechselwirkung zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ zur Folge, so daß das resultierende Impulsmoment konstant bleibt.

Neben dem äußeren magnetischen und elektrischen Drehmoment muß das rotierende Elektron noch ein durch (63a) bzw. (63b) gegebenes Selbstdrehmoment erfahren. Dieses Drehmoment ist aber proportional zum Quadrat des Verhältnisses $\frac{v}{c}$ und darf deshalb für kleine Translationsgeschwindigkeiten (auf welche wir uns von vornherein beschränkt haben) vernachlässigt werden.

Das „innere" magnetische Moment der negativen Elektronen beträgt erfahrungsgemäß etwa

$$|\mathfrak{m}| = 10^{-20}.$$

Das vollständige magnetische Moment der Atome, daß sich vektoriell aus den Momenten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ der einzelnen Elektronen zusammensetzt, ist immer gleich einem ganzen Vielfachen des angeführten Wertes.

Setzt man ihn in die Formel (45) ein, so ergibt sich für die äquatoriale Geschwindigkeit eines negativen Elektrons für $a = 10^{-13}$ cm und $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ ungefähr 10^{13} cm/sek. Dieser Umstand braucht, wie schon oben erwähnt wurde, nicht als ein Einwand gegen die dargelegte Theorie betrachtet zu werden.

Ein grundsätzlicher Einwand erhebt sich aber, wenn wir die zusätzliche Masse, die von der Rotation des Elektrons herrührt, abschätzen. Diese „magnetische" Masse ist nach (61a) von der Größenordnung $\frac{\mathfrak{m}^2}{c^2 a^3}$; bei $|\mathfrak{m}| \simeq 10^{-20}$ und $a \simeq 10^{-13}$ muß sie etwa gleich 10^{-21} sein. Tatsächlich aber beträgt sie nur 10^{-27}, ist also *ein millionenmal kleiner!* Es sei daran erinnert, daß der „Radius" des Elektrons gerade aus diesem letzten Wert berechnet wurde unter der Voraussetzung, daß die Masse des Elektrons rein elektrisch ist, d. h. durch die Formel $m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2 a}$ bestimmt wird. Will man dagegen diese Masse als hauptsächlich magnetischen Ursprungs behandeln, so ergibt sich für den Elektronenradius der Wert

$$a \simeq \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{m}^2}{c^2 m_0}} \simeq 10^{-11}.$$

Dieser Wert ist aber sicher zu groß; nach den bekannten *Rutherford*schen Ergebnissen über die Größe der Atomkerne ist schon der gewöhnliche Wert (10^{-13}) als zu groß zu betrachten.

§ 10. Kritische Betrachtung der Theorie der ausgedehnten Elektronen.

Wir haben in diesem Kapitel die Elektronen als räumlich ausgedehnte Gebilde mit Flächen- oder Volumladung behandelt und ihre Bewegungsgleichungen auf Grund des *Lorentz*schen Prinzips, und zwar im großen und ganzen in Übereinstimmung mit der Erfahrung, aufgestellt.

Wir müssen nun diese Vorstellung kritisch revidieren und uns überlegen, ob sie nicht durch etwas anderes, speziell durch die viel einfachere Vorstellung der punktförmigen Elektronen ersetzt werden kann.

Zunächst einige erkenntnistheoretische Bemerkungen. — Da die Elektronen die letzten unzerstörbaren und unteilbaren Elemente sind, aus welchen sich die materiellen Körper zusammensetzen, scheint es etwas naiv, sie wieder als kleine starre oder quasi-starre Körper aufzufassen. Die Frage nach der Struktur der materiellen Körper ist die Frage nach ihrer Zusammensetzung aus diskreten voneinander trennbaren kleineren Teilen. Auf diese Weise kommt man zu den Molekülen, Atomen und schließlich zu den Elektronen. Da aber die Elektronen nicht weiter teilbar sind, so scheint es sinnlos, von den „Elementen" eines und desselben Elektrons zu sprechen. Die *Ladung* des Elektrons (ebenso wie seine Masse in der gewöhnlichen Auffassung der klassischen Mechanik) ist keine Materie, sondern eine *Eigenschaft*. Da aber diese Eigenschaft invariant und außerdem additiv (bei Zusammensetzung mehrerer Elektronen) ist, so ergibt sich die Möglichkeit, diese Eigenschaft als *Vertreter* der entsprechenden Dinge zu behandeln (in diesem Sinne haben wir manchmal ein geladenes Teilchen bloß als *eine Ladung* bezeichnet), und sie in demselben Raumgebiet zu lokalisieren. Man kann dabei ebensogut an einen Punkt, eine Linie, Fläche oder Volum denken. Soweit es sich dabei um eine Wechselwirkung zwischen *verschiedenen* Elektronen handelt, ist die Auffassung der Elektronen als Punktladungen die einfachste und natürlichste; die anderen werden dabei als Hilfsbegriffe benutzt, wie wir es z. B. bei der Ableitung des elektromagnetischen Feldes einer bewegten Punktladung in Kap. VI, § 1 und 2 gemacht haben.

Den Anlaß zur Behandlung der elektrischen Ladung als eine kontinuierlich mit endlicher Volumdichte verteilte Substanz, gab zuerst die Möglichkeit, die Integralgesetze, welche die Fernwirkungen zwischen verschiedenen Elektronen bestimmen, durch Differentialgleichungen (die eine fiktive „Nahewirkung" bedeuten) zu ersetzen. Aber der entscheidende Grund zur Einführung der räumlich ausgedehnten Elektronen liegt in dem Umstande, daß es nur auf diese Weise gelingt, die in dem vorliegenden Kapitel dargelegte allgemeine Energielehre aufzubauen. Da es dabei *vom rein mathematischen* Standpunkt aus ganz gleichgültig ist, ob man die Ladung des Elektrons als Volumladung oder Flächenladung auffaßt (siehe § 1), pflegt man diese beiden Möglichkeiten als physikalisch äqui-

valent zu betrachten. Dagegen wurden die Linien- und Punktauffassung des Elektrons abgelehnt, denn sie erweisen sich als mathematisch unbehandelbar im Sinne der erwähnten Formulierung des Energiebegriffs und der damit verknüpften Begriffe. Es ist aber klar, daß vom rein geometrischen Standpunkte aus das volumgeladene Elektron sich von einem Elektron mit Flächenladung nicht weniger unterscheidet als das letztere von einem linienförmigen Elektron.

Wir haben uns also nicht durch erkenntnistheoretische Prinzipien oder physikalische Tatsachen führen lassen, sondern durch einen mathematischen Formalismus, der mit der Differentialform der physikalischen Grundgesetze verknüpft ist.

Diesen Formalismus haben wir aber durch ein sehr wesentliches physikalisches Prinzip ergänzt — nämlich das *Lorentzsche Bewegungsprinzip*. Die Bedeutung dieses Prinzips für die „Feldtheorie" der elektromagnetischen Energie und Bewegungsgröße besteht in der Tatsache, daß es das *Erhaltungsgesetz* dieser Größen im Sinne der Gleichungen (21) und (31) oder der entsprechenden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{K} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{T} = 0 \quad \left(\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{K}}{c^2}\right) \tag{68}$$

liefert.

Diese Gleichungen sind zwar für die Bestimmung der Bewegung eines Elektrons sehr bequem, aber gar nicht nötig. Man kann dieselbe Aufgabe durch eine direkte Methode lösen —, indem man nämlich die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft berechnet und sie gleichsetzt dem Entgegengesetzten der äußeren Kraft, welche von den anderen Elektronen herrührt. Dabei muß man die Elemente des Elektrons als Punktladungen behandeln, und seine Selbstkraft als die resultierende ihrer gegenseitigen Wirkungen definieren.

Der eigentliche physikalische Sinn der Einführung der räumlich ausgedehnten Elektronen mit Volum- oder Flächenladung an Stelle der punktförmigen besteht gerade in der sich dabei ergebenden Möglichkeit, mit Hilfe des *Lorentz*schen Prinzips ihre Bewegungsgleichungen theoretisch aufzustellen. Die Energie, Bewegungsgröße usw. sind nur als *Hilfsbegriffe* zu betrachten, welche die Lösung dieses Problems erleichtern. Die *Grundbegriffe* der Elektrodynamik, ebenso wie der klassischen Mechanik, sind die *Kraft* und die *Bewegung*. Die Grundprobleme — *erstens* die Wechselwirkung der verschiedenen Elektronen als Funktion ihrer Bewegung (und Lage), und zweitens die Änderung dieser Bewegung (und Lage) als Funktion ihrer Wechselwirkung zu bestimmen. Die erste Aufgabe haben wir in den vorhergehenden Kapiteln vollständig gelöst. Wir kennen das elektromagnetische Feld, welches durch eine *gegebene Bewegung* des betrachteten Elektrons erzeugt wird und die Kraft, welche auf ein anderes in diesem Feld befindliches Elektron wirkt. Um aber ein geschlossenes System von Gleichungen zu bekommen, das die Geschichte

des betrachteten Systems von Elektronen zu verfolgen gestattet, müssen wir noch die Bewegung eines Elektrons unter der Wirkung von *gegebenen äußeren Kräften* bestimmen. *Eine* Möglichkeit, diese Aufgabe auf einer rationellen Grundlage zu lösen, besteht in dem „Aufblasen" der Elektronen zu Kugeln oder anderen räumlich ausgedehnten Gebilden mit Flächen- oder Volumladung, und der Einführung von *Selbstkräften*, die durch äußere Kräfte kompensiert werden.

Aber dies ist nicht die *einzige* Möglichkeit und sogar nicht einmal die vernünftigste und die einfachste. In der Natur können wir nur „äußere" Kräfte beobachten, die auf ein Elektron seitens der anderen wirken. Die „Selbstkraft" stellt eine metaphysische Fiktion dar — abgesehen von dem schon oben erwähnten Umstand, daß es erkenntnistheoretisch und physikalisch sinnlos ist, ein Elektron in weitere „Elemente" einzuteilen.

Man könnte aber jedenfalls verlangen, daß die Selbstkrafttheorie in konsequenter Weise nicht nur die Bewegung, sondern auch das Gleichgewicht eines Elektrons behandelte. Dies ist aber keineswegs der Fall. Das *Lorentz*sche Prinzip verlangt das Verschwinden der Totalkraft für das *ganze* Elektron, nicht für seine einzelnen „Teile". Im Inneren des Elektrons besteht kein Gleichgewicht. Die elektrischen Abstoßungskräfte zwischen seinen „Elementen" bleiben unkompensiert, jedenfalls durch Kräfte elektrischer Natur. Man könnte selbstverständlich vermuten, daß sie durch Kräfte anderer, z. B. „elastischer" Natur kompensiert sind. Diese vielfach ausgesprochene und teilweise ausgearbeitete Vermutung bedeutet aber einen Zusammenbruch der Elektrodynamik als einer geschlossenen physikalischen Theorie. — Ich bin der Meinung, daß dieses Problem ebenso wie alle Probleme und Schwierigkeiten, die mit der Einteilung der Elektronen in Elemente verknüpft sind, als ein *Scheinproblem* zu betrachten ist, von derselben Art wie manche anderen scholastischen Probleme, mit welchen die Philosophen und Theologen des Mittelalters sich beschäftigt haben[1]).

Entweder gibt es gar keine individuellen Elektronen, sondern eine kontinuierliche Verteilung der Strom- und Ladungsdichte im ganzen Raum — dann würde es keinen Sinn haben, von irgendwelchen Bewegungsgleichungen zu sprechen; die Rolle solcher Bewegungsgleichungen könnten die das Prinzip der Erhaltung der elektromagnetischen Energie und Bewegungsgröße ausdrückenden Gleichungen (68) spielen; sie müßten aber dabei im ganzen Raum und nicht nur „außerhalb der Elektronen" gültig sein.

Oder — die Elektronen sind diskrete unteilbare materielle Teilchen; und dann scheint es am einfachsten und natürlichsten, sie als bloße Kraftzentra, ohne jede Ausdehnung im Raume, d. h. als materielle

[1]) Es sei z. B. erinnert an das berühmte Problem über die Anzahl der Teufel, die sich auf einer Nadelspitze versammeln können.

Punkte aufzufassen — wie dies schon von *Leibniz* und *Boskowitsch* hinsichtlich der letzten Elemente der Materie behauptet wurde.

Dabei fallen alle auf die Struktur des Elektrons bezüglichen Probleme und Schwierigkeiten weg. Zu gleicher Zeit scheint aber die ganze in diesem Kapitel entwickelte Energielehre zu fallen, und damit auch die elektromagnetische Theorie der Masse und des Trägheitsmoments der Elektronen, d. h. die Theorie ihrer Translations- und Rotationsbewegung.

Wir werden unten (Kap. X) sehen, daß die oben gefundenen Bewegungsgleichungen sich im Anschluß an die bekannten Ansätze der klassischen Mechanik, auf Grund eines ganz allgemeinen formalen Prinzips — des *Einstein*schen Relativitätsprinzips — aufstellen lassen. Dabei ist es aber notwendig, die Masse (oder genauer die Ruhmasse) eines Elektrons und sein magnetisches Moment als *primäre*, von der Ladung unabhängige Eigenschaften zu definieren. Dementsprechend muß man die Energie, die Bewegungsgröße und das Impulsmoment des Elektrons nicht auf sein elektromagnetisches Feld zurückführen, sondern als seine eigenen *mechanischen* Attribute betrachten, die mit dem erwähnten Feld nicht direkt verknüpft sind. Die Größen $\frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,dV$ usw. haben für ein einzelnes Elektron nur dann einen physikalischen Sinn, wenn es in unendlich kleine Elemente eingeteilt werden kann; sie stellen dabei die *gegenseitige* Energie usw. dieser Elemente relativ zueinander dar. Betrachtet man aber das Elektron als ein prinzipiell unteilbares Ding, so verlieren die erwähnten Volumintegrale jeden physikalischen Sinn; im Falle der punktförmigen Elektronen werden sie dazu noch unendlich.

Neben der mechanischen Energie und Bewegungsgröße der einzelnen Elektronen muß man aber noch ihre *gegenseitige* Energie und Bewegungsgröße in Betracht ziehen. Dabei lassen sich diese „gegenseitigen" Größen als Funktionen der relativen Lage und Geschwindigkeit der in Wechselwirkung begriffenen Elektronen, wegen des verzögerten Charakters der elektromagnetischen Fernwirkungen, nicht direkt definieren. Man kann sie aber wohl darstellen als über den ganzen Raum erstreckte Integrale von Größen, die sich aus der totalen Energiedichte $\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ usw. ergeben, wenn man davon die Beiträge substrahiert, welche der Eigenenergie usw. der einzelnen Elektronen entsprechen. Die resultierenden „gegenseitigen" Größen[1]) müssen sich offenbar durch Produkte der elementaren elektrischen und magnetischen Feldstärken $\mathfrak{E}^\alpha$, $\mathfrak{H}^\alpha$ ausdrücken, die von den *verschiedenen* Elektronen herrühren. Für die Volumdichte der gegenseitigen elektromagnetischen Energie bekommen wir z. B. [vgl. (3) § 1]:

$$\xi^* = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum' (\mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{E}_\beta + \mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\beta), \tag{69}$$

[1]) Diesen Rest werden wir im folgenden durch einen Stern (*) bezeichnen.

und für die Dichte der gegenseitigen elektromagnetischen Bewegungsgröße

$$\mathfrak{g}^* = \frac{1}{4\pi c} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathfrak{E}_\alpha \times \mathfrak{H}_\beta . \tag{69a}$$

Dementsprechend müssen wir auch die Dichte der elektromagnetischen Energieströmung $\mathfrak{K} = c^2\mathfrak{g} = \frac{c}{8\pi}\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$ und die Tensordichte der Impulsströmung $^2\mathfrak{T}$ durch den gegenseitigen „Rest" ersetzen, der sich durch Subtraktion der von den einzelnen Elektronen herrührenden Glieder ergibt. Führt man statt der individuellen *„elektromagnetischen"* Energie und Bewegungsgröße dieser Elektronen die entsprechenden *„mechanischen"* Größen W_α und $\mathfrak{G}_\alpha$ ein, so lassen sich die Erhaltungsgesetze für die totale Energie und totale Bewegungsgröße in der Form

$$-\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha W_\alpha + W^*\right) = \oint K_n^* \, dS, \tag{70}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \mathfrak{G}_\alpha + \mathfrak{G}^*\right) = \oint \mathfrak{T}_n^* \, dS \tag{70a}$$

schreiben, wo

$$W^* = \int \xi^* dV, \quad \mathfrak{G}^* = \int \mathfrak{g}^* dV \tag{70b}$$

die in dem Volum V enthaltene gegenseitige elektromagnetische Energie und Bewegungsgröße bedeuten. Das Volum V bleibt dabei willkürlich. Es ist aber zweckmäßig, es so groß zu wählen, daß die Fläche S ganz in der Wellenzone liegt, und folglich alle betrachteten Elektronen enthält. Die Einführung dieser Größen kann aber nur dann nützlich sein, wenn man sie durch die kinematischen Elemente der betreffenden Elektronen, d. h. ihre Lagen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen usw. explizite ausdrückt, und zwar für denselben Zeitpunkt, in welchem das ganze System betrachtet wird. Dies kann man mittels der in dem Kap. VI, § 5 angeführten Reihenentwicklungen machen. Wir werden aber auf diese Frage nicht näher eingehen.

Es sei bemerkt, daß die Gleichungen (70) und (70a) im Vergleich mit den entsprechenden Gleichungen für die vollständige elektromagnetische Energie und Bewegungsgröße unvollkommen sind, und zwar in dem Sinne, daß bei ihnen Glieder, die der Energie- und Impulsausstrahlung der einzelnen Elektronen entsprechen, fehlen. — Diese Lücke muß offenbar durch Einführung zusätzlicher, nichtkonservativer Glieder in die Bewegungsgleichungen ausgefüllt werden.

Dritter Abschnitt.

Die Relativitätstheorie.

Achtes Kapitel.

Begründung der Relativitätstheorie.

§ 1. Raum-zeitliche Symmetrie der elektromagnetischen Gleichungen.

Wir haben im Kap. VI § 4 gesehen, daß, wenn man die mit $\sqrt{-1}\,c = ic$ multiplizierte Zeit als vierte Koordinate x_4 den drei räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 hinzufügt und das mit i multiplizierte skalare Potential als die entsprechende Komponente eines vierdimensionalen Vektorpotentials behandelt, sich die Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale in einer bezüglich der vier Indizes ganz symmetrischen Gestalt schreiben lassen. Dabei haben wir uns auf den Fall einer Punktladung beschränkt. Wir wollen nun den Fall einer kontinuierlichen Verteilung der elektrischen Ladung und Strömung mit der Volumdichte ϱ bzw. $\mathfrak{j}$ untersuchen. — Die Größen ϱ und $\mathfrak{j}$ sind bekanntlich miteinander durch die Beziehung verknüpft

$$\operatorname{div}\mathfrak{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

welche das Erhaltungsgesetz der Elektrizität ausdrückt. Führt man ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem X_1, X_2, X_3 ein, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an

$$\frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

oder mit den Bezeichnungen

$$ict = x_4 \tag{1}$$

$$i\varrho = j_4 \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0\,. \tag{2a}$$

Diese Gleichung ist ganz analog zur Gleichung (19a) Kap. VI, die wir der Vollständigkeit halber hier nochmals aufschreiben werden. Es gilt also mit der Bezeichnung

$$i\varphi = A_4 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0\,. \tag{3a}$$

Die Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale

$$\nabla^2 \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -4\pi \mathfrak{j}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho$$

können jetzt zusammengefaßt werden in das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_k^2} = -4\pi j_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{4}$$

Nach den Formeln

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

bekommen wir ferner für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} = i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - i\frac{\partial A_k}{\partial x_4} = i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4}\right) (k = 1, 2, 3)$$

und

$$H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \quad H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2},$$

Es ist also möglich, die sechs Größen

$$\left.\begin{aligned} H_1 = H_{23}, \quad H_2 = H_{31}, \quad H_3 = H_{12}; \\ -iE_1 = H_{14}, \; -iE_2 = H_{24}, \; -iE_3 = H_{24}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

als die Komponenten eines *vierdimensionalen schiefsymmetrischen* Tensors aufzufassen, welcher sich durch Differentation der Potentialkomponenten nach den Koordinaten ergibt gemäß den Formeln

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = -H_{lk} \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4). \tag{5a}$$

Wir wollen nun die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke in den *Maxwell*schen Grundgleichungen I und II, § 3 Kap. V durch die Tensorkomponenten H_{kl} ersetzen.

Dabei ergibt sich für die erste Gruppe

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

in koordinatenmäßiger Schreibweise:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t} = i\left(\frac{\partial H_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_4}\right) = 0 \\
&\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_2}{\partial t} = i\left(\frac{\partial H_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2}\right) = 0 \\
&\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_3}{\partial t} = i\left(\frac{\partial H_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_4}\right) = 0 \\
&\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = \frac{\partial H_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_3} = 0
\end{aligned}$$

d. h. ein einheitliches Gleichungssystem:

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} = 0, \tag{6}$$

wo i, k, l drei verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4 sind. Es sei bemerkt, daß die Gleichungen (6) auch dann gültig bleiben, wenn zwei oder alle drei dieser Zahlen einander gleich sind; z. B. für $k = l$ wird $\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ki}}{\partial x_k} = 0$ und $\frac{\partial H_{kk}}{\partial x_i} = 0$, denn $H_{ik} = -H_{ki}$ und $H_{kk} = 0$ ist.

Auf dieselbe Weise bekommen wir für die zweite Gruppe der *Maxwell*schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{j}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho:$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4} = 4\pi j_1 \text{ usw.}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = -i\left(\frac{\partial H_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{43}}{\partial x_3}\right) = 4\pi\varrho,$$

d. h.

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} = 4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Auf eine ganz analoge Weise lassen sich die Formeln

$$\mathfrak{j} = \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \quad \varrho = -\operatorname{div} \mathfrak{P}$$

darstellen [vgl. (21) und (19a), Kap. V]. Dabei spielen die magnetische und elektrische Polarisation dieselbe Rolle wie $\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}$ und $-\frac{\mathfrak{E}}{4\pi}$. Setzt man also

$$\left.\begin{aligned} M_1 = P_{23}, \quad M_2 = P_{31}, \quad M_3 = P_{12}, \\ iP_1 = P_{14}, \quad iP_2 = P_{24}, \quad iP_3 = P_{34}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so wird

$$j_k = \sum_{l=1}^{4} \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} \tag{8a}$$

Die Größen $P_{kl} = -P_{lk}$ kann man ebenso wie $H_{kl} = -H_{lk}$ als die Komponenten eines vierdimensionalen schiefsymmetrischen Tensors auffassen. Es sei erinnert, daß sie trotz ihrer formalen Analogie und gleicher Dimension im allgemeinen ganz verschieden sind — denn einer Gleichung der Gestalt (6) können die Größen P_{kl} nicht genügen.

Da die Vektoren $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}^*$ (elektrisches und magnetisches Polarisationspotential) sich zum Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und dem skalaren Potential φ ebenso verhalten wie $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ $(= \mathfrak{P}^*)$ zu $\mathfrak{j}$ und ϱ, so kann man ferner setzen, entsprechend (8) und (8a):

$$\left.\begin{aligned} Z_1^* = Z_{23}, \quad Z_2^* = Z_{31}, \quad Z_3^* = Z_{12} \\ iZ_1 = Z_{14}, \quad iZ_2 = Z_{24}, \quad iZ_3 = Z_{34} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und

$$A_k = \sum_{l=1}^{4} \frac{\partial Z_{kl}}{\partial x_l}. \tag{9a}$$

Die Komponenten dieses durch Vereinigung von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}^*$ entstehenden *elektromagnetischen Polarisationspotentials* genügen dabei nach (20) und (22) Kap. V der Differentialgleichungen

$$\sum_{h=1}^{4} \frac{\partial^2 Z_{kl}}{\partial x_h^2} = -4\pi P_{kl}. \tag{9b}$$

Nach (9a) und (5a) kann man die Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors H_{kl} durch die Komponenten des Polarisationspotentials folgendermaßen ausdrücken

$$H_{kl} = \sum_{h=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Z_{lh}}{\partial x_k} - \frac{\partial Z_{kh}}{\partial x_l}\right). \tag{9c}$$

Diese Ausdrücke könnten mit (9b) nur dann übereinstimmen, wenn $\frac{\partial Z_{lh}}{\partial x_k} - \frac{\partial Z_{kh}}{\partial x_l} = \frac{\partial Z_{lk}}{\partial x_h}$ wäre. Diese Beziehungen lassen sich in der zu den Gleichungen (6) identischen Form

$$\frac{\partial Z_{lh}}{\partial x_k} + \frac{\partial Z_{hk}}{\partial x_l} + \frac{\partial Z_{lk}}{\partial x_h} = 0$$

schreiben. In Wirklichkeit aber sind sie *nicht* erfüllt, denn daraus würden nach (9b) entsprechende Gleichungen für die P_{kl} folgen.

Die bekannten Ausdrücke für die Totalkraft pro Volumeinheit — oder den auf die Zeiteinheit bezogenen Impuls $\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} + \mathfrak{j}\times\mathfrak{H}$ — und die entsprechende Arbeit $l = c\mathfrak{j}\mathfrak{E}$ lassen sich zusammenfassen als die Komponenten eines „Vierervektors". Und zwar gilt

$$f_1 = \varrho E_1 + j_2 H_3 - j_3 H_2 = H_{12} j_2 + H_{13} j_3 + H_{14} j_4, \ldots$$
$$\frac{l}{c} = j_1 E_1 + j_2 E_2 + j_3 E_3 = -i(H_{41} j_1 + H_{42} j_2 + H_{43} j_3)$$

oder mit der Bezeichnung

$$\frac{il}{c} = f_4, \tag{10}$$

$$f_k = \sum_{l=1}^{4} H_{kl} j_l \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{10a}$$

Setzt man hier nach (7) $j_l = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{4} \frac{\partial H_{ln}}{\partial x_n}$ ein, so wird

$$f_k = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} H_{kl}\frac{\partial H_{ln}}{\partial x_n} = \frac{1}{4\pi}\sum_l\sum_n \frac{\partial}{\partial x_n}(H_{kl}H_{ln}) - \frac{1}{4\pi}\sum_l\sum_n H_{ln}\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n}.$$

Ferner ergibt sich durch Vertauschung der Summationsindizes

$$\sum_l\sum_n H_{ln}\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} = \sum_n\sum_l H_{nl}\frac{\partial H_{kn}}{\partial x_l},$$

oder wegen $H_{ln} = -H_{ln}$ und $H_{kn} = -H_{nk}$

$$\sum_l\sum_n H_{ln}\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} = \sum_n\sum_l H_{ln}\frac{\partial H_{nk}}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\sum_n\sum_l H_{ln}\left(\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} + \frac{\partial H_{nk}}{\partial x_l}\right)$$

und schließlich nach (6)

$$\sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} = -\frac{1}{2} \sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{ln}}{\partial x_k} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_l \sum_n H_{ln}^2 \right).$$

Wir bekommen also

$$f_k = \frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} (H_{kl} H_{ln}) + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_l \sum_n H_{ln}^2 \right).$$

Führt man die Bezeichnungen:

$$\Theta_{kn} = \delta_{kn} L + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{4} H_{kl} H_{ln}, \tag{11}$$

$$L = \frac{1}{16\pi} \sum_l \sum_n H_{ln}^2 = \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2), \tag{11a}$$

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases} \tag{11b}$$

so wird:

$$f_k = \sum_{n=1}^{4} \frac{\partial \Theta_{kn}}{\partial x_n}. \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß das gewonnene Formelsystem identisch ist mit den Formeln

$$\mathfrak{f} = -\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} - \operatorname{div} {}^2\mathfrak{T}, \qquad l = -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \operatorname{div} \mathfrak{R},$$

die wir in dem vorigen Kapitel §§ 3 und 4 abgeleitet haben.

Und zwar sind der Skalar ξ, die Vektoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{R}$ und der dreidimensionale Tensor ${}^2\mathfrak{T}$ zusammengefaßt zu einem vierdimensionalen symmetrischen Tensor, dessen Komponenten durch (11) gegeben sind. Es bestehen dabei die folgenden Relationen (vgl. Kap. VII, §§ 3 und 4):

$$\Theta_{11} = L - \frac{1}{4\pi} (H_{12}^2 + H_{13}^2 + H_{14}^2) = \frac{1}{8\pi} (2H^2 - E^2 - 2H_3^2 - 2H_2^2 + 2E_1^2)$$

$$= \frac{1}{8\pi} (H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_1^2 - E_2^2 - E_3^2) = -T_{11};\ \Theta_{22} = -T_{22},\ \Theta_{33} = -T_{33};$$

$$\Theta_{12} = -\frac{1}{4\pi} (H_{13} H_{23} + H_{14} H_{24}) = -\frac{1}{4\pi} (-H_2 H_1 - E_1 E_2) = -T_{12},$$

$$\Theta_{23} = -T_{23},\ \Theta_{31} = -T_{31};$$

$$\Theta_{14} = -\frac{1}{4\pi} (H_{12} H_{42} + H_{13} H_{43}) = -\frac{1}{4\pi} (iE_2 H_3 - iE_3 H_2) = -\frac{i}{4\pi} [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}]_1$$

$$= -\frac{i}{c} K_1 = -icg_1;\ \Theta_{24} = -\frac{i}{c} K_2 = -icg_2,\ \Theta_{34} = -\frac{i}{c} K_3 = -icg_3,$$

$$\Theta_{44} = +\frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2) - \frac{1}{4\pi} (H_{41}^2 + H_{42}^2 + H_{43}^2) = \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2) = \xi,$$

die durch das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \hline \Theta_{41} & \Theta_{42} & \Theta_{43} & \Theta_{44} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -{}^2\mathfrak{T} & -ic\mathfrak{g} \\ \hline \frac{1}{ic}\mathfrak{R} & \xi \end{array} \right) \tag{12a}$$

dargestellt werden können. Mit Rücksicht auf dieses Schema kann man die ersten drei Gleichungen (12) in der Form

$$f_k = -\frac{\partial T_{k1}}{\partial x_1} - \frac{\partial T_{k2}}{\partial x_2} - \frac{\partial T_{k3}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_k}{\partial t} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

schreiben, und die vierte in der Form

$$l = -ic f_4 = -\frac{\partial K_1}{\partial x_1} - \frac{\partial K_2}{\partial x_2} - \frac{\partial K_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Die angeführte von *H. Minkowski* herrührende Darstellung der Grundgrößen und Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes läßt sich *auf eine rein formale mathematische Weise* folgendermaßen interpretieren.

Wir denken uns einen (in Wirklichkeit nicht vorhandenen) vierdimensionalen Raum, der sich zu dem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum verhält wie dieser zu der Ebene. Wir denken uns ferner in diesem Raum ein *rechtwinkliges Koordinatensystem X*, d. h. vier *zueinander senkrechte* Achsen X_1, X_2, X_3, X_4 gezogen. Die analytische Bedeutung dieser „Orthogonalität" der vier Achsen werden wir im folgenden Paragraphen klarmachen. Zunächst sei bemerkt, daß sie der vorausgesetzten *Orthogonalität der räumlichen Achsen* $X_1 X_2 X_3$ in Verbindung mit der *Symmetrie der angeführten Gleichungen bezüglich aller vier Indizes* entspricht. — Dabei benützen wir die vierte Achse zur „graphischen Darstellung" der mit ic multiplizierten Zeit, fassen also die vier Größen x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$ zusammen als die rechtwinkligen Komponenten eines „Vierervektors" $\mathfrak{r}$, der den Ort und die Zeit irgendeines Ereignisses charakterisiert. Dementsprechend führen wir die folgenden vierdimensionalen Vektoren ein: $\mathfrak{j}$ (Viererstrom), $\mathfrak{A}$ (Viererpotential), $\mathfrak{f}$ (der auf die Volumeinheit des vierdimensionalen Raumes bezogene Impuls) und die vierdimensionalen Tensoren: ${}^2\mathfrak{H}$ (schiefsymmetrischer Feldtensor) und ${}^2\Theta$ (symmetrischer Impuls- oder Spannungsenergie-Tensor). Schließlich definieren wir den vierdimensionalen Operator $\Box$, der dem gewöhnlichen Operator ∇ entspricht, als einen symbolischen „Vierervektor" mit den Komponenten $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\frac{\partial}{\partial x_4}$. — Dann lassen sich die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in einer *koordinatenfreien* Schreibweise darstellen als Beziehungen zwischen den obigen vierdimensionalen Vektoren und Tensoren.

Die Gleichungen (2a), (3a) und (4) können ohne weiteres in der Form

$$\left.\begin{aligned} \Box \mathfrak{j} &\equiv \operatorname{div} \mathfrak{j} = 0 \\ \Box \mathfrak{A} &\equiv \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \\ \Box^2 \mathfrak{A} &= -4\pi \mathfrak{j} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

geschrieben werden, in vollkommener Analogie zu den entsprechenden Gleichungen für ein zeitlich konstantes magnetisches Feld (und stationäre Elektrizitätsströmung).

Die Formeln (5a), (6) und (7) wollen wir folgendermaßen darstellen

$$\left.\begin{aligned} {}^2\mathfrak{H} &= \square \times \mathfrak{A} \equiv \mathbf{rot}\,\mathfrak{A} \\ \mathbf{rot}\,{}^2\mathfrak{H} &= 0 \\ \square\,{}^2\mathfrak{H} &\equiv \mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H} = 4\pi\,\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \qquad (13\,a)$$

Hier wird die Analogie mit den entsprechenden dreidimensionalen („zeitlosen") Formeln durch den Umstand zerstört, daß ein schiefsymmetrischer vierdimensionaler Tensor — im Gegensatz zu den dreidimensionalen — einem Vektor *nicht* kongruent ist. In der Tat ist der Tensor ${}^2\mathfrak{H}$ nicht durch vier, sondern durch *sechs* unabhängige Größen bestimmt, aus welchen seine zwölf nichtverschwindenden paarweise entgegengesetzt gleichen Komponenten $H_{kl} = -H_{lk}$ gebildet sind. Man pflegt ihn nach *Minkowski* als einen *Sechservektor* zu bezeichnen, d. h. als einen Vektor, der durch seine Projektionen nicht auf die vier Koordinatenachsen, sondern auf die *sechs Koordinatenebenen* (X_2X_3, X_3X_1, X_1X_2, X_1X_4, X_2X_4, X_3X_4) definiert ist[1]).

Die in (13a) auftretende Operation $\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H}$ entspricht der Divergenz eines gewöhnlichen dreidimensionalen Tensors; es gilt dabei

$$(\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H})_k = \sum_{l=1}^{4} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l}$$

(vgl. Einleitung, § 23).

Die Operation $\mathbf{rot}\,{}^2\mathfrak{H}$ entspricht der **rot** eines Vierervektors in dem Sinne, daß damit aus einem schiefsymmetrischen Tensor 2-ten Ranges ein Tensor dritten Ranges gebildet wird, dessen nichtverschwindende Komponenten auf der linken Seite der Gleichungen (6) stehen. Diese vier Größen können als die Komponenten eines Vierervektors aufgefaßt werden, mit welchem der erwähnte Tensor dritten Ranges kongruent ist.

Führt man einen zu ${}^2\mathfrak{H}$ „dualen" schiefsymmetrischen Tensor ${}^2\mathfrak{H}^*$ ein nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & 0 & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & 0 & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H^*_{43} & H^*_{24} & H^*_{32} \\ H^*_{34} & 0 & H^*_{41} & H^*_{13} \\ H^*_{42} & H^*_{14} & 0 & H^*_{21} \\ H^*_{23} & H^*_{31} & H^*_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

so wird

$$\frac{\partial H_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial H^*_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial H^*_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial H^*_{43}}{\partial x_3} = (\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H}^*)_4,$$

$$\frac{\partial H_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_4} = \frac{\partial H^*_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H^*_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H^*_{14}}{\partial x_4} = (\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H}^*)_1,$$

$$\frac{\partial H_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_1} = \frac{\partial H^*_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H^*_{24}}{\partial x_4} + \frac{\partial H^*_{21}}{\partial x_1} = (\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H}^*)_2,$$

$$\frac{\partial H_{21}}{\partial x_4} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_2} = \frac{\partial H^*_{34}}{\partial x_4} + \frac{\partial H^*_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H^*_{32}}{\partial x_2} = (\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H}^*)_3.$$

[1]) Es sei bemerkt, daß im Falle von zwei Dimensionen ein schiefsymmetrischer Tensor sich auf einen Skalar reduziert.

so daß die Gleichung $\mathbf{rot}\,{}^2\mathfrak{H} = 0$ durch

$$\mathbf{div}\,{}^2\mathfrak{H}^* = 0$$

ersetzt werden kann.

Ganz ähnliche Formeln gelten für die schiefsymmetrischen Tensoren ${}^2\mathfrak{P}$ und ${}^2\mathfrak{Z}$; wir brauchen sie nicht nochmals aufzuschreiben.

Nach den Formeln (8a) für die Komponenten des Viererimpulses haben wir ferner

$$\mathfrak{f} = {}^2\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{j}, \tag{14}$$

wo das innere Produkt des Tensors ${}^2\mathfrak{H}$ und des Vektors $\mathfrak{j}$ im Anschluß an das entsprechende Produkt für dreidimensionale Größen [Einleitung (37)] definiert ist. Die Gleichungen (12) schließlich lassen sich in der Form

$$\mathfrak{f} = \mathbf{div}\,{}^2\Theta \tag{14a}$$

schreiben, wobei nach (9) und (9a) gilt

$${}^2\Theta = {}^2\delta \frac{1}{8\pi}({}^2\mathfrak{H} \cdot {}^2\mathfrak{H}) + \frac{1}{4\pi}({}^2\mathfrak{H} \times {}^2\mathfrak{H}) \tag{14b}$$

[vgl. Einleitung (39)].

Es sei bemerkt, daß man bei der Projektierung der vierdimensionalen Vektoren auf die Zeitachse gewöhnliche skalare Größen bekommt, bei der Projektierung auf den gewöhnlichen Raum ergeben sich dreidimensionale Vektoren, die mit diesen Skalaren physikalisch eng verknüpft sind; dementsprechend bilden die Komponenten der vierdimensionalen Tensoren nach den „Raumachsen" gewöhnliche dreidimensionale Tensoren, nach einer der Raumachsen und der Zeitachse gewöhnliche Vektoren und nach der Zeitachse Skalare [vgl. Schema (12a)].

Im folgenden werden wir hauptsächlich die *koordinatenmäßige* Darstellung der elektromagnetischen Größen und Gleichungen benutzen. Wir haben sie in einer koordinatenfreien Schreibweise nur deshalb formuliert, um ihre Analogie mit den gewöhnlichen vektoriellen Gleichungen für zeitlich konstante magnetische und elektrische Felder klarer zutage zu bringen. Diese formale Analogie gestattet es, die von der Zeit abhängigen elektromagnetischen Erscheinungen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum als *statische*, d. h. von der Zeit unabhängige Erscheinungen in einem fiktiven vierdimensionalen Raum zu behandeln.

§ 2. Die Lorentztransformation.

Der gewöhnliche Euklidische Raum ist *„isotrop"*, d. h. alle Richtungen sind als vollkommen gleichberechtigt anzusehen. Diese physikalische Gleichberechtigung der verschiedenen Richtungen kann man auch als ihre *Relativität* bezeichnen in dem Sinne, daß irgendeine Richtung sich nur *relativ* zu anderen, als bekannt vorausgesetzten Richtungen bestimmen läßt. Eine *„absolut"* bestimmte Richtung, die durch besondere

physikalische Eigenschaften ausgezeichnet wäre, kann es überhaupt nicht geben.

Es ist gerade diese Isotropie des Raumes, die die Möglichkeit einer koordinatenfreien Formulierung der physikalischen Gesetze, und speziell der Gesetze der elektromagnetischen Erscheinungen, als Beziehungen zwischen vektoriellen (auch skalaren und tensoriellen) Größen sichert. Wäre eine Richtung im Raume physikalisch ausgezeichnet[1]), so könnte man die erwähnten Gesetze nur mit Rücksicht auf diese Richtung formulieren. Es ist selbstverständlich möglich und manchmal zweckmäßig, die koordinatenfreie Formulierung der physikalischen Gesetze durch eine koordinatenmäßige zu ersetzen. Dabei werden alle (dreidimensionalen) Vektoren durch ihre Komponenten bezüglich dreier willkürlich gewählter Achsen oder Richtungen dargestellt. Diese Komponenten haben wir in der Einleitung als *variante* Skalare bezeichnet, denn ihre Werte sind nur in bezug auf das gewählte Koordinatensystem bestimmt, und beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem verändern sie sich.

Da wegen der Relativität der Richtungen alle Koordinatensysteme als gleichberechtigt anzusehen sind, so hat es keinen Sinn, zu fragen, welche Werte der Komponenten eines bestimmten Vektors die „richtigen" oder „wahren" sind. Die Skalartripel (A_1, A_2, A_3) und (A_1', A_2', A_3'), welche die Komponenten eines und desselben Vektors $\mathfrak{A}$ bezüglich zweier verschiedener Koordinatensysteme X und X' darstellen, sind vollkommen gleichberechtigt. Das einzige, was uns interessieren kann und muß, ist die Beziehung der beiden Skalartripel zueinander. Sind die Größen (A_1, A_2, A_3) als bekannt vorausgesetzt und die Richtungen der X'-Achsen bezüglich X durch die entsprechenden Winkelkosinus $\alpha_{ii'}$ bestimmt, so müssen die Größen (A_1', A_2', A_3') sich irgendwie durch die A_i und die $\alpha_{ii'}$ ausdrücken lassen. Mit anderen Worten, es muß nur festgestellt werden, nach welchen Formeln sich die Komponenten eines Vektors bei irgendwelchen Änderungen der Koordinatenrichtungen *transformieren*.

Es ist nun folgendes besonders zu betonen: *die Komponenten von verschiedenen Vektoren müssen sich auf dieselbe Weise* (d. h. nach denselben Formeln) transformieren, oder mit anderen Worten: die entsprechenden Komponenten der verschiedenen Vektoren sind *kovariante* skalare Größen. Diese Bemerkung scheint zunächst ganz trivial zu sein und direkt aus der Anschauung zu folgen. Sie hat aber in Wirklichkeit einen sehr tiefen Sinn und bildet den analytischen Ausdruck des *Prinzips der Invarianz der physikalischen Gesetze*. — Damit ist folgendes gemeint. Die physikalischen Gesetze lassen sich durch *Gleichungen* ausdrücken, welche verschiedene Vektorgrößen (sowie invariante Skalare, Tensoren usw.)

[1]) Wie man es z. B. im Mittelalter von der „vertikalen" Richtung glaubte.

miteinander verknüpfen. Bei Koordinatendarstellung der Vektoren haben diese Gleichungen die folgende Gestalt

$$A_i = B_i,$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei *physikalisch verschiedene* Vektoren bedeuten. Wir denken uns z. B. $\mathfrak{A}$ als Produkt der Masse eines Teilchens mit seiner Beschleunigung, und $\mathfrak{B}$ als die auf dieses Teilchen wirkende äußere Kraft. Wären die Komponenten der Beschleunigung und der Kraft nicht kovariante Größen, so könnte die obige Gleichung nicht unabhängig von der Wahl der Koordinatenrichtungen gelten. Die *Relativität* dieser Richtungen, ihre *physikalische Gleichberechtigung*, bedeutet analytisch nichts anderes als die Kovarianz der entsprechenden Vektorkomponenten für alle Koordinatentransformationen. Die Koordinatenrichtungen sind relativ und die Vektorkomponenten variant; aber die physikalischen Gesetze, welche diese Vektorkomponenten miteinander verknüpfen, *müssen absolut und invariant* sein. Diese Forderung wird durch die *Kovarianz* der entsprechenden Vektorkomponenten erfüllt. Dasselbe gilt selbstverständlich nicht nur für Vektoren, sondern für Tensorgrößen beliebigen Ranges.

Wir werden uns im folgenden auf rechtwinklige Koordinatensysteme beschränken. Dabei fallen bekanntlich die Komponenten eines Vektors mit seinen Projektionen zusammen, so daß man zwischen den beiden nicht zu unterscheiden braucht (wie dies im allgemeinen Falle schiefwinkliger Koordinatensysteme geschieht). Die Transformationsformeln für Vektor- und Tensorkomponenten haben wir für diesen Fall in Einleitung § 18 aufgestellt. Diese Formeln bleiben offenbar auch dann gültig, wenn man eine, z. B. die dritte Achse festhält und sich auf Koordinatentransformationen in einer Ebene ($X_1 X_2$-Ebene) beschränkt. Dabei könnte man die mit dem Index 3 versehenen Komponenten als invariante Skalare behandeln, und mit den Indizes 1, 2 als Komponenten von zweidimensionalen Vektoren.

Wir wollen nun den entgegengesetzten Schritt machen und auf eine ganz analoge Weise die Transformationen der Koordinatenachsen und die damit verknüpften Transformationen der Vektor- und Tensorkomponenten in dem fiktiven *vierdimensionalen Raum* des vorigen Paragraphen betrachten, wobei die vierte Achse (Zeitachse) nicht mehr als festgehalten angesehen werden darf.

Wir führen also statt des ursprünglichen Koordinatensystems X (X_1, X_2, X_3, X_4) ein neues Koordinatensystem X' ($X'_1 X'_2 X'_3 X'_4$) ein, nach den Transformationsformeln [vgl. Einleitung (32a) und (32b)]

$$x'_{i'} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ii'} x_i, \tag{15}$$

$$x_i = \sum_{i'=1}^{4} \alpha'_{ii'} x'_{i'}, \tag{15a}$$

die der *Orthogonalitätsbedingung*

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{16}$$

identisch genügen sollen. Aus dieser Bedingung ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Transformationskoeffizienten:

$$\alpha'_{ii'} = \alpha_{ii'} \quad (i, i' = 1, 2, 3, 4), \tag{16a}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik}\alpha_{i'k} = \delta_{ii'}, \quad \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ki}\alpha_{ki'} = \delta_{ii'}, \tag{16b}$$

wobei

$$\delta_{ii'} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} \text{bei } i' = i \\ \text{bei } i' \neq i \end{matrix} \tag{16c}$$

ist.

Diese Koeffizienten definieren wir entsprechend ihrer anschaulichen geometrischen Bedeutung bei gewöhnlichen dreidimensionalen Transformationen als die Kosinus der Winkel zwischen den alten und neuen Achsen:

$$\alpha_{ii'} = \cos(X_i, X'_{i'}) = \alpha'_{ii'}.$$

Das neue System X' können wir uns entstanden denken durch eine „Drehung" des ursprünglichen Achsenkreuzes im vierdimensionalen Raum unter Erhaltung der Orthogonalität.

Es sei bemerkt, daß diese Bezeichnungen, die sich an die entsprechenden Bezeichnungen der gewöhnlichen analytischen Geometrie anschließen, in dem betrachteten Falle nichts anderes als Worte sind, denen tatsächlich kein geometrischer Sinn zukommt. Wir können aber dabei an die entsprechenden drei- oder sogar zweidimensionalen Gebilde denken und auf diese Weise die analytischen Zusammenhänge nicht nur besser auffassen, sondern zuweilen durch Analogiebetrachtungen vorhersagen. Die Größen x_1, x_2, x_3, x_4 und x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, welche die ursprünglichen bzw. neuen Koordinaten der verschiedenen Punkte des X-Raumes darstellen, brauchen dabei nicht nur reelle oder imaginäre Werte anzunehmen, sondern können ganz beliebige komplexe Zahlen sein (vgl. VI, § 4).

Diese Koordinaten wollen wir als die rechtwinkligen Komponenten des vierdimensionalen Radiusvektors $\mathfrak{r}$ fassen. Dabei wollen wir feststellen, daß die Komponenten der verschiedenen vierdimensionalen Vektoren $(\mathfrak{j}, \mathfrak{A}, \mathfrak{f})$, die wir in § 1 eingeführt haben, sich nach denselben Formeln (15), (15a) transformieren, wie die Komponenten von $\mathfrak{r}$ (also kovariant). Was die Komponenten des Differentialoperators $\Box$ betrifft, so ist ihre Kovarianz eine direkte Folge der Orthogonalität der durch diese Formeln dargestellten Transformation (ebenso wie in dem dreidimensionalen Fall). — Die Tensorkomponenten H_{kl}, Θ_{kl} sollen sich wie die Produkte der entsprechenden Koordinaten, also doppeltkovariant transformieren.

Es läßt sich leicht zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen *die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes* (2a)—(10) *gegen die durch die Formeln* (15)—(16c) *bestimmte Transformationen invariant bleiben.* Dies bedeutet: Wenn man in den alten Gleichungen die ursprünglichen Komponenten ausdrückt als Funktionen der neuen, so erhält man daraus Gleichungen derselben Gestalt für diese neuen Komponenten.

Diese Behauptung kann man leicht direkt beweisen. Wir betrachten z. B. die Gleichungen (2a) und (4). Da die Symbole $\square_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ und die Größen A_k sich wie die x_k transformieren, so bekommen wir nach (16),

$$\sum_{k=1}^{4} \square_k A_k = \sum_{k'=1}^{4} \square'_{k'} A'_{k'}$$

und folglich wegen (2a)

$$\sum_{1}^{4} \square'_k A'_k = 0 .$$

Ferner stellt das Quadrat des Operators $\square$, d. h. die Summe $\sum_{k=1}^{4} \square_k^2$, offenbar einen invarianten Operator dar. Setzen wir also in (4) ein nach (15a)

$$j_k = \sum_{k'=1}^{4} \alpha_{kk'} j'_{k'} \quad \text{und} \quad A_k = \sum_{k'=1}^{4} \alpha_{kk'} A'_{k'},$$

so wird

$$\sum_{h=1}^{4} \square_h^2 A_k = \sum_{l'=1}^{4} \square_l'^2 A_k = \sum_{k'=1}^{4} \alpha_{kk'} \sum_{l=1}^{4} \square_l'^2 A'_{k'} = -4\pi \sum_{k'=1}^{4} \alpha_{kk'} j'_{k'} .$$

Diese vier Gleichungen ($k = 1, 2, 3, 4$) kann man in der Gestalt

$$\sum_{k'=1}^{4} \alpha_{kk'} y_{k'} = 0$$

schreiben und die Größen $y_{k'} = \sum_{l=1}^{4} \square_l'^2 A'_{k'} + 4\pi j'_{k'}$ als vier Unbekannte behandeln. Da die Determinante der Koeffizienten $\alpha_{kk'}$ wegen der Bedingungen (16b) gleich 1 ist, so müssen sie identisch verschwinden und wir bekommen

$$\sum_{l=1}^{4} \square_l'^2 A'_{k'} = -4\pi j'_{k'} .$$

Die behauptete Invarianz der Grundgleichungen läßt sich aber auch auf eine viel instruktivere, indirekte Weise einsehen, und zwar aus *ihrer Symmetrie bezüglich aller vier Indizes* 1, 2, 3, 4, in Verbindung mit ihrer Invarianz für solche orthogonale Transformationen, bei welchen die vierte Achse festgehalten bleibt, die also einer gewöhnlichen Drehung des räumlichen Achsensystems $X_1 X_2 X_3$ entsprechen. Diese „räumliche" Invarianz ist eine direkte Folge und zugleich die Bedingung der

Isotropie des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes oder der Relativität aller räumlichen Richtungen. Sie kann deshalb vorausgesetzt werden. Wegen der erwähnten Symmetrieeigenschaft der Gleichungen (2a) bis (10) kann man behaupten, daß sie auch dann invariant bleiben, wenn wir eine orthogonale dreidimensionale Transformation für die Koordinaten x_2, x_3, x_4 (statt x_1, x_2, x_3) ausführen und die entsprechenden Komponenten aller vierdimensionalen Vektoren (und Tensoren) kovariant transformieren. Durch zwei aufeinanderfolgende orthogonale Transformationen je dreier Koordinaten bekommen wir aber eine Transformation aller vier Koordinaten, die auch orthogonal ist, d. h. die Bedingung (16) erfüllt.

Unter Benutzung der geometrischen Ausdrucksweise können wir also sagen, daß die *Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes invariant sind gegen alle Drehungen des vierdimensionalen Achsensystems X.* Damit ist aber die Eigenschaft der *Isotropie*, die Relativität der Richtungen von dem gewöhnlichen Raum auf den vierdimensionalen Raum übertragen. Speziell dürfen wir die „vierte" Richtung, welche die Zeitkoordinate vertritt, als relativ (unbestimmt) betrachten, und die vierten Komponenten der Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{A}$ usw., d. h. die Zeit, die Ladungsdichte, das skalare Potential, welche gewöhnlich als invariante skalare Größen angesehen werden, als *variant* behandeln, ebenso wie die räumlichen Komponenten der gewöhnlichen Vektoren. Die absoluten Beträge oder die Quadrate dieser Vektoren, z. B. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (Quadrat des räumlichen Abstandes) werden ebenfalls variante Größen und nur die Quadratsummen aller vier Komponenten, die wir als die Quadrate der entsprechenden vierdimensionalen Vektoren definieren können, sind als wirklich invariant anzusehen.

Es frägt sich nun, ob diese vierdimensionale Richtungsrelativität und die vierdimensionalen orthogonalen Transformationen, welche sie analytisch ausdrücken, einen bestimmten *physikalischen* Sinn haben oder physikalisch ganz sinnlos sind?

Damit sie einen solchen Sinn tatsächlich besitzen, ist es offenbar notwendig (aber zunächst noch nicht hinreichend), daß die transformierten Größen $t' = \frac{x_4'}{ic}$, $\varrho' = \frac{j_4'}{c}$, $\varphi' = \frac{A_4'}{i}$ usw., ebenso wie die ursprünglichen *reell* seien.

Die dieser Realitätsbedingung genügenden vierdimensionalen orthogonalen Transformationen pflegt man als *Lorentztransformationen* zu bezeichnen[1]).

Wir wollen nun zur Aufklärung der oben formulierten Frage eine einfache Lorentztransformation betrachten, bei welcher die zweite und dritte Achse festgehalten bleiben, die also einer „Drehung" in der

[1]) Nach *H. A. Lorentz*, der sie zum erstenmal — und zwar in einer dreidimensionalen Schreibweise — eingeführt hat.

X_1X_4-Ebene entspricht. Die allgemeinen Transformationsformeln (15) und (15a) reduzieren sich in diesem Fall auf

$$x_1' = \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{41}\, x_4$$
$$x_4' = \alpha_{41}\, x_1 + \alpha_{44}\, x_4$$

oder

$$x_1 = \alpha_{11}\, x_1' + \alpha_{14}\, x_4'$$
$$x_4 = \alpha_{41}\, x_1' + \alpha_{44}\, x_4'$$

und $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$.

Wir denken uns für einen Augenblick X_4 als eine gewöhnliche zu X_1 senkrechte Achse und die betrachtete Transformation als eine Drehung um einen Winkel φ in der Richtung von X_4 nach X_1. Dann haben wir $\alpha_{11} = \cos(X_1X_1') = \cos\varphi$,

$$\alpha_{14} = \cos(X_1X_4') = \sin\varphi\,, \quad \alpha_{41} = \cos(X_4X_1') = -\sin\varphi\,,$$
$$\alpha_{44} = \cos(X_4X_4') = \cos\varphi\,,$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\varphi - x_4\sin\varphi \\ x_4' &= x_1\sin\varphi + x_4\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1'\cos\varphi + x_4\sin\varphi \\ x_4 &= -x_1'\sin\varphi + x_4'\cos\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

Damit bei $x_4 = ict$ x_1' reell und x_4' imaginär ($= ict'$, wo t' eine reelle Größe bedeutet) werden, muß man den Winkel φ als eine rein imaginäre Größe definieren. Wir brauchen aber nicht diesen Winkel selbst, sondern nur seinen Tangens zu betrachten. Wir setzen nämlich

$$\operatorname{tg}\varphi = -i\beta = \frac{v}{ic} \tag{17b}$$

wo $\beta = \frac{v}{c}$ eine *reelle* Größe ist (dies entspricht $\varphi = i\psi$, $\operatorname{tg}\psi = -\beta$). Dabei wird nach (17)

$$x_1' = \cos\varphi\,(x_1 - vt), \quad ict' = \cos\varphi\left(ict - i\frac{v}{c}x_1\right),$$

d. h. wegen

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v\,x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{18}$$

und ebenso nach (17a) (oder durch Auflösen von (18) in bezug auf x_1 und t)

$$x_1 = \frac{x_1' + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{t + \frac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{18a}$$

Zur Sicherung der Realität von x_1' und t' bleibt noch übrig, den Parameter β der Bedingung $\beta < 1$ zu unterwerfen, d. h.

$$v < c \tag{18b}$$

zu setzen.

Die Größe v hat offenbar ebenso wie c die Bedeutung einer *Geschwindigkeit.* In dem Grenzfalle, daß sie sehr klein gegen c (= Lichtgeschwindigkeit) ist, reduzieren sich die Formeln (18) auf

$$x_1' = x_1 - vt, \quad t' = t, \tag{19}$$

d. h. auf die gewöhnlichen Formeln für den Übergang von dem ursprünglichen räumlichen Koordinatensystem $(X_1 X_2 X_3)$ auf ein anderes $(X_1' X_2 X_3)$, das gleichorientiert ist und sich relativ zu $(X_1 X_2 X_3)$ mit der konstanten Geschwindigkeit v in der positiven X_1-Richtung bewegt; die Anfangspunkte der beiden Systeme O und O' müssen dabei in dem „Anfangsmoment" $t = t' = 0$ zusammenfallen.

Dementsprechend bekommen wir für die (1, 4)-Komponenten des „Viererstromes" $\mathfrak{j}$ und des Viererpotentials $\mathfrak{A}$:

$$j_1' = j_1 - \frac{v}{c}\varrho, \quad \varrho' = \varrho \tag{19a}$$

$$A_1' = A_1 - \frac{v}{c}\varphi, \quad \varphi' = \varphi. \tag{19b}$$

Diese aus dem Kovarianzprinzip folgenden (angenäherten) Gleichungen stimmen ebenfalls mit den gewöhnlichen Formeln für die durch (19) bestimmte Transformation überein.

Wir sehen also, daß in der betrachteten Näherung die Drehung der „Zeitachse" X_4 (mit einer der „räumlichen" Achsen) um einen imginären Winkel im vierdimensionalen Raum physikalisch nichts anderes bedeutet, als den Übergang von Ruhezustand des räumlichen Achsensystems zu einer *geradlinig-gleichförmigen Bewegung.*

Da nun die beiden Achsen X_4 und X_4' mit demselben Recht die Zeit vertreten können, darf man offenbar mit demselben Recht das räumliche Koordinatensystem $(X_1 X_2 X_3)$ als „ruhend" und $(X_1' X_2 X_3)$ als „bewegt" ansehen oder umgekehrt $(X_1' X_2 X_3)$ als ruhend und $(X_1 X_2 X_3)$ als bewegt — und zwar in der entg egengesetzten Richtung. Die *Relativität der Richtungen und speziell der Richtung der Zeitachse im vierdimensionalen Raum bedeutet also nichts anderes als die Relativität der Geschwindigkeit im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume.*

Es sei erinnert, daß dieses kinematische Relativitätsprinzip von uns schon in Kap. V bei der Verallgemeinerung der „Energiegleichung" rot $\mathfrak{E} = 0$ für zeitlich wechselnde Felder postuliert wurde — aber in einem etwas engeren Sinne. Und zwar handelte es sich dort um die Bewegung zweier Stromlinien *relativ zueinander,* während die jetzt behauptete Relativität der Geschwindigkeit bedeutet, daß die elektromagnetischen Erscheinungen sich auf eine ganz identische Weise abspielen bezüglich zweier *Koordinatensysteme,* die sich relativ zueinander geradlinig-gleichförmig bewegen —, so daß keine Möglichkeit vorhanden ist, aus diesen Erscheinungen zu schließen, welches System sich „wirklich" bewegt. Mit anderen Worten, der *Betrag der Geschwindigkeit ist etwas ebenso Relatives wie ihre Richtung.*

Nun scheint aber diese der Isotropie des vierdimensionalen Raumes entsprechende Relativität der Geschwindigkeit nur angenähert zu bestehen, nämlich für den Grenzfall solcher Geschwindigkeiten, die sehr klein gegen die „kritische" Geschwindigkeit c sind. Will man sie als ein ganz *strenges* und allgemeingültiges physikalisches Gesetz fassen, so stößt man auf die folgenden Schwierigkeiten.

Man muß die Geschwindigkeiten von vornherein durch die Bedingung $v < c$ einschränken, d. h. solche Geschwindigkeiten, die größer als c sind, nicht nur als *physikalisch*, sondern als *prinzipiell unmöglich* ansehen.

Damit ferner die elektromagnetischen Erscheinungen sich nach denselben Gesetzen (d. h. nach denselben Gleichungen) abspielen vom Standpunkte zweier Beobachter, die mit den Koordinatensystemen $(X_1 X_2 X_3)$ und $(X_1' X_2 X_3)$ mitbewegt sind, muß die Bestimmung der Längen in der Bewegungsrichtung und der Zeiten nicht nach den gewöhnlichen sogenannten *Galilei*schen Transformationsformeln (19) geschehen, sondern gemäß den *Lorentz*schen Formeln (18). Es müssen also für die beiden Beobachter X und X' *verschiedene Zeiten* gelten. Solche Ereignisse, die dem einen von ihnen als gleichzeitig erscheinen, müssen von dem anderen als ungleichzeitig betrachtet werden; im allgemeinen soll der *Zeitabstand* zwischen zwei ganz bestimmten Ereignissen eine ebenso unbestimmte *variante* Größe sein wie der Längenabstand zwischen den Raumpunkten, wo diese Ereignisse stattgefunden haben. Dabei ist folgendes zu beachten. Die Unbestimmtheit oder Varianz solcher Längenabstände für *nicht gleichzeitige* Ereignisse ist eine altbekannte und ganz natürlich erscheinende Tatsache. Wir denken z. B. an einen Stein, der auf einem bewegten Schiffe von hinten nach vorn geworfen wird. Der Abstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkt seiner Bahn wird von den mitbewegten Beobachtern ganz anders beurteilt als von den auf dem Land ruhenden Beobachtern, die noch die Verschiebung des Schiffes während des Fliegens des Steines in Betracht ziehen. Diese Tatsache wird durch die *Galilei*schen Transformationsgleichungen $x_1' = x - vt$, $t' = t$ ganz klar ausgedrückt. Bezeichnet man nämlich den räumlichen und zeitlichen Abstand zwischen den erwähnten Ereignissen (Abwerfen und Fallen des Steines) vom Standpunkte der ruhenden und der mitbewegten Beobachter durch Δx_1, Δt bzw. $\Delta x_1'$, $\Delta t'$, so wird nach den obigen Formeln:

$$\Delta t' = \Delta t, \quad \Delta x_1' = \Delta x_1 - v \Delta t.$$

Handelt es sich aber um zwei *gleichzeitige* Ereignisse in verschiedenen Raumpunkten, so erscheint der räumliche Abstand eine ganz bestimmte *invariante*, von der relativen Geschwindigkeit unabhängige Größe zu sein $(\Delta t = 0,\ \Delta x_1' = \Delta x_1)$.

Dagegen bleibt nach den *Lorentz*schen Formeln (18) der räumliche Abstand zwischen zwei Ereignissen auch im Falle ihrer „Gleichzeitig-

keit" eine variante Größe. Dies hängt offenbar damit zusammen, daß der erwähnten „Gleichzeitigkeit" keine absolute Bedeutung zukommt, wegen der *Relativität der Zeit*, die der Relativität der Richtung der Zeitachse im vierdimensionalen Raum entspricht. Eng verknüpft mit dieser Relativität — oder genauer gesprochen dieser *Varianz* — der Zeit, ist nach der Lorentztransformation die Varianz solcher Größen wie die Ladungsdichte, das skalare Potential usw. — oder der Beträge der dreidimensionalen Vektoren — d. h. solcher Größen, die gewöhnlich als invariante Skalare betrachtet werden.

§ 3. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip.

Es ist erkenntnistheoretisch von vornherein klar, daß die *Bewegung* ein *relativer* Begriff ist, d. h. daß die Bewegung irgendeines Körpers oder die Fortpflanzung einer Wirkung nur relativ zu einem Koordinatensystem definiert werden kann, das man *ganz willkürlich* als „ruhend" behandelt. Dementsprechend müssen alle die Bewegung charakterisierenden Größen — Geschwindigkeit, Beschleunigung usw. — *variant* sein, d. h. von der Wahl dieses Koordinatensytems abhängen. In den vorhergehenden Kapiteln haben wir von diesem Umstand absichtlich abgesehen und die Geschwindigkeit als eine „absolut" bestimmte Größe behandelt, d. h. stillschweigend ein Koordinatensystem zugrunde gelegt, das als „ruhend" in einem absoluten Sinne dieses Wortes vorausgesetzt wurde.

Wäre der *ganze Raum* von einem kontinuierlichen materiellen Medium erfüllt — wie man es früher glaubte und manchmal heute noch behauptet, wobei dieses Medium als „Äther" bezeichnet wird — dessen Teile relativ zueinander in ewiger Ruhe bleiben sollten, so könnte man den Begriff der Ruhe physikalisch eindeutig definieren, als Ruhe relativ zu diesem „Äther". Das würde keine „absolute" Ruhe in dem erkenntnistheoretischen Sinne des Wortes sein, denn man könnte noch irgendwelche Bewegungen des „Äthers" als eines festen Ganzen im Raume relativ zu etwas anderem in Betracht ziehen. Solche Bewegungen könnten aber den Physiker gar nicht interessieren und Ruhe im bezug auf den „Äther" wäre für ihn gleichbedeutend mit absoluter Ruhe.

In Wirklichkeit aber gibt es keine vernünftigen Gründe, den Raum mit einem solchen Medium anzufüllen. Die materielle Welt besteht aus lauter Elektronen, die aufeinander durch den leeren Raum wirken. Diese Fernwirkung der modernen Elektronentheorie unterscheidet sich von der „Actio in distans" der klassischen Mechanik nur dadurch, daß sie nicht „momentan", sondern *retardiert* ist. Die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen hat gerade den Anlaß gegeben, sie aufzufassen als eine „Nahewirkung im Weltäther" — von derselben Art, wie die Fortpflanzung des Schalles in der Luft oder der elastischen Schwingungen in festen Körpern.

Es sei nun daran erinnert, wie diese „Nahewirkung" in der klassischen Mechanik, an welche sich die erwähnte „Äthertheorie" anschließt, behandelt wird. Man betrachtet zunächst den Körper nicht als ein kontinuierliches Medium, sondern als ein System von diskreten Massenpunkten (Atomen), die sich voneinander in *endlichen* — obwohl sehr kleinen — Abständen befinden. Die Wechselwirkung zwischen diesen Massenpunkten wird also als eine *Fernwirkung* behandelt — und zwar als eine *momentane* Fernwirkung, denn die Kraft, welche auf irgendein Teilchen ausgeübt wird, ist durch die *gleichzeitige* Lage der anderen — hauptsächlich der Nachbarteilchen — bestimmt. Nimmt man an, daß diese Kraft sich proportional der relativen Verschiebung der Teilchen ändert, so bekommt man in bekannter Weise eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die „Störungen" in der normalen Gleichgewichtslage der Teilchen. Der nachher gemachte Grenzübergang zu unendlich kleinen Teilchen und unendlich kleinen Abständen, d. h. zur Kontinuumstheorie, stellt eine bloße mathematische Fiktion dar.

Die „Nahewirkung" der klassischen Mechanik bedeutet also nichts anderes als die übliche „momentane Fernwirkung". Der Umstand, daß letztere in sehr kleinen Abständen („klein" gegenüber unseren gewöhnlichen makroskopischen Maßstäben) stattfindet, ist prinzipiell unwesentlich.

Die retardierte Fernwirkung der modernen „Elektromechanik" kann zwar ganz formal auf eine momentane Fernwirkung zurückgeführt werden (vgl. VI § 5), aber die entsprechenden Reihenentwicklungen haben keinen unmittelbaren physikalischen Sinn. Es ist deshalb sinnlos und nutzlos, die retardierten elektromagnetischen Fernwirkungen auf etwas anderes zurückzuführen zu versuchen. Wir können vielmehr behaupten, daß alle physikalischen Kräfte — insofern sie letzten Endes eine Wechselwirkung zwischen verschiedenen Elektronen darstellen — als *elektromagnetische Fernwirkungen anzusehen sind, die sich im leeren Raum mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit* $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek *fortpflanzen.*

Diese Tatsache muß man als ein grundsätzliches Prinzip anerkennen, das eine „Erklärung" weder braucht noch zuläßt. Denn „erklären" bedeutet: auf etwas einfacheres und mehr fundamentales zurückführen. Eine solche Zurückführung ist aber für die Grundtatsachen offenbar unmöglich.

Da der Raum, abgesehen von den (praktisch punktförmigen) Elektronen, leer ist, kann man nur von *relativer Bewegung* und *relativer Ruhe* sprechen. Die physikalischen Vorgänge von zwei relativ zueinander willkürlich bewegten Koordinatensystemen beurteilt, müssen denselben Gesetzen genügen; mit anderen Worten — die diese Gesetze ausdrückenden Gleichungen zwischen den räumlichen Koordinaten und der Zeit einerseits und verschiedenen varianten Größen, die die Kompo-

nenten bestimmter Vektoren und Tensoren darstellen, andererseits, müssen für die beiden Systeme eine identische Gestalt haben. Wir wollen uns nun auf solche Koordinatensysteme beschränken, die sich relativ zueinander *geradlinig gleichförmig* bewegen — sogenannte „*Inertialsysteme*". Das allgemeine Relativitätsprinzip der Bewegung reduziert sich in diesem Spezialfall auf das Prinzip der Relativität der *Geschwindigkeit*. Dieses „spezielle" Relativitätsprinzip war in der klassischen Mechanik schon seit *Newton* anerkannt[1]). Seine Übertragung auf die Elektrodynamik und die entsprechende Umformung der *Newton*schen Mechanik ist das Verdienst *A. Einstein*s. Es ist ihm bekanntlich auch gelungen, das Relativitätsprinzip für beliebige Bewegungen zu verallgemeinern unter Zugrundelegung der Äquivalenz zwischen den Trägheitskräften, die mit einer beschleunigten Bewegung verknüpft sind, und den Gravitationskräften. Auf diese allgemeine Relativitätstheorie, die sich hauptsächlich mit den Gravitationswirkungen beschäftigt, wollen wir aber in diesem Buche nicht eingehen.

Der wesentliche Unterschied zwischen der klassischen und der *Einstein*schen Relativitätstheorie rührt von dem Umstand her, daß in der letzteren die *Endlichkeit* der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromechanischen Fernwirkungen berücksichtigt ist, während in der ersten diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit sozusagen als unendlich groß angenommen wurde.

Und zwar folgt aus dem Relativitätsprinzip, daß diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Inertialsystemen $S\,(X_1 X_2 X_3)$ und $S'\,(X_1' X_2' X_3')$ *denselben Betrag c und speziell für jedes System denselben Betrag für alle Richtungen haben muß.*

Wäre z. B. die letzte Forderung nicht erfüllt, so könnte man behaupten, daß dasjenige System (S), in bezug auf welches das Licht sich nach allen Seiten mit derselben Geschwindigkeit c ausbreitet, „wirklich" ruht, während das andere, in bezug auf welches dies nicht geschieht, sich „wirklich" bewegt — in der Richtung nämlich, die der kleinsten Geschwindigkeit des Lichtes entspricht. Da nun aber die Systeme S und S' vollkommen gleichberechtigt sein sollen, muß der Vorgang der Lichtausbreitung bezüglich der beiden auf dieselbe Weise, d. h. mit derselben Geschwindigkeit c nach allen Richtungen stattfinden.

Wir sehen also, daß die kritische Geschwindigkeit c, obwohl sie, wie jede andere Geschwindigkeit nur einen *relativen Sinn* hat, d. h. nur relativ zu irgendeinem als „ruhend" angesehenen Bezugssystem definiert werden kann, *trotzdem als eine invariante Größe anzusehen* ist.

Diese Invarianz der kritischen Geschwindigkeit ist offenbar mit unseren gewöhnlichen, sich an die klassische Mechanik anknüpfenden Raumzeitvorstellungen unvereinbar. Ersetzt man z. B. in dem oben

[1]) Obwohl *Newton* selbst von einem „absolut ruhenden Raum" sprach.

betrachteten Fall eines bewegten Schiffes den geworfenen Stein durch ein Licht- oder Radiosignal, so muß es sich bezüglich des Schiffes nach vorn und nach hinten, nach rechts und nach links mit *derselben* Geschwindigkeit c fortpflanzen, wie bezüglich der am Ufer stehenden Beobachter. Dies kann offenbar nur dann geschehen, wenn die Längen und Zeiten in den entsprechenden Bezugssystemen verschieden gemessen werden und wenn speziell dem Begriff der Gleichzeitigkeit nur eine relative Bedeutung zugeschrieben wird. — Solange man dachte, daß die mechanischen Fernwirkungen momentan sind und daß durch die Wirkung eines Körpers auf die anderen sie alle, wie groß ihre räumlichen Entfernungen auch sein mögen, in der Zeit miteinander sozusagen vereinigt werden könnten — schien die „Relativierung" der Gleichzeitigkeit physikalisch ausgeschlossen zu sein. Sobald aber der retardierte Charakter der mechanischen Fernwirkungen erkannt ist, wird diese Relativierung nicht nur möglich, sondern unentbehrlich. Denn es fehlt jede physikalische Möglichkeit, die Gleichzeitigkeit zweier räumlich getrennter Ereignisse z. B. auf den Planeten Mars und Jupiter eindeutig festzustellen.

Wir sind schon lange daran gewöhnt, der *räumlichen* Koinzidenz zweier nicht gleichzeitiger Ereignisse keinen absoluten Sinn zuzuschreiben; wir müssen einen solchen absoluten Sinn der zeitlichen Koinzidenz zweier räumlich verschiedenen Ereignisse ebenfalls ablehnen. Eine wirklich absolute Koinzidenz kann nur die Koinzidenz in Raum *und* Zeit sein.

Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, daß die Grundgleichungen der Elektrodynamik mit dem speziellen Relativitätsprinzip nur dann in Einklang sein können, wenn man die räumlichen Koordinaten und die Zeit nicht nach den *Galilei*schen Formeln (19), sondern nach den *Lorentz*schen, die sich im einfachsten Falle auf (18) oder (18a) reduzieren, transformiert. Die angeführten Überlegungen sollten uns von der physikalischen Zulässigkeit dieser Transformationsformeln überzeugen. Es sei bemerkt, daß wir dabei unsere gewöhnlichen Raum-Zeit-Begriffe, soweit sie sich auf ein *bestimmtes Inertialsystem* beziehen, *gar nicht zu verändern brauchen*. Die Lorentztransformation stellt nur, nach *Einstein*, eine neue, ungewöhnte *Verknüpfung* dar zwischen diesen üblichen Raum-Zeit-Größen für *zwei verschiedene Inertialsysteme*.

Die Invarianz der kritischen Geschwindigkeit ist dabei sozusagen automatisch gesichert, denn sie spielt in den Formeln, in welche sie eingeht, die Rolle eines konstanten Parameters.

Wir wollen nun zeigen, daß die Lorentztransformation *eine notwendige Folge dieser Invarianz* ist; sie kann daraus, ganz unabhängig von den allgemeinen elektrodynamischen Gesetzen, aber mit Rücksicht auf die Relativität der Geschwindigkeit (d. h. der geradlinig-gleichförmigen Bewegung) abgeleitet werden.

Die kräftefreie geradlinig-gleichförmige Bewegung irgendeines Teilchens in bezug auf das Koordinatensystem S drückt sich analytisch durch die linearen Gleichungen aus:

$$\frac{x_1-a_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-a_2}{\alpha_2}=\frac{x_3-a_3}{\alpha_3}=\frac{t-t_0}{\alpha_0},$$

wo a, α usw. Konstante bedeuten.

Von einem anderen Koordinatensystem S', das sich relativ zu S mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, beurteilt, muß diese kräftefreie Bewegung auch geradlinig-gleichförmig erscheinen, d. h. ebenfalls durch das lineare Gleichungssystem

$$\frac{x_1'-a_1'}{\alpha_1'}=\frac{x_2'-a_2'}{\alpha_2'}=\frac{x_3'-a_3'}{\alpha_3'}=\frac{t'-t_0'}{\alpha_0'}$$

bestimmt werden.

Daraus folgt, daß die Größen x_1, x_2, x_3, t einerseits und x_1', x_2', x_3', t' andererseits sich durcheinander *linear* ausdrücken müssen.

Wir nehmen an, daß in einem bestimmten Augenblick $t=t'=0$ die Anfangspunkte von S und S' (O bzw. O') zusammenfallen, und stellen uns ferner vor, daß in diesem Augenblick aus O (bzw. O') ein Licht- oder Funksignal ausgesandt wird. Dieses Signal muß sich bezüglich S und S' in der Gestalt einer Kugelwelle mit derselben Geschwindigkeit c ausbreiten; der Mittelpunkt dieser Kugelwelle muß dabei für S in dem Punkte O, dagegen für S' im Punkte O' bleiben.

Wir denken uns nun, daß die betrachtete Kugelwelle irgendein Teilchen trifft. Die Koordinaten und die Zeit dieses Ereignisses seien x_1, x_2, x_3, t in S und x_1', x_2', x_3', t' in S'. Dabei müssen die beiden Gleichungen

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2=0,$$
$$x_1'+x_2'^2+x_3'^2-c^2t'^2=0$$

erfüllt sein, folglich auch die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2t^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-c^2t'^2,$$

oder mit den Bezeichnungen $ict=x_4$, $ict'=x_4'$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2. \qquad (20)$$

Wir haben soeben gesehen, daß die Beziehungen zwischen den alten und neuen Koordinaten (einschließlich der vierten) linear sein müssen, d. h. sich durch die Formeln

$$x_{k'}'=\sum_{k=1}^{4}\beta_{kk'}x_k \qquad (k'=1,2,3,4) \qquad (20\,a)$$

ausdrücken, wo $\beta_{kk'}$ konstante Koeffizienten sind, die von der Größe und Richtung der Geschwindigkeit v von S' relativ zu S und auch von der relativen Orientierung der beiden Systeme abhängen.

Daraus folgt, daß die beiden Summen $\sum_{k=1}^{4}x_k'^2$ und $\sum_{k=1}^{4}x_k^2$ auch dann identisch sein müssen, wenn sie von Null verschieden sind, d. h. wenn das

betrachtete Ereignis nicht das Zusammentreffen der obigen Welle mit einem Teilchen, sondern etwas anderes, z. B. das Zusammentreffen zweier verschiedener Teilchen miteinander bedeutet.

In der Tat, durch Einsetzen der Ausdrücke (20a) in $\sum_{k'=1} x_{k'}^2$ bekommen wir eine quadratische Form der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, die mit $\Sigma x_k'^2$ verschwindet. Dabei muß aber nach (20) auch die quadratische Form $\sum_k x_k^2$ verschwinden. Die beiden Formen können sich deshalb nur durch einen konstanten Proportionalitätsfaktor unterscheiden. Dieser Faktor A kann von dem Betrag, nicht aber von der Richtung der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von S' gegen S abhängen. Nun ist die Geschwindigkeit von S relativ zu S' offenbar *entgegengesetzt gleich* der Geschwindigkeit von S' relativ zu S. Wenn folglich $\sum_{k'} x_{k'}'^2 = A(v) \sum_k x_k^2$ gilt, so muß auch $\sum_k x_k^2 = A(v) \sum_{k'} x_{k'}'^2$ gelten. Es ist also $A(v) = 1$. Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (20) für *beliebige* x_k und entsprechende $x_{k'}'$ bestehen bleibt. Wir haben also die Orthogonalitätsbedingung wiedergefunden, welche für die allgemeine Lorentztransformation gilt. Fügt man noch dazu die Realitätsbedingung für x_1', x_2', x_3' und $t' = \frac{x_k'}{ic}$, so müssen die Gleichungen (20a) eine Lorentztransformation liefern.

Statt also die Lorentztransformation aus den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes abzuleiten, wie wir es in § 2 nach *Minkowski* getan haben, kann man sie direkt aus dem Relativitätsprinzip in Verbindung mit dem retardierten Charakter der elektromagnetischen Fernwirkungen (oder, wie man es gewöhnlich ausdrückt, mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) erhalten. Auf diese Weise wurde sie von *Einstein* 1905 aufgestellt. Dabei entsteht die Möglichkeit, das *Minkowski*sche Verfahren rückgängig zu machen, d. h. die elektrodynamischen Grundgleichungen *aus dem Relativitätsprinzip* (mit Rücksicht auf die Kovarianzeigenschaft) abzuleiten, oder jedenfalls plausibel zu machen ohne Zuhilfenahme irgendwelcher anderer Prinzipien.

Das Relativitätsprinzip kann man auch benützen für die Verallgemeinerung solcher physikalischer Gesetze, welche sich auf den Spezialfall statischer Erscheinungen beziehen, auf beliebige von der Zeit abhängige Erscheinungen — wie wir es schon in Kap. V getan hatten, aber auf eine viel einfachere und systematischere Weise. Betrachtet man z. B. die Gleichung für stationäre elektrische Ströme $\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathfrak{j}$ als bewiesen, so folgt sofort aus dem Relativitätsprinzip, daß die allgemeine Gleichung die Gestalt $\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} = -4\pi j_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ haben muß. — Schließlich läßt sich das Relativitätsprinzip oder die Lorentztransfor-

mation immer dann anwenden, wenn der Einfluß der Geschwindigkeit auf irgendeine Erscheinung, die für den Ruhezustand des betreffenden elektrischen Systems bekannt ist, aufgestellt werden soll.

Wir werden im folgenden einige solche methodologische Anwendungen des Relativitätsprinzips kennen lernen. Es sei bemerkt, daß seine grundlegende Bedeutung für die Physik gerade in dieser Richtung liegt und nicht in der erkenntnistheoretischen Kritik der Raum- und Zeitbegriffe. Das Relativitätsprinzip (kombiniert mit der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit) beginnt mit der „Relativierung" solcher Größen, die bisher als invariante Skalare angesehen wurden (die Zeit, die Ladungsdichte, der Betrag eines gewöhnlichen Vektors usw.); dann aber faßt es diese varianten Größen als Komponenten (oder Projektionen) von vierdimensionalen Vektoren und Tensoren zusammen und schließlich lehrt es, wie man daraus wirklich invariante Größen und Gleichungen, die die Naturgesetze für zeitlich veränderliche Erscheinungen ausdrücken, erhalten kann.

Der Schwerpunkt der Relativitätstheorie liegt gerade in dieser „konstruktiven" methodologischen Seite und nicht in der „destruktiven" kritischen. Das Hauptergebnis ist nicht die Varianz der gewöhnlichen Skalare und räumlichen Vektoren, sondern die Möglichkeit, sie als „zeitliche" bzw. „räumliche" Projektionen von invarianten vierdimensionalen „Raumzeitvektoren" zu behandeln. In diesem Sinne könnte man die Relativitätstheorie mit vollem Recht als „Absoluttheorie" bezeichnen.

§ 4. Graphische Darstellung der Bewegung und neue Ableitung der Lorentztransformation.

Bevor wir zur Diskussion der Transformationsformeln (18) übergehen, wollen wir sie nochmals aus dem *Einstein*schen Relativitätsprinzip ableiten in einer anschaulichen geometrischen Weise, die sich an die übliche graphische Darstellung der Bewegung anschließt.

Die Bewegung eines Teilchens (oder die Fortpflanzung einer Wirkung) in einer Ebene E $(X_1 X_2)$ kann bekanntlich geometrisch veranschaulicht werden mittels eines räumlichen Koordinatensystems XYZ, wobei die Ebene E durch die Koordinatenebene XY dargestellt wird und die Zeit t durch die dritte Achse Z. Letztere braucht dabei *nicht* notwendig senkrecht zu der Ebene XY — die wir als „horizontal" bezeichnen werden — gerichtet sein. Der Einfachheit halber werden wir uns auf geradlinige Bewegungen parallel zur X-Achse (oder genauer zu der durch diese Achse repräsentierten Gerade X_1) beschränken, und die Y-Achse außer acht lassen. Damit die beiden Koordinaten x und z dieselbe Dimension haben, werden wir $z = kt$ setzen, wo k einen zunächst ganz willkürlichen Koeffizienten von der Dimension einer Geschwindigkeit bedeutet.

Den Winkel XOZ bezeichnen wir mit ω (Abb. 35). Die Bewegung eines Teilchens parallel zur Gerade X_1 stellt sich graphisch dar durch eine Linie in der Ebene XZ. Einer *gleichförmigen* Bewegung mit der Geschwindigkeit v entspricht dabei eine *gerade* Linie

$$\frac{x-x_0}{v}=\frac{z-z_0}{k}.$$

Die Koordinaten x und z fassen wir als die *Komponenten* (nicht aber die Projektionen!) des Radiusvektors OQ, welcher vom „Nullpunkt" $x=z=0$ zum betrachteten „Raumzeitpunkt" Q gezogen ist. In dem Falle, daß $x_0=z_0=0$ ist, hat man

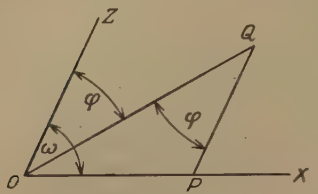

Abb. 35.

$$\frac{v}{k}=\frac{x}{z}=\frac{OP}{PQ}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}$$

d. h.

$$v=k\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}, \qquad (21)$$

wo φ den Neigungswinkel der die Bewegung darstellenden „kinematischen Gerade" OQ zur Zeitachse OZ bedeutet. Diese Formel bleibt selbstverständlich auch dann gültig, wenn die erwähnte Gerade nicht durch den Nullpunkt geht; alle gleichförmigen Bewegungen, die dieselbe Geschwindigkeit haben, sind also durch parallele Gerade repräsentiert, deren Neigung zur Z-Achse mit der Geschwindigkeit zunimmt.

Die betrachtete Darstellung der Bewegungen in der Ebene E und speziell auf der Geraden X_1 entspricht einem bestimmten in dieser Ebene liegenden Koordinatensystem S (X_1X_2), das als *ruhend* angesehen wird. Von einem anderen, in der X_1-Richtung gleichförmig bewegten Koordinatensystem S' $(X_1'X_2')$ beurteilt, muß dieselbe Bewegung bezüglich des Achsensystems XYZ anders dargestellt werden. Und zwar muß irgendein Ereignis, das von S beurteilt durch den Punkt D repräsentiert wird, von S' beurteilt durch einen anderen Punkt D' vertreten werden. Bewegt sich z. B. S' relativ zu S mit derselben Geschwindigkeit v, wie das oben betrachtete Teilchen, so müssen wir die Gerade OQ durch eine mit der Zeitachse OZ zusammenfallende Gerade OQ' ersetzen.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß dieselben Ereignisse und Bewegungen in der Ebene E von verschiedenen kinematischen Standpunkten beurteilt durch *dieselben* Punkte und Linien in dem Koordinatenraum XYZ dargestellt werden können, falls man dabei als Vertreter des „bewegten" Systems S' neue Achsen $X'Y'Z'$ einführt, die zu den alten passend geneigt sind und eventuell einen neuen Maßstab haben. In der Tat müssen die auf das ursprüngliche Koordinatensystem bezogenen Koordinaten der Raumzeitpunkte $D\,(x,\ z)$ und $D'\,(x',\ z')$ $(y=y')$ miteinander durch *lineare* Beziehungen verknüpft sein (denn eine Bewegung, die geradlinig gleichförmig in S erscheint, muß es auch in S' bleiben,

vgl. § 3). Diese linearen Beziehungen kann man aber als die Transformationsformeln behandeln, welche neue Achsen $X'Z'$ bestimmen, derart, daß die Koordinaten (x, z) und (x', z') *demselben* Punkt zugeordnet sind[1]).

Die neue Z'-Achse muß offenbar mit der Geraden OQ zusammenfallen, welche die Bewegung von S' relativ zu S darstellt. Umgekehrt muß dabei die alte Zeitachse OZ die Bewegung von S relativ zu S' darstellen, also eine Bewegung mit der Geschwindigkeit $v' = -v$ (in der X_1-Richtung). Aus dieser Beziehung zwischen v' und v (die vielleicht als ein spezielles „Verknüpfungsprinzip" angesehen werden darf) ergibt sich in Verbindung mit der Formel (21) eine Beziehung zwischen den beiden Koordinatenwinkeln ω und ω' ($\sphericalangle X'OZ'$). Setzt man nämlich $\varphi' = -\varphi$, so wird nach (21)

$$v' = k' \frac{\sin \varphi'}{\sin (\omega' - \beta')} = -k' \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega' + \varphi)},$$

d. h. wegen

$$v' = -v = -\frac{k \sin \varphi}{\sin (\omega' - \varphi)}$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{\sin (\omega' + \varphi)}{\sin (\omega - \varphi)}.$$

Die Koeffizienten k und k' sind von den Maßstäben oder genauer von dem *Verhältnis* der Maßstäbe abhängig, die in XZ bzw. $X'Z'$ für die Längen- und Zeiteinheit gebraucht werden. Wegen der vollkommenen Gleichberechtigung des „ruhenden" und „bewegten" Bezugssystems müssen wir aber $k = k'$ setzen. Dies führt zu der Gleichung

$$\frac{\sin (\omega' + \varphi)}{\sin (\omega - \varphi)} = 1, \tag{21a}$$

die zwei und nur zwei Lösungen hat, nämlich

$$\omega' = \omega - 2\varphi \tag{21b}$$

und

$$\omega' = \omega = \frac{\pi}{2}, \tag{21c}$$

Wir müssen also bei einer Drehung der Z-Achse um den Winkel φ die X-Achse um denselben Winkel drehen, und zwar entweder ihr *entgegen* oder in derselben Richtung; in letzterem Falle muß das ursprüngliche Koordinatensystem und also auch das neue *rechtwinklig* sein.

Wir wollen zunächst diese zweite Lösung betrachten. Dabei bekommt man eine sehr anschauliche Beziehung zwischen dem „kinematischen" und dem „geometrischen" Relativitätsprinzip, d. h. der Relativität der Geschwindigkeit und der Relativität der Richtung. — In dem ursprünglichen Koordinatensystem XZ haben wir die X-Achse als „horizontal" bezeichnet. Dementsprechend müssen wir die Zeitachse durch eine vertikale Gerade OZ darstellen. Die vertikale Richtung hat dabei

[1]) Eine solche Transformation wird im allgemeinen „affin" genannt.

die Bedeutung der *Ruhe*, oder einer „Bewegung in der Zeit" bei einer Ruhe im Raum. Der Übergang von dem „ruhenden" Koordinatensystem X_1X_2 zum „bewegten" $X_1'X_2'$ drückt sich geometrisch aus durch eine Drehung des „vertikal-horizontalen" Koordinatensystems XZ in die „geneigte" Lage $X'Z'$. Die Frage: welches der beiden Systeme X_1 und X_1' sich *wirklich* bewegt, bleibt ebenso sinnlos wie die Frage, welches der beiden Systeme XZ und $X'Z'$ wirklich geneigt ist: wir können die neue Zeitachse OZ' ebensogut als Vertikale und die alte OZ als eine geneigte Gerade behandeln wie umgekehrt. Diese Beziehung zwischen den Begriffen „ruhend" oder „bewegt" einerseits und „vertikal" oder „geneigt" andererseits weist darauf hin, daß solche Größen wie die *Länge* und die *Zeitdauer*, d. h. die Raum- und Zeitabstände zwischen zwei Ereignissen, in demselben Sinne als relativ oder *variant* anzusehen sind, wie die horizontale und vertikale Komponente der Verbindungsgerade zweier verschiedener Raumpunkte.

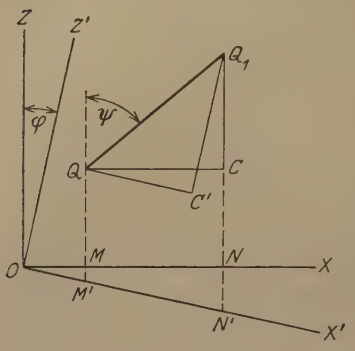

Abb. 36.

Wir stellen uns irgend zwei Ereignisse vor, z. B. das Abwerfen und Fallen eines Steines in dem oben betrachteten Beispiel des bewegten Schiffes. Diese Ereignisse seien von einem ruhenden Beobachter durch die Punkte Q und Q_1 graphisch dargestellt (Abb. 36) in bezug auf ein Koordinatensystem XZ mit horizontaler Längsachse OX und vertikaler Zeitachse OZ. Der räumliche Abstand zwischen den beiden Ereignissen wird dabei durch die Strecke $QC = \xi$ — den „horizontalen Abstand" zwischen Q und Q_1 — dargestellt; der entsprechende Zeitabstand τ, d. h. die Dauer des Fliegens, durch die mit $\frac{1}{k}$ multiplizierte „Höhe" von Q_1 relativ zu Q, also durch $\frac{1}{k} CQ_1 = \frac{1}{k}\zeta$.

Vom Standpunkt des mitbewegten Beobachters aus müssen diese Größen andere Werte ξ' und τ' haben; und zwar geschieht alles für ihn so, als ob er die Strecke QQ_1 von einem anderen Punkte des Erdballs betrachtete, wo die Vertikale OZ' um den Winkel φ zu OZ — in der Bewegungsrichtung — geneigt ist. Die Beziehungen zwischen ξ und τ einerseits, ξ' und τ' andererseits lauten offenbar [vgl. (17) und (17a)]

$$\xi' = \xi \cos\varphi - k\tau \sin\varphi\,, \quad k\tau' = \xi \sin\varphi + k\tau \cos\varphi\,.$$

Nun ist nach (21) wegen $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{k}\,.$$

Setzt man also $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/k^2}}$, so wird

$$\xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1+v^2/k^2}}, \qquad \tau' = \frac{\tau + \xi v/k^2}{\sqrt{1+v^2/k^2}}. \tag{22}$$

Die Geschwindigkeit des Steines (oder genauer ihre horizontale Komponente, die wir als konstant voraussetzen) relativ zum ruhenden Beobachter sei $u = \frac{\xi}{\tau}$, zum mitbewegten $u' = \frac{\xi'}{\tau'}$. Durch Division der beiden Gleichungen (22) bekommen wir

$$\frac{\xi'}{\tau'} = \frac{\xi - v\tau}{\tau + v\xi/k^2} = \frac{\frac{\xi}{\tau} - v}{1 + \frac{v\xi}{k^2\tau}},$$

d. h.

$$u' = \frac{u - v}{1 + \frac{uv}{k^2}}. \tag{22a}$$

Diese Beziehungen zwischen den beiden Geschwindigkeiten kann man auch direkt aus (21) ohne Benutzung der Transformationsformeln (22) ableiten. Bezeichnet man nämlich die Neigung der Gerade QQ_1 zu OZ durch ψ und zu OZ' mit ψ', so ergibt sich

$$\psi' = \psi - \varphi$$

und folglich

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\varphi},$$

d. h. nach (21)

$$\frac{u'}{k} = \frac{\frac{u}{k} - \frac{v}{k}}{1 + \frac{uv}{k^2}}.$$

Um die Formeln (22) und (22a) mit den gewöhnlichen „klassischen" Raumzeitvorstellungen in Einklang zu bringen, muß man offenbar $k = \infty$ setzen; in diesem Falle reduzieren sie sich auf die üblichen Formeln $\xi' = \xi - v\tau, \tau' = \tau, u' = u - v$. Es sei erinnert, daß der Koeffizient k eine Geschwindigkeit bedeutet. Der Ansatz $k = \infty$ entspricht also der „klassischen" Vorstellung über die unendlich große Fortpflanzungsgeschwindigkeit der mechanischen Fernwirkungen. In Wirklichkeit aber ist diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit (c) *endlich*, und *deshalb*, nach dem Relativitätsprinzip, *invariant*. Betrachtet man also statt der Bewegung eines geworfenen Steines die Fortpflanzung eines Licht- oder Funksignals, so muß $u = u' = c$ sein.

Nun läßt sich diese Invarianzbedingung durch die Formel (22a) tatsächlich erfüllen, wenn man darin

$$k^2 = -c^2 \tag{22b}$$

setzt. Dabei gehen die Formeln (22) über in

$$\xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \tau' = \frac{\tau - \xi v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{23}$$

d. h. sie werden mit (18) identisch, während (22a) die Gestalt

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \tag{23a}$$

annimmt.

Es sei bemerkt, daß die Imaginarität des Koeffizienten k mit dem *Kausalitätsprinzip* (in seiner üblichen Fassung) eng verknüpft ist. Denn obwohl das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen eine variante Größe ist, muß die *Reihenfolge* dieser Ereignisse, *falls das eine als Ursache des anderen angesehen werden darf, invariant bleiben.* Wäre k eine reelle Zahl, so könnte man bei einer genügend großen relativen Geschwindigkeit zweier Inertialsysteme die Reihenfolge zwei *beliebiger* Ereignisse umkehren. Z. B. würde bei genügend großer Neigung der Z'-Achse zur Z-Achse in der Abb. 36 der Punkt Q bezüglich $X'OZ'$ *höher* liegen als Q_1; dies würde aber bedeuten, daß das Fallen des Steines seinem Abwerfen vorangeht. Ein solcher Unsinn wird durch die Imaginarität von k ausgeschlossen. Setzt man nämlich in der zweiten Formel (23) $\xi = u\tau$, so sieht man, daß das Kausalitätsprinzip, welches durch die Ungleichung

$$\frac{\tau'}{\tau} > 0$$

ausgedrückt werden kann, immer dann und nur dann respektiert bleibt, wenn die Ungleichung

$$\frac{uv}{c^2} < 1$$

erfüllt ist. Dies bedeutet, daß die beiden Geschwindigkeiten u und v ihrem Betrage nach kleiner als die invariante Geschwindigkeit c sein müssen.

Dieser Grenzcharakter der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen — oder kürzer, der Lichtgeschwindigkeit — ist durch das *Einstein*sche Superpositionsgesetz der Geschwindigkeiten, welches durch die Formel (23) ausgedrückt ist, tatsächlich gesichert. Denn durch Superposition zweier Geschwindigkeiten, die nicht größer als c sind, bekommt man nach (23) eine resultierende Geschwindigkeit, die dieser Bedingung wieder genügt. Setzt man z. B. in (23) $u = c$ ein, so wird $u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = c$. Es sei bemerkt, daß in der *Einstein*schen Relativitätstheorie die Geschwindigkeit keine additive Größe wie in der klassischen ist. Dies sieht man besonders klar, wenn man sich an die zweite (direkte) Ableitung der Formel (22a) erinnert: wir haben dabei die *Winkel*, nicht aber ihre *Tangenten*, welche der Geschwindigkeit proportional sind, voneinander subtrahiert.

Wegen der Imaginarität von k verlieren die vorhergehenden Beziehungen (22) und (22a) ihren anschaulichen geometrischen Sinn, von welchem wir bei ihrer Ableitung ausgegangen sind. Trotzdem dürfen wir auf eine rein formale Weise die obige geometrische Ausdrucksweise beibehalten. Vielmehr können wir auch die entsprechende graphische Darstellung benützen, ohne uns um die Imaginarität des Koeffizienten k zu kümmern; diese Imaginarität braucht man nur im Endresultat zu berücksichtigen (d. h. man hat dort $k = ic$ zu setzen).

§ 5. Die räumlichen und zeitlichen Abstände in der Relativitätstheorie.

Wir kehren also wieder zur Abb. 36 zurück und bemerken zunächst, daß die Länge s der Strecke QQ_1, die wir als *kinematischen* oder *raumzeitlichen* Abstand zwischen den entsprechenden Ereignissen definieren wollen, eine *invariante* Größe sein muß. Da $QQ_1^2 = QC^2 + CQ_1$ ist, so folgt $s^2 = \xi^2 + k^2\tau^2$, d. h.

$$s^2 = \xi^2 - c^2\tau^2 . \tag{24}$$

Die Strecken QC und CQ_1 stellen die horizontale und vertikale Komponente (Projektion) des Vektors QQ_1 dar; dementsprechend kann man ξ und $ic\tau$ (oder einfach τ) als die räumliche und zeitliche Komponente oder Projektion des Raumzeitvektors $\mathfrak{s}$ behandeln.

Für $s^2 < 0$ gibt es immer eine solche Geschwindigkeit $u < c$, daß ξ als Produkt $u \cdot \tau$ dargestellt werden kann; das ist die Geschwindigkeit der geradlinig-gleichförmigen Bewegung, welche die betrachteten Ereignisse, d. h. die Raumzeitpunkte Q und Q_1 miteinander sozusagen vereinigt.

Die Ungleichung $s^2 < 0$ muß immer dann erfüllt sein, wenn Q_1 eine Folge von Q ist; im Grenzfall $u = c$, welcher nur bei der Fortpflanzung der elektromagnetischen Wirkungen eintritt, geht sie in die Gleichung $s^2 = 0$ über. Setzt man in (23) $v = u\ (< c)$ ein, so wird

$$\xi' = 0 , \quad \tau' = \tau\sqrt{1 - u^2/c^2} .$$

Die erste Gleichung bedeutet, daß vom Standpunkt des mitbewegten Beobachters die beiden Ereignisse in demselben Raumpunkt stattfinden — in Übereinstimmung mit unseren gewöhnlichen Vorstellungen. Im Gegensatz zu diesen Vorstellungen erscheint aber das Zeitintervall zwischen ihnen im Verhältnis $\sqrt{1 - u^2/c^2} : 1$ verkürzt. Man kann also sagen, daß der zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen (die miteinander kausal verknüpft sind oder sein können) am kleinsten in demjenigen Inertialsystem erscheint, in bezug auf welches diese Ereignisse räumlich koinzidieren.

Ist dagegen $s^2 > 0$, so kann von einer kausalen Beziehung zwischen Q und Q_1 keine Rede sein. Es ist ebenfalls unmöglich, sie zu einer räumlichen Koinzidenz zu bringen. Man kann aber in diesem Fall ein solches

Inertialsystem definieren, in bezug auf welches die beiden Ereignisse als *gleichzeitig* erscheinen. Dieses System S' muß sich nämlich relativ zu dem ursprünglichen mit der auch durch die Gleichung $\tau - \frac{\xi v}{c^2} = 0$ bestimmten Geschwindigkeit bewegen. Setzt man den zugehörigen Wert von v in die erste der Gleichungen (23) ein, so bekommt man $\xi' = \xi \sqrt{1 - v^2/c^2}$, also wieder eine kleinere Größe, und zwar die kleinstmögliche. Sie muß offenbar mit s übereinstimmen; denn aus der Invarianz von s^2 folgt $\xi^2 - c^2\tau^2 = \xi'^2 - c^2\tau'^2$; ist also $\tau' = 0$, so wird $\xi' = s$. Für $s^2 < 0$ dagegen bleibt τ' von null verschieden; man kann aber $\xi' = 0$ setzen; dann bekommt man $ic\tau' = s$.

Diese Beziehungen können durch die folgenden Formeln zusammengefaßt werden:

$$\left.\begin{aligned} s &= ic\tau \sqrt{1 - u^2/c^2} = ic\tau_{\min} \qquad (s^2 < 0) \\ s &= \xi \sqrt{1 - v^2/c^2} = \xi_{\min} \qquad (s^2 > 0) \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

Es müssen also die Länge und die Zeitdauer als die räumliche und zeitliche Projektion eines „raumzeitlichen" Abstandes aufgefaßt und dementsprechend als *variante* Größen behandelt werden, die von der Geschwindigkeit des Beobachters auf dieselbe Weise abhängen, wie die horizontale und vertikale Projektion einer Strecke von der vertikalen Richtung des Beobachters. In den beiden Fällen hängt diese Varianz *gar nicht von der Wahl der Einheiten* ab. Die beiden Beobachter können *dieselben* Einheiten der Länge und der Zeit benützen, d. h. mit identischen Maßstäben und Uhren versehen sein. Eine relative Bewegung kann diese Maßstäbe und Uhren gar nicht beeinflussen — ebenso wie durch die Drehung der Vertikale die Länge eines Meters nicht beeinflußt wird. Und trotzdem brauchen die mit diesen identischen Meßinstrumenten bestimmten räumlichen und zeitlichen Abstände zwischen denselben Ereignissen *nicht identisch zu sein.*

Man muß sich ganz klar machen, daß es sich hier *nicht* um eine Messung der Länge von bestimmten materiellen Körpern oder des Ganges von bestimmten Uhren handelt. Es handelt sich in Wirklichkeit um die Bestimmung des Abstandes zwischen verschiedenen entfernten *Punkten des leeren Raumes*, wo gewisse Ereignisse stattgefunden haben und des Intervalles zwischen den entsprechenden Zeitpunkten.

Wir denken uns z. B., um etwas Konkreteres ins Auge zu fassen, zwei Erscheinungen, die eine auf dem Jupiter und die andere auf dem Saturn, welche von irdischen und marsianischen Astronomen beobachtet werden. Es handelt sich also um die Bestimmung der folgenden Größen: erstens des *Abstandes* zwischen demjenigen Raumpunkt P, wo Jupiter sich im Moment T des ersten Ereignisses befindet und dem Raumpunkt P_1, wo Saturn sich befindet im Augenblick T_1, wenn das zweite Ereignis eintritt, und zweitens des Intervalles zwischen den Zeitpunkten T und T_1.

Nun gibt es aber — und daran sollten wir schon lange gewöhnt sein — keine solchen Dinge, wie „bestimmte Raumpunkte". Sie werden nur *in bezug* auf ein gewisses Koordinatensystem bestimmt — ein Koordinatensystem, das ganz willkürlich als „ruhend" vorausgesetzt wird. In der Astronomie benutzt man gewöhnlich ein mit der Sonne (oder dem Schwerpunkt des Sonnensystems) verbundenes Koordinatensystem. Von *diesem* Koordinatensystem beurteilt, muß der Abstand PP_1 für irdische und marsianische Astronomen, falls sie dieselbe Längeneinheit benützen, identisch erscheinen. Sie können aber wegen des Relativitätsprinzips mit demselben Recht die betrachteten Ereignisse von *beliebigen anderen Inertialsystemen* beurteilen und speziell von denjenigen, in bezug auf welche sie selbst ruhen (der Einfachheit halber sehen wir von der Rotation der Erde und des Mars ab und betrachten ihre Translationsbewegung als unbeschleunigt). Dieses irdische Inertialsystem sei S, das marsianische S'. Nun ist es offenbar auch vom Standpunkte der klassischen Relativitätstheorie klar, daß der Abstand PP_1 ganz verschieden in S und S' erscheinen muß — falls die beiden Ereignisse nicht gleichzeitig sind. — Es war aber ein Vorurteil der früheren mechanischen Weltanschauung, die Gleichzeitigkeit zweier *räumlich getrennten* Ereignisse als etwas absolut Bestimmtes zu betrachten. Wir haben oben gesehen, daß dieses Vorurteil seine Wurzel in der Vorstellung einer momentanen Fernwirkung hatte. Die physikalischen Fernwirkungen sind aber verzögert. Ihre *endliche* Fortpflanzungsgeschwindigkeit — und speziell die Lichtgeschwindigkeit — müssen wir, wegen des Relativitätsprinzips, als eine *relative* und zugleich *invariante* Größe behandeln. Um den Ort und die Zeit der betrachteten Ereignisse festzustellen, müssen die irdischen und marsianischen Astronomen nicht nur beobachten, sondern auch *rechnen*: und zwar müssen sie den Umstand berücksichtigen, daß, was sie *jetzt* auf Jupiter und Saturn beobachten, in Wirklichkeit etwas *früher* geschehen ist. Um aber diese Verspätung zu bestimmen, müssen sie die Abstände der effektiven Raumpunkte P und P_1 von ihrem Fernrohr berechnen. Ist die Bewegung der beiden Planeten (Jupiter und Saturn) bezüglich der Inertialsysteme S und S' bekannt, so bietet diese Rechnung keine prinzipielle Schwierigkeit (vgl. Kap. VI), aber nur in dem Falle, daß die Lichtgeschwindigkeit relativ zu S und S' *auch bekannt* ist. Aus dem Relativitätsprinzip folgt, daß sie in S und S' identisch ist. Unter Zugrundelegung dieses Prinzips können die räumlichen und zeitlichen Abstände PP_1 und TT_1 tatsächlich bestimmt werden. Es ist aber kein Wunder, daß für den letzteren ebenso wie für den ersteren sich verschiedene Resultate ergeben müssen.

Die Zeit eines bestimmten Ereignisses ist also nicht als etwas a priori Gegebenes zu betrachten, sondern sie muß erst auf Grund des Prinzips der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit *definiert* werden. Dementsprechend kann die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei räumlich ver-

schiedenen Ereignissen nur a posteriori bestimmt sein. Der räumliche und zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen sind voneinander abhängige Größen, die nur dann invariant sein können, wenn sie *beide verschwinden.*

Dieser Zusammenhang zwischen ihnen ist seinem Wesen nach ganz analog dem Zusammenhange zwischen den horizontalen und vertikalen Abmessungen einer Strecke, z. B. an einem Gebäude. Was heißt „die Höhe" eines Turmes? Man pflegt sie oft zu definieren als den Abstand von seiner Grundlage bis zur Spitze. Es ist aber klar, daß diese Definition unrichtig wird, wenn der Turm etwas geneigt zur Vertikale steht. Dann definiert man seine Höhe als die Projektion der von der Grundlage bis zur Spitze gezogenen Strecke auf die Vertikale. Und dies ist die allgemeingültige Definition. Aber die Vertikale ist kein absoluter Begriff. Die vertikale Richtung muß schon für Nachbarpunkte der Erdoberfläche strenggenommen verschieden sein. Deshalb ist die „Höhe" eines Turmes in dem exakten Sinne des Wortes eine unbestimmte, variante Größe, ebenso wie seine Länge, d. h. seine Projektion auf die Horizontalebene. Man kann selbstverständlich als „natürliche Höhe" des Turmes seine *maximale* Höhe betrachten, die sich ergibt, wenn die von seinem Boden zur Spitze gezogene Gerade als Vertikale gilt; dabei muß selbstverständlich seine Länge verschwinden. In demselben ganz konventionellen Sinne können wir den oben definierten kleinsten Zeitabstand zwischen zwei Ereignissen als ihren „natürlichen" Zeitabstand definieren; oder den kleinsten räumlichen Abstand zwischen zwei kausal unverknüpfbaren Ereignissen als den „natürlichen" Abstand. Diese natürlichen Abstände sind gerade nach (24a) die invarianten raum-zeitlichen Abstände, welche nach der Formel $s^2 = \xi^2 - c^2\tau^2$ bei Zugrundelegung irgendeines Inertialsystems bestimmt werden können — ebenso wie die „natürliche" Höhe eines geneigten Turmes aus seiner tatsächlichen Höhe und Länge mittels der bekannten *Pythagoreis*chen Formel.

Wenn man vor Zeiten glaubte, daß die Erde eben und die vertikale Richtung absolut bestimmt sei, behandelte man die Höhe — und dementsprechend den horizontalen Abstand — als invariante Größen. Auf dieselbe Weise sind wir bis 1905 mit der Zeit und dem räumlichen Abstand verfahren. Im Jahre 1905 wurde zum erstenmal diese Idee durch *Einstein* als ein unvernünftiges Vorurteil erkannt und die Verknüpfung der Zeit und Raumbestimmungen in verschiedenen Inertialsystemen auf der Grundlage des Relativitätsprinzips (und der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit) festgestellt. Damit verwandelte sich die alte Physik des dreidimensionalen Raumes und der eindimensionalen Zeit in die moderne Physik der vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit oder nach *Minkowski* der *vierdimensionalen Welt.*

Wir haben oben gesagt, daß die Bestimmungen des räumlichen Abstandes, um die es sich in der Relativitätstheorie handelt, sich auf den

leeren Raum und nicht auf die materiellen Objekte beziehen. Wie kann man aber die Länge eines Stabes messen und wie soll man sie überhaupt definieren? Die allgemeine Definition lautet folgendermaßen: die Länge eines Stabes ist der Abstand zwischen denjenigen Raumpunkten, wo sich seine beiden Enden *in demselben Augenblick* befinden. Da aber der Begriff der Gleichzeitigkeit relativ ist, muß die nach der obigen Definition bestimmte Länge des Stabes in verschiedenen Inertialsystemen verschieden sein.

Dabei können wir eine dieser Längen l, die in *dem* Inertialsystem angegeben wird, in bezug auf welches der Stab ruht, als die „natürliche" oder „Ruhlänge" bezeichnen. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß für ihre Bestimmung die erwähnte Gleichzeitigkeitsbedingung unwesentlich ist. Denn betrachtet man zwei Ereignisse, die an den Enden des betreffenden Stabes zu verschiedenen Zeiten stattfinden, so ergibt sich für ihren räumlichen Abstand immer derselbe Wert. Dies sieht man aus der Abb. 36, wo die erwähnten Ereignisse durch die Punkte Q und Q_1 dargestellt sein mögen; der Stab soll in bezug auf das durch XZ vertretene Inertialsystem ruhen, so daß die „Bewegung" seiner Enden durch zwei zur Zeitachse OZ parallele (punktierte) Geraden dargestellt wird. Die „Ruhlänge" des Stabes l ist also gleich MN (oder QC). Seine Länge l' in bezug auf ein anderes Inertialsystem, das durch $X'Z'$ vertreten ist, wird nach der oben angeführten Definition durch die Strecke $M'N'$ der neuen X'-Achse (wo M' und N' seine Schnittpunkte mit den punktierten Geraden bedeuten) bestimmt. Nun gilt offenbar $l' = \frac{l}{\cos\varphi}$, d. h. nach $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/k^2}}$,

$$l' = l\sqrt{1+v^2/k^2}$$

oder schließlich wegen $k^2 = -c^2$,

$$l' = l\sqrt{1-v^2/c^2}. \qquad (25)$$

Der mit der Geschwindigkeit v bewegte Stab erscheint also im Verhältnis $\sqrt{1-v^2/c} : 1$ verkürzt (auf der Abbildung ist $M'N'$ größer als MN, denn sie entspricht tatsächlich einem reellen Werte von k). Dieses Ergebnis scheint zunächst mit der *Lorentz*schen Kontraktionshypothese in vollkommener Übereinstimmung zu stehen (vgl. VII, § 6). Das ist aber keineswegs der Fall. Denn nach dieser Hypothese sollte das bewegte (relativ zu was?) Elektron sich *tatsächlich* in die Bewegungsrichtung verkürzen, während nach der *Einstein*schen Relativitätstheorie sich diese Verkürzung nicht auf das Elektron (bzw. den Stab) selbst bezieht, sondern auf den „Abstand zwischen den Raumpunkten, wo sich seine Enden gleichzeitig befinden".

Betrachtet man statt der Länge eines Stabes die Zeitdauer einer Erscheinung, die bezüglich des durch XZ vertretenen Inertialsystems in einem festen Raumpunkte, z. B. an einem Ende des Stabes, statt-

findet, so bekommt man mit demselben geometrischen Verfahren die folgende Beziehung zwischen der „Ruhdauer" τ und dem entsprechenden Zeitintervall τ' für das bewegte" Koordinatensystem

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{25a}$$

in Übereinstimmung mit der ersten der Formeln (24a), die auf einem anderen Wege, nämlich auf Grund der Transformationsgleichungen (23) abgeleitet wurde. Man kann selbstverständlich auf dieselbe Weise daraus (25) ableiten. Wir haben aber die geometrische Methode wegen ihrer Anschaulichkeit bevorzugt.

Der Übelstand dieser Methode besteht offenbar in der Imaginarität des Koeffizienten k. Es gibt aber noch eine zweite graphische Methode, die von diesem Übelstand frei ist. Sie entspricht der anderen Lösung der Gleichung (21a), nämlich $\omega' = \omega - 2\varphi$. Dabei hat man, wie leicht einzusehen ist, einfach $k = c$ zu setzen. In der Tat, da in diesem Falle die beiden Achsen X und Z nach entgegengesetzten Richtungen, also bei positivem v gegeneinander gedreht werden, müssen sie bei einem bestimmten Grenzwert von v zusammenfallen.

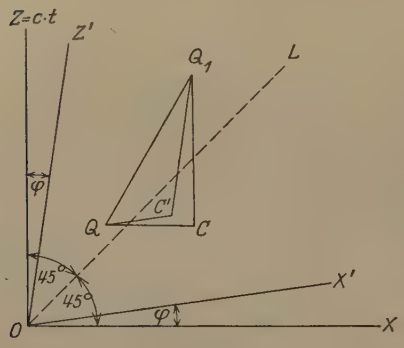

Abb. 37.

Ist das ursprüngliche System rechtwinklig ($\omega = 90^0$), so geschieht dies bei $\varphi = 45^0$. Wir finden also nach (21)

$$\frac{c}{k} = \frac{\sin 45^0}{\sin (90^0 - 45^0)} = 1,$$

d. h. $k = c$.

Die räumlichen und zeitlichen Komponenten des raumzeitlichen Abstandes s zwischen den Ereignissen Q und Q_1 (Abb. 37) vom Standpunkte des von $X'Z'$ vertretenen „bewegten" Inertialsystems sind in diesem Falle mit den entsprechenden Komponenten der Strecke QQ_1 durch die Formeln

$$\xi' = \frac{1}{\gamma} QC', \quad c\tau' = \frac{1}{\gamma} C'Q$$

verknüpft, wo γ einen von 1 verschiedenen „Eichfaktor" bedeutet. Nun folgt aus der Figur:

$$QC = QC' \cos\varphi + C'Q_1 \sin\varphi; \quad CQ_1 = QC' \sin\varphi + C'Q_1 \cos\varphi,$$

d. h.

$$\xi = \gamma \cos\varphi (\xi' + v\tau'), \quad \tau = \gamma \cos\varphi \left(\tau' + \frac{\xi' v}{c^2}\right),$$

denn $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(90^0 - \varphi)} = \dfrac{v}{c}$ ist.

Damit diese Formeln mit den Transformationsformeln (23) oder eher den reziproken Formeln

$$\xi = \frac{\xi' + v\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \tau = \frac{\tau' + v\xi'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

identisch werden, genügt es offenbar $\gamma \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ zu setzen, oder da in dem betrachteten Fall $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}$ ist,

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}} \tag{26}$$

Dieser Koeffizient läßt sich graphisch bestimmen als die Länge der

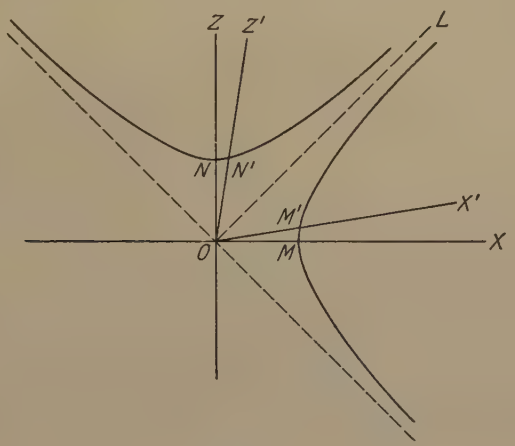

Abb. 38.

Strecken $OM' = ON'$, welche auf den neuen Achsen $X'Z'$ durch die Hyperbeln

$$x^2 - z^2 = \pm 1 \tag{26a}$$

abgeschnitten werden (Abb. 38). Durch Auflösen dieser Gleichung in Verbindung mit der Gleichung $z = \frac{v}{c} x$ der X'-Achse, bekommen wir in der Tat für die Koordinaten des Schnittpunktes M':

$$x'^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}, \quad z'^2 = \frac{v^2}{c^2} x'^2.$$

Es wird folglich

$$OM'^2 = x'^2 + z'^2 = \frac{1 + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = \gamma^2.$$

Bei der Darstellung der Ereignisse mittels des Koordinatensystems $X'Z'$, die dem „bewegten" Inertialsystem entspricht, müssen wir also die Längeneinheit durch OM' und die Zeiteinheit durch $\frac{ON'}{c} = \frac{OM'}{c}$ definieren.

Die Bedingung, welche die Änderung der Eichung beim Übergang vom „ruhenden" zum bewegten Inertialsystem in der betrachteten Darstellungsmethode bestimmt, ist analytisch identisch mit der Bedingung, welche die Invarianz dieser Eichung nach der früheren Methode ausdrückt. Denn ersetzt man in (26a) $z = ct$ durch $z = ict$, so nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$x^2 + z^2 = 1 \qquad (26b)$$

an, d. h. stellt einen *Kreis* dar.

Es sei bemerkt, daß, wenn die Strecke QQ_1 auf der Abb. 37 zur Z-Achse weniger als die Bissektrix (oder Asymptote) OL geneigt ist, man die Z'-Achse parallel zu QQ_1 ziehen kann; dies bedeutet, daß von dem zugehörigen „kinematischen" Standpunkte aus die beiden Ereignisse in demselben Raumpunkte stattfinden. Ist dagegen der Winkel zwischen QQ_1 und OZ größer als LOZ, so gibt es eine dazu parallele Richtung der X'-Achse, d. h. ein Inertialsystem, in welchem diese Ereignisse als gleichzeitig erscheinen.

Die angeführten graphischen Darstellungen lassen sich leicht auf den Fall nicht geradliniger Bewegungen in einer Ebene verallgemeinern. Wir wollen aber auf diese Frage nicht eingehen und werden, unter Benützung der geometrischen Ausdrucksweise, zum allgemeinsten Fall der vierdimensionalen „Welt" übergehen.

Neuntes Kapitel.

Anwendung der Relativitätstheorie auf die elektromagnetischen Erscheinungen.

§ 1. Transformation von Vektoren.

Die Formeln (18) und (18a) des letzten Kapitels stellen einen speziellen Fall der Lorentztransformation dar. Der allgemeine Fall entspricht einer Bewegung des räumlichen Koordinatensystems S' (X_1', X_2', X_3') relativ zu dem „ruhenden" S (X_1, X_2, X_3) in einer beliebigen Richtung, wobei auch die Orientierung der beiden Systeme verschieden sein kann. — Die 16 Koeffizienten α_{kl} dieser allgemeinen Transformation, können offenbar bestimmt werden durch Zusammensetzung der speziellen Transformation (18) mit zwei gewöhnlichen räumlichen Transformationen, welche eine Drehung des „ruhenden" und „bewegten" Achsensystems bedeuten.

Es ist aber einfacher und zweckmäßiger, die erwähnte spezielle Transformation in einer *koordinatenfreien Weise* darzustellen, als eine Beziehung zwischen den Zeiten t und t' und den räumlichen Radiusvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$, deren Komponenten durch x_1, x_2, x_3, bzw. x_1', x_2', x_3' gegeben sind. Es sei erinnert, daß $\mathfrak{r}$ und t (oder ict) als die räumliche und zeitliche Projektion des vierdimensionalen Raumzeitvektors $\mathfrak{x}$ an-

gesehen werden dürfen; dabei bedeuten $\mathfrak{r}'$ und t' (ict') die entsprechenden Projektionen *desselben* Raumzeitvektors in dem „bewegten" oder besser „gestrichenen" Inertialsystem. Man muß ferner beachten, daß die „Nullpunkte" der beiden Systeme O und O' und die Anfangsmomente $t = 0$ und $t' = 0$ derart gewählt sind, daß für $t = t' = 0$ O und O' zusammenfallen.

Die Geschwindigkeit von S' relativ zu S sei $\mathfrak{v}$; die Geschwindigkeit von S relativ zu S' ist folglich

$$\mathfrak{v}' = -\mathfrak{v}.$$

Die Richtung des Vektors $\mathfrak{v}$ werden wir durch den Einheitsvektor $\mathfrak{v}_0 = \frac{\mathfrak{v}}{v}$ definieren.

Die Formel

$$t' = \frac{t - x_1 v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

läßt sich offenbar in der Form

$$t' = \frac{t - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v})/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1}$$

darstellen, denn das Produkt $x_1 v$ bedeutet unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{v}$ mit der X_1-Achse gleichgerichtet ist, nichts anderes als das innere Produkt der Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$.

Um die Beziehung zwischen $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}$ zu erhalten, müssen wir zu der Formel

$$x_1' = \frac{x_1 - v\,t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

noch die Formeln

$$x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

hinzufügen. Nun gilt offenbar $x_1 = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}_0$ und $x_1' = \mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{v}_0$. Die longitudinalen (d. h. der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ parallelen) Komponenten von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ sind also gleich

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{r}'\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0$$

und die transversalen:

$$\mathfrak{r} - (\mathfrak{r}\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_0\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}_0) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{r}' - (\mathfrak{r}'\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_0\times(\mathfrak{r}_0'\times\mathfrak{v}_0).$$

Die obigen koordinatenmäßigen Gleichungen können somit durch die Vektorgleichungen

$$(\mathfrak{r}'\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 = \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}\,t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\mathfrak{r}' - (\mathfrak{r}'\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{r} - (\mathfrak{r}\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0$$

ersetzt werden. Durch Addition der letzteren ergibt sich die gesuchte Relation

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - (\mathfrak{r}\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{v}\,t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

oder nach einer kleinen Umformung

$$\mathfrak{r}' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}_0)\times\mathfrak{v}_0 + \frac{\mathfrak{r}-\mathfrak{v}t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1a}$$

wobei der Vektor $-(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}_0)\times\mathfrak{v}_0$ einfach die zu $\mathfrak{v}_0$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{r}$ darstellt. Durch Projektion dieser Vektorgleichung auf das „ruhende" oder „bewegte" Achsensystem kann man leicht die koordinatenmäßige Darstellung der Lorentztransformation bekommen. Sind speziell die beiden Koordinatensysteme gleich orientiert, so bekommen wir

$$x_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)\left\{\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v})}{v^2}v_1 - x_1\right\} + \frac{x_1 - v_1 t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

usw.

Die zu (1) und (1a) reziproken Transformationsgleichungen ergeben sich einfach durch Umkehr des Vorzeichens von $\mathfrak{v}$.

Nach dem Kovarianzprinzip müssen sich die räumlichen und zeitlichen Projektionen von anderen Vierervektoren, z. B. $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{A}$ nach ähnlichen Formeln transformieren. Bemerkt man nämlich, daß der Zeit t im Falle des „Viererstromes" die durch c dividierte Ladungsdichte ϱ und im Falle des „Viererpotentials" das ebenfalls durch c dividierte skalare Potential zugeordnet ist, so wird statt (1) und (1a)

$$\varrho' = \frac{\varrho - \mathfrak{j}\frac{\mathfrak{v}}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2}$$

$$\mathfrak{j}' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)(\mathfrak{j}\times\mathfrak{v}_0)\times\mathfrak{v}_0 + \frac{\mathfrak{j} - \varrho\frac{\mathfrak{v}}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2a}$$

und ebenso

$$\varphi' = \frac{\varphi - \mathfrak{A}\frac{\mathfrak{v}}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3}$$

$$\mathfrak{A}' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)(\mathfrak{A}\times\mathfrak{v}_0)\times\mathfrak{v}_0 + \frac{\mathfrak{A} - \varphi\frac{\mathfrak{v}}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{3a}$$

Es sei bemerkt, daß die *Geschwindigkeit* eines Teilchens, d. h. der Differentialquotient $\mathfrak{u} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ *nicht* als räumliche Projektion eines Vierervektors betrachtet werden darf. In der Tat, $d\mathfrak{r}$ und dt transformieren sich offenbar auf dieselbe Weise wie $\mathfrak{r}$ und t; man bekommt also für die transformierte Geschwindigkeit $\mathfrak{u}' = \frac{d\mathfrak{r}'}{dt'}$ nach (1) und (1a)

$$\mathfrak{u}' = \frac{(1-\sqrt{1-v^2/c^2})(\mathfrak{u}\times\mathfrak{v}_0)\times\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{1 - \frac{(\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{v})}{c^2}}. \tag{4}$$

Diese Formel ist von (1a), (2a) und (3a) ganz verschieden; sie stellt die

Verallgemeinerung der einfachen Formel (23) Kap. VIII, für die Superposition zweier paralleler Geschwindigkeiten dar. Durch Quadrieren und Addieren der Größen $(\mathfrak{r}, ict)$, $(\mathfrak{j}, i\varphi)$, $(\mathfrak{A}, i\varphi)$ bekommen wir die Quadrate der aus ihnen gebildeten Vierervektoren, die *echte invariante Skalare* sind. Diese Invarianten haben also die folgende Gestalt

$$\mathfrak{r}^2 = r^2 - c^2t^2, \tag{5}$$

$$\mathfrak{j}^2 = j^2 - \varrho^2, \tag{5a}$$

$$\mathfrak{A}^2 = A^2 - \varphi^2. \tag{5b}$$

Aus den beiden Vektoren $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{A}$ läßt sich eine dritte invariante Größe bilden, nämlich das innere Produkt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{j} = A_1 j_1 + A_2 j_2 + A_3 j_3 + A_4 j_4,$$

oder

$$\mathfrak{A}\mathfrak{j} = \mathfrak{A}\mathfrak{j} - \varphi\varrho. \tag{5c}$$

Diese Größe kann man in dem Falle zeitlich konstanter Felder betrachten als die Differenz der magnetischen (kinetischen) und elektrischen (potentialen) Energie pro Volumeinheit. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Mechanik der Relativitätstheorie (siehe Kap. X). Die beiden anderen inneren Produkte, welche aus den Vierervektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{A}$ gebildet werden können, haben keine physikalische Bedeutung.

Die Größe $|\mathfrak{r}| = \sqrt{r^2 - c^2t^2} = \sqrt{r'^2 - c^2t'^2}$ haben wir schon (für den Spezialfall $r = x_1$) definiert als einen „raumzeitlichen" Abstand. In dem betrachteten Fall handelt es sich um den „Abstand" zwischen dem durch $(\mathfrak{r}, t)$ bzw. $(\mathfrak{r}', t')$ charakterisierten Ereignis und dem Zusammenfallen der Koordinatenanfänge der beiden Systeme $(r = r' = 0,$ $t = t' = 0)$. Der vierdimensionale Abstand zwischen zwei beliebigen Raumzeitpunkten $(\mathfrak{r}_1, t_1)$ und $(\mathfrak{r}_2, t_2)$ drückt sich dementsprechend durch die Formel

$$s = \sqrt{R^2 - c^2(t_2 - t_1)^2} \tag{6}$$

aus, wo

$$R = |\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1| \tag{6a}$$

den gewöhnlichen räumlichen Abstand bedeutet.

Wir haben oben gesehen, daß man zwei Fälle unterscheiden muß, nämlich $s^2 < 0$ und $s^2 > 0$. Im ersten Fall heißt der Vektor $\mathfrak{s}$ *„zeitartig"*, denn es gibt ein Inertialsystem S', wo seine räumliche Projektion $\mathfrak{R}'$ verschwindet. In dem zweiten Falle existiert ein solches System nicht; es gibt aber dafür ein Inertialsystem, in bezug auf welches die zeitliche Projektion von $\mathfrak{s}$ verschwindet; deshalb bezeichnet man den Vektor $\mathfrak{s}$ in diesem Falle als *„raumartig"*.

In dem Grenzfalle $s = 0$, der bei der Fortpflanzung einer elektromagnetischen Wirkung auftritt, könnte man die beiden Projektionen von $\mathfrak{s}$ — die räumliche und zeitliche — *einzeln* zum Verschwinden bringen,

d. h. die beiden Ereignisse (z. B. Aussendung und Empfang eines Lichtsignals) räumlich und zeitlich zur Koinzidenz bringen. Dabei aber müßte das neue Koordinatensystem sich bezüglich des ursprünglichen mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen — was physikalisch unrealisierbar ist.

Die angeführten Betrachtungen bleiben selbstverständlich für beliebige vierdimensionale Vektoren gültig. Wir müssen also speziell raumartige und zeitartige Vierervektoren und Vierpotentiale unterscheiden, d. h. solche, die sich bei geeigneter Wahl des Bezugssystems auf ihre räumliche oder zeitliche Projektion reduzieren. Es sei schließlich noch folgendes bemerkt. Für die Stromdichte eines volumgeladenen bewegten Elektrons kann man $\mathfrak{j} = \varrho \frac{\mathfrak{u}}{c}$ setzen. Handelt es sich speziell um eine reine Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, so muß wegen $u < c$, $\mathfrak{j}^2 < \varrho^2$ sein. In diesem Fall ist also der Vektor $\mathfrak{j}$ zeitartig und läßt sich auf seine zeitliche Projektion reduzieren. Dies geschieht offenbar für dasjenige Inertialsystem S', in bezug auf welches das Elektron *momentan* ruht, d. h. die sich relativ zum ursprünglichen System mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ bewegt. Die entsprechende „Ruhdichte" der Elektrizität ϱ_0 ist offenbar durch die Gleichung $\varrho^2 - j^2 = \varrho_0^2$ bestimmt, d. h.

$$\varrho_0 = \varrho \sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{7}$$

Sie stellt also den kleinstmöglichen Wert von ϱ dar. Bei der Rotation eines Elektrons (falls eine solche Rotation tatsächlich stattfindet) kann u größer als c sein. Dabei wird der Vektor j raumartig. Von einer Ruhdichte der Elektrizität kann überhaupt keine Rede sein. Dagegen gibt es in diesem Falle ein Inertialsystem S, in welchem ϱ verschwindet und j den kleinstmöglichen „natürlichen" Wert

$$j_0 = \sqrt{j^2 - \varrho^2} = j \sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}.$$

annimmt. Es ist aber sehr zweifelhaft, ob man dann noch $\mathfrak{j}$ als Produkt von $\frac{\varrho}{c}$ und einer „Geschwindigkeit" $\mathfrak{u}$ darstellen darf. Denn Überlichtgeschwindigkeiten sind in der Relativitätstheorie *prinzipiell* ausgeschlossen.

§ 2. Transformation von Sechservektoren.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der vierdimensionalen Tensoren über und untersuchen zunächst den schiefsymmetrischen Feldtensor oder „Sechservektor" $^2\mathfrak{H}$. Die allgemeine Transformationsformel für seine Komponenten in den Inertialsystemen S und S' lauten

$$H'_{k'l'} = \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} \alpha_{kk'} \alpha_{ll'} H_{kl}. \tag{8}$$

Die spezielle Lorentztransformation, die durch die Formeln (18), Kap. VIII, ausgedrückt wird, kann, wenn man t und t' durch $\frac{x_4}{ic}$ bzw. $\frac{x_4'}{ic}$ ersetzt und zur Abkürzung

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{8a}$$

setzt, folgendermaßen geschrieben werden

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - \frac{v}{ic}x_4\right), \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \gamma\left(x_4 + \frac{v}{ic}x_1\right).$$

Die Koeffizienten $\alpha_{kk'}$ bilden also in diesem Falle das folgende Schema

$$(\alpha_{kk'}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{ic}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{ic}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{8b}$$

Setzt man dies in (8) ein, so wird mit Rücksicht auf den schiefsymmetrischen Charakter von ${}^2\mathfrak{H}$ ($H_{kk} = 0$):

$$H_{23}' = H_{23}, \quad H_{31}' = \gamma\left(H_{31} - \frac{v}{ic}H_{34}\right), \quad H_{12}' = \gamma\left(H_{12} - \frac{v}{ic}H_{42}\right)$$
$$H_{14}' = H_{14}, \quad H_{24}' = \gamma\left(\frac{v}{ic}H_{21} + H_{24}\right), \quad H_{34}' = \gamma\left(\frac{v}{ic}H_{31} + H_{34}\right)$$

und folglich nach dem Substitutionsschema [vgl. (5), Kap. VIII]

$$\begin{matrix} H_{21} & H_{31} & H_{12} & H_{14} & H_{24} & H_{34} \\ H_1 & H_2 & H_3 & -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 \end{matrix}$$
$$\left.\begin{aligned} H_1' &= H_1, \quad H_2' = \gamma\left(H_2 + \frac{v}{c}E_3\right), \quad H_3' = \gamma\left(H_3 - \frac{v}{c}E_2\right) \\ E_1' &= E_1, \quad E_2' = \gamma\left(E_2 - \frac{v}{c}H_3\right), \quad E_3' = \gamma\left(E_3 + \frac{v}{c}H_2\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ für den betrachteten Fall die Richtung der ersten Achse hat, so bedeuten die Größen $\frac{v}{e}E_3$ und $-\frac{v}{c}E_2$ die zweite bzw. die dritte Komponente des äußeren Produktes $\mathfrak{E} \times \frac{\mathfrak{v}}{c}$ und analog die Größen $-\frac{v}{c}H_3$, $\frac{v}{c}H_2$ die entsprechenden Komponenten des äußeren Produkts $\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}$. Führt man also wie bei der Transformation des Vektors $\mathfrak{r}$ die longitudinalen und transversalen Komponenten der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ ein, so lassen sich die Beziehungen (9) auf die folgende koordinatenfreie Form bringen:

$$(\mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 = (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0, \quad \mathfrak{H}' - (\mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 = \gamma[\mathfrak{H} - (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0] - \gamma\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E},$$
$$(\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 = (\mathfrak{E}\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0, \quad \mathfrak{E}' - (\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 = \gamma[\mathfrak{E} - (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0] + \gamma\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H},$$

woraus sich durch Addition ergibt

$$\mathfrak{H}' = (1-\gamma)(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \gamma\left(\mathfrak{H} - \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{E}\right) \tag{9a}$$

$$\mathfrak{E}' = (1-\gamma)(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \gamma\left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}\right) \tag{9b}$$

Die reziproken Transformationsformeln, die den Übergang von S' zu S darstellen, bekommt man einfach durch Vertauschung der ungestrichenen und gestrichenen Größen und durch Umkehr des Vorzeichens von $\mathfrak{v}$. Für den Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ reduzieren sich die obigen Formeln auf

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H}' &= \mathfrak{H} - \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}\end{aligned}\right\} \tag{9c}$$

Es sei bemerkt, daß ähnliche Formeln in den vorhergehenden Kapiteln abgeleitet und vielfach benützt worden sind. Wir haben speziell gesehen, daß ein geradlinig gleichförmig bewegtes Ladungssystem eine magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ erzeugt, die mit der entsprechenden elektrischen Feldstärke durch die vollkommen *exakte* Beziehung $\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{E}$ verknüpft ist. Diese Beziehung ergibt sich aus der ersten der Formeln (9c), wenn wir annehmen, daß die betrachteten Ladungen bezüglich des Systems S' *ruhen*, d. h. in diesem System kein magnetisches Feld erzeugen. Dasselbe Resultat folgt auch aus den exakten Formeln (9a) und (9b). Und zwar bei $\mathfrak{H}' = 0$ nehmen die reziproken Formeln die Gestalt an

$$\mathfrak{H} = \gamma\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{E}', \quad \mathfrak{E} = (1-\gamma)(\mathfrak{E}'\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \gamma\mathfrak{E}'.$$

Es ist also $\mathfrak{v}\times\mathfrak{E} = \gamma\mathfrak{v}\times\mathfrak{E}'$ und folglich

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{E}.$$

Ebenso bekommt man die Beziehung $\mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}$ für den Fall, daß $\mathfrak{E}' = 0$ ist

Die Formeln (9a) und (9b) können in eine einzige Formel zusammengefaßt werden, wenn man eine von ihnen, z. B. die zweite, mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert und zu der ersten addiert. Dabei ergibt sich nämlich

$$\mathfrak{H}' + i\mathfrak{E}' = (1-\gamma)[(\mathfrak{H} + i\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{v}_0]\cdot\mathfrak{v}_0 + \gamma\left[\mathfrak{H} + i\mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{v}}{ic}\times(\mathfrak{H} + i\mathfrak{E})\right]. \tag{10}$$

Setzt man hier zur Abkürzung $\mathfrak{H} + i\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ und quadriert, so bekommt man wegen $\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{F} = \frac{v}{c}(\mathfrak{v}_0\times\mathfrak{F})$ und $|\mathfrak{v}_0\times\mathfrak{F}|^2 = F^2 - (\mathfrak{v}_0\mathfrak{F})^2$,

$$\begin{aligned}F'^2 &= (1-\gamma)^2(\mathfrak{F}\mathfrak{v}_0)^2 + \gamma^2\left[F^2 - \frac{v^2}{c^2}(\mathfrak{v}_0\times\mathfrak{F})^2\right] + 2(1-\gamma)\gamma(\mathfrak{F}\mathfrak{v}_0)^2\\ &= (1-\gamma^2)(\mathfrak{F}\mathfrak{v}_0)^2 + \gamma^2\left[F^2 - \frac{v^2}{c^2}F^2 + \frac{v^2}{c^2}(\mathfrak{v}_0\mathfrak{F})^2\right],\end{aligned}$$

d. h. nach (8a)

$$F'^2 = F^2 + (\mathfrak{F}\mathfrak{v}_0)^2\left(1 - \gamma^2 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) = F^2,$$

oder schließlich

$$(\mathfrak{H}' + i\mathfrak{E}')^2 = (\mathfrak{H} + i\mathfrak{E})^2. \tag{10a}$$

Wir haben also eine neue Invariante des elektromagnetischen Feldes gefunden; durch Gleichsetzen der reellen und imaginären Anteile wird sie in zwei Invarianten zerlegt, nämlich

$$H'^2 - E'^2 = H^2 - E^2 \tag{10b}$$

und

$$\mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{E}' = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E}. \tag{10c}$$

Es sei bemerkt, daß diese Invarianten viel einfacher ermittelt werden können. Man bildet erstens das Quadrat des Tensors $^2\mathfrak{H}$ ohne Rücksicht auf seinen schiefsymmetrischen Charakter:

$$^2\mathfrak{H}^2 = \sum_k \sum_l H_{kl}^2 = 2\,(H_{23}^2 + H_{31}^2 + H_{12}^2 + H_{14}^2 + H_{24}^2 + H_{34}^2),$$

d. h.

$$^2\mathfrak{H}^2 = 2\,(H^2 - E^2),$$

und dies muß offenbar eine invariante skalare Größe sein. Da aber $^2\mathfrak{H}$ ein schiefsymmetrischer Tensor ist, so folgt, wenn man sein inneres Produkt mit dem „dualen" Tensor $^2\mathfrak{H}^*$ bildet, nach (14a) Kap. VIII

$$^2\mathfrak{H} \cdot {}^2\mathfrak{H}^* = 4\,(H_{23}H_{14} + H_{31}H_{24} + H_{12}H_{34}) = -4i\,(\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E}) = \text{Invariant}.$$

Die Invarianz der Größen $H^2 - E^2$ und $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E}$ zeigt, daß die charakteristische Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes in der Wellenzone — die Gleichheit der Beträge der elektrischen und magnetischen Feldstärke und ihre Orthogonalität — in allen Inertialsystemen bestehen bleiben muß. Man kann also die Wellenzone vom Standpunkt der Relativitätstheorie ganz allgemein charakterisieren durch das Verschwinden der Invarianten (10b) und (10c).

Sind sie beide von Null verschieden, so kann man immer ein solches Inertialsystem wählen, daß die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ (oder $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$) in dem betrachteten Raumzeitpunkte *parallel* zueinander sind. Es ist aber unmöglich, die eine von ihnen zum Verschwinden zu bringen oder sie senkrecht zu der anderen zu machen. Das elektromagnetische Feld kann man als „magnetisch-artig" oder „elektrisch-artig" bezeichnen, je nachdem $H^2 > E^2$ oder $H^2 < E^2$ ist; *rein* magnetisch oder rein elektrisch kann es aber nur bei $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E} = 0$ gemacht werden.

Der durch 8π dividierte Skalar (10b) stellt die Differenz der magnetischen und elektrischen Energiedichte dar. Er entspricht also vollkommen dem Skalar (7).

Ganz ähnliche Formeln und Betrachtungen gelten für die Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$, aus welchen sich der Sechservektor der elektromagnetischen Polarisation $^2\mathfrak{P}$ zusammensetzt und für die Komponenten $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}^*$

des Polarisationspotentials $^2\mathfrak{Z}$. Man muß nur den Umstand beachten, daß den Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}$ nicht die Größe $\mathfrak{E}$ sondern $-\mathfrak{E}$ entspricht. Deshalb haben wir statt (9a) und (9b) die folgenden Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}' &= (1-\gamma)\,(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \gamma\left(\mathfrak{M} + \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{P}\right)\\ \mathfrak{P}' &= (1-\gamma)\,(\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \gamma\left(\mathfrak{P} - \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{M}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

und identische Formeln für die Vektoren $\mathfrak{Z}^*$, $\mathfrak{Z}$.

Es sei erinnert, daß bei der Behandlung von zeitlich konstanten Feldern die elektrische und magnetische Polarisation als voneinander ganz unabhängige Größen erschienen (vgl. § 10, Kap. III), ebenso wie die elektrische und magnetische Feldstärke. Wir haben sie später (§ 4, Kap. V) bei der Behandlung von zeitlich variablen Feldern auf eine rein äußerliche Weise zusammengefaßt, indem die Stromdichte j nicht bloß durch $\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}$, sondern durch die Summe $\operatorname{rot}\mathfrak{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}$ ausgedrückt wurde. Beide Ausdrücke betrachteten wir dabei als ganz äquivalent und führten ihren formalen Unterschied auf eine verschiedene Definition des Vektors $\mathfrak{P}$ zurück. In der Tat ist der Vektor $\mathfrak{P}$ durch die zu seiner Definition ursprünglich benutzte Formel $\varrho = -\operatorname{div}\mathfrak{P}$ (§ 10, Kap. III), auch in Verbindung mit der Grenzbedingung $P_n = \eta$, nur unvollständig definiert und man kann diese Unbestimmtheit dazu benützen, um $\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}$ durch die Summe $\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathfrak{M}$ zu ersetzen mit der zusätzlichen Grenzbedingung $\mathfrak{M}\times\mathfrak{n} = 0$. Diese Definition der beiden Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ ist selbstverständlich auch nicht ganz willkürfrei. Das Relativitätsprinzip zeigt aber, daß, falls sie für ein bestimmtes Bezugsystem festgelegt sind, man sie beim Übergange zu anderen Inertialsystemen als miteinander eng verknüpfte Größen behandeln muß, die sich nach den Formeln (11) transformieren. Ist z. B. in dem „gestrichenen" Bezugssystem (S') $\mathfrak{M}' = 0$, und $\mathfrak{P}'$ von Null verschieden, so muß bezüglich S $\mathfrak{M}$ auch von Null verschieden sein und mit dem entsprechenden Wert der elektrischen Polarisation durch die Beziehung

$$\mathfrak{M} = -\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{P} \qquad (11a)$$

verknüpft sein. Ist dagegen $\mathfrak{P}' = 0$ und $\mathfrak{M}' \neq 0$, so wird

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{M}. \qquad (11b)$$

Beide Beziehungen gelten ganz streng für beliebig große relative Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ ($< c$). Haben wir also in dem System S' einen ruhenden Dipol oder eine ruhende gleichförmig polarisierte Kugel mit dem elektrischen Moment $\mathfrak{p}'$, so erscheint diese Kugel vom Standpunkte

des Systems S nicht nur elektrisch, sondern auch magnetisch polarisiert mit dem Moment $\mathfrak{m} = -\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{p}$; dabei ist $\mathfrak{p}$ in erster Annäherung mit $\mathfrak{p}'$ identisch; sie unterscheiden sich nach (11) nur durch Größen zweiter und höherer Ordnung in $\frac{v}{c}$. Durch Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Größen und des Vorzeichens von $\mathfrak{v}$ in (11) bekommen wir nämlich für $\mathfrak{M}' = 0$

$$\mathfrak{P} = (1 - \gamma)\,(\mathfrak{P}' \cdot \mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \gamma\,\mathfrak{P}'.$$

Auf dieselbe Weise hat eine bezüglich S' ruhende Kugel, die *nur magnetisch* mit dem Moment $\mathfrak{m}'$ polarisiert erscheint ($\mathfrak{P}' = 0$), vom Standpunkte eines mit S verbundenen Beobachters noch eine elektrische Polarisation mit dem Moment $\mathfrak{p} = +\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}$. Dabei muß selbstverständlich gelten

$$\mathfrak{p}'^2 = \mathfrak{p}^2 - \mathfrak{m}^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{m}'^2 = \mathfrak{m}^2 - \mathfrak{p}^2 \qquad (11\,\text{c})$$

entsprechend (10b); das innere Produkt $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}$ bleibt in beiden Fällen gleich Null entsprechend der Invarianz von (10c).

Eine scharfe Unterscheidung zwischen einem elektrischen Dipol und einem elementaren Strom, oder einem ihn ersetzenden magnetischen Dipol als Quellen des elektromagnetischen Feldes ist also nur in den entsprechenden „Ruhsystemen" möglich. Ebenso wie das elektrische Feld bei der Bewegung des es erzeugenden elektrischen Dipols teilweise in ein magnetisches übergeht, geht das elektrische Moment dieses Dipols teilweise in ein magnetisches über und *vice versa*. Wegen der Relativität der Geschwindigkeit werden die Begriffe magnetisch und elektrisch ebenso relativ wie etwa „räumlich" und „zeitlich".

Diese Betrachtungen lassen sich offenbar auf den in Kap. VII, § 8 behandelten Fall des rotierenden Elektrons anwenden. Dabei ist die Einführung der *elektrischen* Polarisation in dem „Ruhsystem" S', in welchem das Elektron nur eine Rotationsbewegung hat, unmöglich, oder besser gesagt, unzweckmäßig, denn das Elektron ist kein neutrales System. Man müßte es deshalb zunächst durch eine entgegengesetzte Ladung — im Unendlichen oder irgendwo, z. B. in seinem Mittelpunkt — neutralisieren. Im letzten Falle würde eine radiale Polarisation innerhalb des Elektrons entstehen mit dem resultierenden elektrischen Moment Null. Dagegen könnte man die Rotationsbewegung des Elektrons durch eine homogene (bei Flächenladung) oder inhomogene (bei Volumladung) magnetische Polarisation ersetzen mit dem in Kap. VII berechneten Moment $\mathfrak{m}$. Wie wir schon dort vermutet haben, muß ein solches magnetisches Elektron, wenn es sich bezüglich des Beobachters mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, elektrisch polarisiert mit dem Moment $\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}$ erscheinen. Diesem zusätzlichen

Moment entspricht nach (59), Kap. VIII, ein zusätzliches skalares Potential $+ \mathfrak{A} \cdot \frac{\mathfrak{v}}{c}$. Das ist aber gerade der Wert, der sich nach der Transformationsformel (3) ergibt, wenn wir dort $\varphi' = 0$ setzen. Das erwähnte zusätzliche elektrische Moment des rotierenden Elektrons kann auch ohne Einführung der magnetischen Polarisation berechnet werden, und zwar auf Grund der Transformationsformel (2) für die elektrische Ladungsdichte. Läßt man die relativistische „Kontraktion" des Elektrons außer acht, d. h. beschränkt sich auf Größen erster Ordnung in $\frac{v}{c}$, so wird nach (2)

$$\varrho = \varrho' + \mathfrak{j} \frac{\mathfrak{v}}{c} \simeq \varrho' + \mathfrak{j}' \frac{\mathfrak{v}}{c} .$$

Dabei ist

$$\mathfrak{j}' = \frac{\varrho'}{c} (\mathfrak{o} \times \mathfrak{r}) ,$$

wo $\mathfrak{o}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Elektrons bezüglich S' bedeutet. Daraus ergibt sich nach der Definition des elektrischen Momentes

$$\mathfrak{p} = \int \varrho \mathfrak{r} dV = \int \varrho' \mathfrak{r} \left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \cdot (\mathfrak{o} \times \mathfrak{r}) \right] dV ,$$

denn es ist $\int \varrho' \mathfrak{r} dV = 0$. Nun haben wir

$$\mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{o} \times \mathfrak{r}) = \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{o})$$

und folglich, im Mittel für verschiedene Richtungen von $\mathfrak{r}$

$$\overline{\mathfrak{r} [\mathfrak{v} \cdot (\mathfrak{o} \times \mathfrak{r})]} = \overline{\mathfrak{r} [\mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{v} \times \mathfrak{o})]} = \frac{1}{3} r^2 (\mathfrak{v} \times \mathfrak{o}) .$$

Es wird also

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{3} \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{o} \right) \int \varrho' r^2 dV = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \frac{\mathfrak{o}}{3} \int \varrho' r^2 dV ,$$

d. h. nach (45), Kap. VII,

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m} .$$

Es sei bemerkt, daß die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ nach der Relativitätstheorie, ebenso wie das magnetische Moment, als der räumliche Anteil eines Sechservektors anzusehen ist. Die Rotationsbewegung muß man, um konsequent zu sein, auf eine ganz andere Weise als die Translationsbewegung behandeln. Es ist vielmehr fraglich, ob eine Rotationsbewegung im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes überhaupt existieren kann. Denn eine Rotation eines gewöhnlichen materiellen Körpers läßt sich im wesentlichen auf eine Translationsbewegung der ihn bildenden Elektronen zurückführen; ob man von einer Rotation der einzelnen Elektronen in demselben Sinne sprechen kann, ist zunächst noch sehr zweifelhaft.

Wie schon in Kap. VII, § 8 angedeutet wurde, sind die dort gegebenen Ausdrücke (57) und (57a) für die zusätzlichen Drehmomente und Kraft,

welche wegen der Kombination von Rotation und Translation auftreten, *falsch* und müssen durch die Formeln

$$\mathfrak{M}^a = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}^a = \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}\right) \times \mathfrak{E}^a$$

und

$$\mathfrak{F}^a = (\mathfrak{p}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E}^a = \left[\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}\right)\mathrm{grad}\right]\mathfrak{E}^a$$

ersetzt werden. Dementsprechend muß man die Formeln (67) und (67b) Kap. VII, welche die Wechselwirkung zwischen den beiden magnetischen Momenten eines „rotierenden" Elektrons chrakterisieren sollten, durch

$$\mathfrak{M}^a = f \cdot (\mathfrak{p} \times \mathfrak{r})$$

und

$$\mathfrak{M}'^a = \mathfrak{r} \times (\mathfrak{p}\,\mathrm{grad})\, f\,\mathfrak{r} = -f \cdot (\mathfrak{p} \times \mathfrak{r})$$

ersetzen, in denen $[\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}\,(\mathfrak{p}\,\mathrm{grad}\, f) = 0$ ist]. Die beiden Drehmomente sind also entgegengesetzt gleich, woraus folgt, daß das resultierende Impulsmoment des Elektrons konstant bleiben muß. — Auf diese Frage werden wir nochmals im letzten Paragraph dieses Buches zurückkommen.

§ 3. Transformation des Energietensors; Kraft und Drehkraft.

Die verschiedenen Bestandteile des Energietensors ${}^2\Theta$ [vgl. das Schema (14a), Kap. VIII] transformieren sich auf eine ziemlich komplizierte Weise. Wir wollen uns deshalb auf die Betrachtung der Energiedichte ξ und der Bewegungsgröße $\mathfrak{g}$ beschränken. — Was die erstere betrifft, so gilt

$$\xi' = \Theta'_{44} = \sum_k \sum_l \alpha_{k4}\,\alpha_{l4}\,\Theta_{kl} = \alpha_{14}^2\,\Theta_{11} + 2\alpha_{14}\,\alpha_{44}\,\Theta_{14} + \alpha_{44}^2\,\Theta_{44},$$

d. h. nach (12a), Kap. VIII und (8b) Kap. IX

$$\xi' = \gamma^2\left(-\frac{v^2}{c^2}\,\frac{H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_1^2 - E_2^2 - E_3^2}{8\pi} - 2vg_1 + \xi\right)$$

oder, wegen $\xi = \dfrac{H^2 + E^2}{8\pi}$ und $\gamma^2\,(1 - v^2/c^2) = 1$

$$\xi' = \xi + 2\gamma^2\left(\frac{v^2}{c^2}\,\frac{H_2^2 + H_3^2 + E_2^2 + E_3^2}{8\pi} - vg_1\right).$$

Nun gilt offenbar, da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ die Richtung der X_1-Achse hat

$$vg_1 = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad (H_2^2 + H_3^2 + E_2^2 + E_3^2)\,\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}\right)^2$$

Die koordinatenfreie Transformationsformel für die Energiedichte lautet also

$$\xi' = \xi + \gamma^2\left[\frac{(\mathfrak{v} \times \mathfrak{E})^2 + (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H})^2}{4\pi c^2} - 2\mathfrak{v}\mathfrak{g}\right]. \tag{12}$$

Es sei bemerkt, daß das zweite Glied in den Klammern für $v \ll c$ der klassischen Transformation der kinetischen Energie entspricht.

Betrachtet man nämlich ein Teilchen mit der Masse m, das sich gegen S mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bewegt vom Standpunkt des zweiten Koordinatensystems S' aus, so bekommt man für seine Energie nach der gewöhnlichen Mechanik

$$T' = \frac{1}{2} m u'^2 = \frac{1}{2} m (\mathfrak{u} - \mathfrak{v})^2 = \frac{1}{2} m u^2 - m \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} + \frac{1}{2} m v^2$$

oder näherungsweise für $v \ll u$

$$2T' = 2T - (m\mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{v}.$$

Hier bedeutet $m\mathfrak{u}$ die Bewegungsgröße des betrachteten Teilchens in bezug auf S. Auf die Tatsache, daß die elektromagnetische Energiedichte ($\xi = \mu c^2$) der doppelten kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik entspricht, war schon in § 3, Kap. VII hingewiesen.

Was die Transformation der elektromagnetischen Bewegungsgröße betrifft, so haben wir für ihre erste Komponente

$$-icg_1' = \Theta_{14}' = \sum_k \sum_l \alpha_{k1} \alpha_{l4} \Theta_{kl} = \alpha_{11}\alpha_{14}\Theta_{11} + \alpha_{11}\alpha_{44}\Theta_{14} + \alpha_{41}\alpha_{14}\Theta_{41} + \alpha_{41}\alpha_{44}\Theta_{44},$$

d. h. nach (8b)

$$g_1' = \frac{\gamma^2}{-ic} \left\{ -icg_1 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v}{ic} \left(\frac{H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_1^2 - E_2^2 - E_3^2}{8\pi} - \xi \right) \right\}$$

oder

$$g_1' = \gamma^2 \left\{ \left(\frac{1 + v^2}{c^2}\right) g_1 - \frac{2v}{c^2} \xi + \frac{v}{c^2} \frac{E_1^2 + H_1^2}{4\pi} \right\}. \qquad (12a)$$

Für die zweite Komponente bekommen wir

$$-icg_2' = \Theta_{24}' = \sum \sum \alpha_{k2} \alpha_{l4} \Theta_{kl} = \sum_l \alpha_{l4} \Theta_{2l} = \alpha_{14} \Theta_{21} + \alpha_{44} \Theta_{21}, \text{ d. h.}$$

$$g_2' = \gamma \left\{ g_2 + \frac{v}{c^2} \frac{E_1 E_2 + H_1 H_2}{4\pi} \right\}$$

und ebenso für die dritte

$$g_3' = \gamma \left\{ g_3 + \frac{v}{c^2} \frac{E_1 E_3 + H_1 H_3}{4\pi} \right\}.$$

Diese Formeln lassen sich vektoriell nicht einfach zusammenfassen.

Wir wollen noch die folgende Formel für den linearen Invariant des Tensors ${}^2\Theta$ hinzufügen:

$$\sum_{k=1}^{4} \Theta_{kk} \equiv 0.$$

Sie ergibt sich sofort aus (13), Kap. VIII.

Wir haben in Kap. VII, § 7, nebst dem Vektor $\mathfrak{g}$ noch den Vektor $\mathfrak{r} \times \mathfrak{g}$ eingeführt, den wir als die Dichte des elektromagnetischen Impulsmoments definierten. Diese Größe muß vom Standpunkte der Relativitätstheorie aus als ein Bestandteil einer ziemlich komplizierten vierdimensionalen Größe aufgefaßt werden. Die gewöhnlichen Komponenten des Vektors $\mathfrak{r} \times \mathfrak{g}$, $x_k g_l - x_l g_k$ bilden nämlich drei (oder sechs) Komponenten eines teilweise symmetrischen, teilweise schiefsymmetrischen

vierdimensionalen Tensors *dritten* Ranges, wobei die allgemeine Gestalt seiner Komponenten ist

$$x_k \Theta_{ln} - x_l \Theta_{kn}.$$

Die vierdimensionale Erweiterung des gewöhnlichen dreidimensionalen *Drehmoments* $\mathfrak{r} \times \mathfrak{f}$ wird dementsprechend durch den schiefsymmetrischen Tensor oder Sechservektor ${}^2\mathfrak{M}$ mit den Komponenten

$$M_{kl} = x_k f_l - x_l f_k \tag{13}$$

dargestellt. Dabei sind die erste, zweite und dritte Komponente des Vektors $\mathfrak{r} \times \mathfrak{f}$ gleich M_{23}, M_{31}, M_{12}. Sie verhalten sich also zum Drehmomentstensor ${}^2\mathfrak{M}$ wie die magnetische Feldstärke zum Feldtensor ${}^2\mathfrak{H}$. Der zugehörige, der elektrischen Feldstärke entsprechende Anteil von ${}^2\mathfrak{M}$ ist ein Vektor mit den Komponenten

$$iM_{14}, \quad iM_{24}, \quad iM_{34},$$

d. h. mit Rücksicht auf $f_4 = \frac{il}{c}$

$$\mathfrak{r} \frac{l}{c} - c\mathfrak{f}. \tag{13a}$$

Zu diesem Vektor und im allgemeinen zum Tensor ${}^2\mathfrak{M}$ werden wir noch später zurückkommen. Er spielt eine nicht unwesentliche Rolle in der Theorie der Rotations- und Umlaufsbewegung. Die Transformationsformeln der Vektoren $\mathfrak{r} \times \mathfrak{f}$ und $\frac{l}{c}\mathfrak{r} - c\mathfrak{f}$ sind mit den Transformationsformeln für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ vollkommen identisch.

Es sei schließlich bemerkt, daß die Komponenten der „Viererkraft" (oder „Vierernpuls") $\mathfrak{f}$ sich auf dieselbe Weise transformieren wie die Komponenten aller anderen Vierervektoren (vgl. § 1). Wir brauchen deshalb auf diese Frage nicht einzugehen. Es scheint aber nicht überflüssig, zu betonen, daß in der Relativitätstheorie die gewöhnliche Kraft $\mathfrak{f}$ eine nicht nur hinsichtlich ihrer Richtung, sondern auch ihrem Betrage nach *variante* Größe ist, ebenso wie der räumliche Abstand zwischen zwei Raumzeitpunkten. Dagegen ist die Differenz

$$f^2 - \frac{l^2}{c^2} = \mathfrak{f}^2$$

als eine invariante Größe anzusehen. Setzt man hier $l = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{u}$ ein, so wird

$$\mathfrak{f}^2 = \mathfrak{f}^2 - \left(\mathfrak{f} \cdot \frac{\mathfrak{u}}{c}\right)^2$$

Aus der Bedingung $u < c$ folgt, daß der Vektor $\mathfrak{f}$ *raumartig* ist, und die Größe

$$f_0 = \sqrt{f^2 - \left(\mathfrak{f} \cdot \frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2}. \tag{13b}$$

stellt seinen „Ruhbetrag" — den „natürlichen" kleinstmöglichen Betrag dar. Die Relativität der Kraft ist eine unmittelbare Folge der Relativität der Geschwindigkeit, denn letztere nach der Formel $\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} + \frac{v}{c} \times \mathfrak{H}$ tritt explizite in dem Ausdruck der Kraft ein.

§ 4. Anwendung der relativistischen Transformationsformeln auf die geradlinig-gleichförmige Bewegung von Elektronen und Oszillatoren.

Wir haben schon in § 2 darauf hingewiesen, wie sich mittels der Relativitätstheorie der Einfluß der Translation (mit konstanter Geschwindigkeit) auf die Eigenschaften des rotierenden Elektrons bestimmen läßt. Wir wollen nun auf dieselbe Weise das elektromagnetische Feld eines bewegten Elektrons — zunächst ohne magnetisches Moment — und dann das Feld eines beliebigen Oszillators (von dem das magnetische Elektron als Spezialfall aufgefaßt werden darf) berechnen. Dabei werden wir der Einfachheit halber das Elektron ebenso wie den Oszillator als punktförmig behandeln.

Das Feld dieser Teilchen, bezüglich das Koordinatensystem S', wo sie ruhen, muß selbstverständlich als bekannt vorausgesetzt werden. Die Geschwindigkeit von S' relativ zu S bezeichnen wir, wie immer, mit $\mathfrak{v}$.

a) *Elektron* (Punktladung). Die elektromagnetischen Potentiale in S' sind

$$\mathfrak{A}' = 0, \quad \varphi' = \frac{e}{R'}.$$

Daraus folgt für das System S nach (3) und (3a) (wobei die gestrichenen Größen mit den ungestrichenen vertauscht werden können unter Umkehrung des Vorzeichens von $\mathfrak{v}$):

$$\mathfrak{A} = \varphi \frac{\mathfrak{v}}{c}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{R'\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right). \tag{14}$$

Es entsteht also die Aufgabe, den Abstand R' durch „ungestrichene" Größen auszudrücken. — Wir nehmen an, daß für $t = t' = 0$ das Elektron sich in dem gemeinsamen Nullpunkt (O, bzw. O') der beiden Koordinatensysteme S und S' befindet. Es handelt sich also darum, für einen in S willkürlich gegebenen Raumzeitpunkt $Q(\mathfrak{r}, t)$ die zugehörige Größe R' zu berechnen. Der Radiusvektor des Elektrons in S sei durch $\mathfrak{r}^0$ bezeichnet. Es ist offenbar $\mathfrak{r}^0 = OO' = \mathfrak{v}t$ und der Abstand des betrachteten Aufpunktes $P(\mathfrak{r})$ vom Elektron im Augenblick t (in S) ist gleich dem Betrage des Vektors $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}^{(0)}$.

Führt man, wie es üblich ist, die Koordinatenachsen $(X_1 X_2 X_3)$ und $(X_2' X_2 X_3)$ ein, so wird nach der Lorentztransformation

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_1 - x_1^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

und

$$R'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \frac{(x_1 - x_1^0)^2 + (1-\beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}{(1-\beta^2)} = \frac{R^{*2}}{1-\beta^2}, \tag{14a}$$

d. h. folglich

$$\varphi = \frac{e}{R^*} \tag{14b}$$

in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Kap. VI.

Aus diesen Formeln lassen sich die elektrische und magnetische Feldstärke durch Differentiation nach den Koordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeit ermitteln. Man kann sie aber *direkt* bestimmen aus den entsprechenden Ausdrücken für das Ruhsystem S' nach den Transformationsformeln (9a) und (9b) oder der dazu reziproken Formeln. Es ist nämlich

$$\mathfrak{E}' = \frac{e\mathfrak{R}'}{R^3}, \quad \mathfrak{H}' = 0. \tag{15}$$

Folglich haben wir

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} = (1-\gamma)(\mathfrak{E}'\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \gamma\mathfrak{E}' = \frac{e}{R'^3}\{(1-\gamma)(\mathfrak{R}'\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \gamma\mathfrak{R}'\}.$$

Nun ist in koordinatenmäßiger Schreibweise

$$\mathfrak{R}'\mathfrak{v}_0 = x_1' = \frac{x_1 - x_1^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x_1 - x_1^0) = \gamma(\mathfrak{R}\mathfrak{v}_0).$$

Die erste (zu $\mathfrak{v}_0$ parallele) Komponente des Vektors $(1-\gamma)(\mathfrak{R}'\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \gamma\mathfrak{R}'$ ist also gleich

$$(1-\gamma)\gamma\mathfrak{R}\mathfrak{v}_0 + \gamma^2\mathfrak{R}\mathfrak{v}_0 = \gamma\mathfrak{R}\mathfrak{v}_0.$$

Da die anderen Komponenten von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ identisch sind, so haben wir einfach

$$(1-\gamma)\gamma(\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{v}_0)\mathfrak{v}_0 + \gamma\mathfrak{R}' = \gamma\mathfrak{R} \tag{15a}$$

und somit nach (14a)

$$\mathfrak{E} = (1-\beta^2)e\frac{\mathfrak{R}}{R^{*3}}. \tag{15b}$$

Das ist die schon bekannte Formel (13), Kap. VI.

b) *Oszillator.* Wir betrachten den Oszillator als einen Doppeldipol, dessen elektrisches und magnetisches Moment in dem „Ruhsystem" S' durch die Vektoren $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ gegeben sind. Diese Vektoren können zunächst beliebige (bekannte) Funktionen oszillierender Art der Zeit t' sein. Die Vektoren $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ können wir zusammenfassen in einen schiefsymmetrischen Momenttensor $^2\mathfrak{p}$ mit den Komponenten (bezüglich S')

$$p'_{23} = m'_1, \quad p'_{31} = m'_2, \quad p'_{12} = m'_3.$$
$$p'_{14} = ip'_1, \quad p'_{24} = ip'_2, \quad p'_{34} = ip'_3.$$

Das elektromagnetische Feld dieses Doppeloszillators im System S' ist durch die bekannten Ausdrücke für das elektrische und magnetische Polarisationspotential

$$\mathfrak{Z}' = \frac{\mathfrak{p}'(t' - R'/c)}{R'} \quad \mathfrak{Z}'^* = \frac{\mathfrak{m}'(t' - R'/c)}{R'} \tag{16}$$

bestimmt [vgl. (28a), Kap. V; dort wurde durch t' die jetzige Differenz $t' - R'/c$ bezeichnet].

Die transformierten Ausdrücke für diese Potentiale (in dem System S) lauten, nach den zu (11) reziproken Formeln, wobei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{Z}$

bzw. $\mathfrak{Z}^*$ zu ersetzen sind:

$$\mathfrak{Z} = (1-\gamma)(\mathfrak{Z}'\cdot\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \gamma\left(\mathfrak{Z}' + \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{Z}'^*\right),$$

$$\mathfrak{Z}^* = (1-\gamma)(\mathfrak{Z}'^*\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \gamma\left(\mathfrak{Z}'^* - \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{Z}'\right).$$

Führt man hier die obigen Ausdrücke ein, und berücksichtigt, daß $R' = \gamma R^*$ ist, so wird

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Z} &= \frac{1}{R^*}\left[(\gamma^{-1}-1)(\mathfrak{p}'\cdot\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{p}' + \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{m}'\right]\\ \mathfrak{Z}^* &= \frac{1}{R^*}\left[(\gamma^{-1}-1)(\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{v}_0)\,\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{m}' - \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{p}'\right]\end{aligned}\right\} \qquad (16a)$$

In diesen Formeln sind $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ als *gegebene* Vektorfunktionen anzusehen und wir brauchen nur ihr *Argument*, d. h. die auf S' bezogene effektive Zeit

$$\tau' = t' - R'/c,$$

welche die Rolle der *Phase* spielt, durch t und $\mathfrak{r}$ (oder $\mathfrak{R}$) auszudrücken.

Nun ist $R' = \gamma R^*$ und

$$t' = \frac{t - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v})/c^2}{\sqrt{1-v^2/c}} = \gamma\left(t - \frac{\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}}{c^2}\right).$$

Es wird folglich

$$\tau' = \gamma\left(t - \frac{\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}}{c^2} - \frac{R^*}{c}\right) = \gamma\tau, \qquad (16b)$$

wo τ die zu τ' entsprechende Bedeutung in bezug auf S hat. Mittels dieser Formel kann man aus (16a) durch Differentiation nach x_1, x_2, x_3, t die Potentiale $\mathfrak{A}$, φ und die Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ berechnen. Wie wir aber oben schon bemerkt haben, ist es im allgemeinen viel einfacher, die gesuchten Größen, z. B. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, aus den entsprechenden „gestrichenen" Größen, die in dem betrachteten Fall, nach (31), (32), (51a) und (51b), Kap. V, die Gestalt

$$\mathfrak{E}' = \frac{\mathfrak{R}_0'\times(\mathfrak{R}_0'\times\ddot{\mathfrak{p}}') + \mathfrak{R}_0'\times\ddot{\mathfrak{m}}'}{c^2 R}, \qquad \mathfrak{H}' = \frac{\ddot{\mathfrak{p}}'\times\mathfrak{R}_0' + \mathfrak{R}_0'\times(\mathfrak{R}_0'\times\ddot{\mathfrak{m}}')}{c^2 R}$$

haben, *direkt* zu berechnen [nach den zu (9a) und (9b) reziproken Formeln].

Wir wollen aber auf diese Rechnung nicht halten und uns mit der Bemerkung begnügen, daß auch bezüglich S die elektrische und magnetische Feldstärke numerisch gleich und zueinander senkrecht sein müssen [nach (10b) und (10c)]. Daraus folgt, daß der Strahlungsvektor $\mathfrak{K} = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{H})$ ebenso wie $\mathfrak{K}'$, als Produkt der Energiedichte mal Lichtgeschwindigkeit dargestellt werden kann. Die Richtung dieser Lichtgeschwindigkeit muß aber in S und S' verschieden sein.

Die Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ könnte man direkt mittels der Transformationsformeln (12a) und der auf sie folgenden bestimmen.

Es ist aber einfacher, die Änderung der beiden Faktoren ξ und $\mathfrak{c}$, (letzteres selbstverständlich nur hinsichtlich seiner Richtung) einzeln zu berechnen.

Der Einfachheit halber werden wir voraussetzen, daß das ausgestrahlte Licht „unpolarisiert" ist, d. h. daß die Schwingungen des Oszillators nach allen Richtungen gleichmäßig verteilt sind, und daß dementsprechend die Vektoren $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{E}'$ in allen zu der Wellennormale $\mathfrak{n}'$ $(= \mathfrak{R}'/R')$ senkrechten Richtungen durchschnittlich denselben absoluten Wert haben. Dabei müssen ihre Mittelwerte $\overline{\mathfrak{E}}$ und $\overline{\mathfrak{H}}$ offenbar verschwinden. Für die Mittelwerte ihrer Quadrate haben wir dagegen nach der Gleichung $\frac{E'^2 + H'^2}{8\pi} = \xi'$

$$\overline{E'^2} = \overline{H'^2} = 4\pi\xi'.$$

Die Mittelwerte von $(\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}')^2$ und $(\mathfrak{v}\times\mathfrak{E})^2$ sind offenbar gleich. Um sie zu bestimmen, setzen wir $\mathfrak{H}' = \mathfrak{n}'\times\mathfrak{E}'$ (oder $\mathfrak{E}' = \mathfrak{H}'\times\mathfrak{n}'$). Dann wird $\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}' = \mathfrak{v}\times(\mathfrak{n}'\times\mathfrak{E}') = \mathfrak{n}'\,(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E}') - \mathfrak{E}'\,(\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{v})$ und folglich

$$\overline{(\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}')^2} = \overline{(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E}')^2} + \overline{E'^2}\,(\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{v}) \quad (\text{denn } \mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{n}' = 0 \text{ ist}),$$

oder wegen $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}')^2 = v^2E'^2 - (\mathfrak{v}\times\mathfrak{E}')^2$

$$\overline{(\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}')^2} + \overline{(\mathfrak{v}\times\mathfrak{E}')^2} = v^2\,\overline{E'^2}\,(1 + \cos^2\theta')$$

wo $\theta' = (\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{v}_0)$ den Winkel zwischen der Wellennormale (d. h. dem Strahl $\mathfrak{R}'$) und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bedeutet.

Wir erhalten also nach (12), unter Vertauschung der gestrichenen und der ungestrichenen Größen und mit Rücksicht auf

$$\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{g}' = \frac{v\xi'}{c}\cos\theta',$$

die Formel:

$$\xi = \xi'\left\{1 + \gamma^2\left[\frac{v^2}{c^2}(1 + \cos^2\theta') + 2\frac{v}{c}\cos\theta'\right]\right\}.$$

Setzt man hier $\frac{v}{c} = \beta$ und beachtet, daß $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ ist, so bekommt man nach einer kleinen Umformung

$$\xi = \xi'\,[\sin^2\theta' + \gamma^2\,(\cos\theta' + \beta)^2] = \xi'\gamma^2\,(\beta\cos\theta' + 1)^2.$$

Die Richtungsänderung der Lichtstrahlen (Wellennormalen) beim Übergange von dem Koordinatensystem S' zu S läßt sich ganz einfach ableiten aus der Formel (16b) für die „Phase", ausgedrückt als Funktion von $\mathfrak{r}$ (und t). Denn die Wellenflächen können allgemein definiert werden als die Flächen *konstanter Phase* bei *festem Werte der Zeit*. Vom Standpunkt des Koordinatensystems S', in dessen Mittelpunkt O' der Oszillator „ruht", sind die Flächen konstanter Phase τ' für $t' =$ konst, durch die Gleichung $R' =$ konst bestimmt. Sie sind also — wie von vornherein klar ist — konzentrische Kugeln. Vom Standpunkte des

Systems S sind sie dagegen nach (16b) durch die Gleichung

$$\psi = \frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v}}{c} + R^* = \text{konst.} \tag{17}$$

gegeben. Die Richtung der Wellennormale im Aufpunkte $(\mathfrak{r}, t)$ ist offenbar durch den Gradient von ψ bestimmt. Nun haben wir

$$\operatorname{grad} \psi = \frac{\mathfrak{v}}{c} + \operatorname{grad} R^*,$$

oder in koordinatenmäßiger Schreibweise

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \beta + \frac{x_1 - x_1^0}{R^*}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = (1-\beta^2)\frac{x_2}{R^*}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = (1-\beta^2)\frac{x_3}{R^*}$$

und folglich nach den bekannten Formeln

$$x_1 - x_1^0 = \gamma x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad R^* = \frac{R'}{\gamma}, \quad 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \beta + \frac{x_1'}{R'}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{x_2'}{\gamma R'}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{x_3}{\gamma R'}.$$

Bezeichnet man die Winkel der Wellennormale mit der $\mathfrak{v}$-Richtung in S und S' mit θ bzw. θ', so hat man offenbar

$$\cos\theta = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{|\operatorname{grad}\psi|}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)^2}}{|\operatorname{grad}\psi|}$$

einerseits und

$$\cos\theta' = \frac{x_1'}{R'}, \quad \sin\theta' = \frac{\sqrt{x_2'^2 + x_3'^2}}{R'}$$

andererseits. Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'}{(\gamma\cos\theta' + \beta)}. \tag{18}$$

Es sei z. B. S ein mit der Erde verbundenes Koordinatensystem. Als Oszillator möge ein „Fixstern" dienen. Dieser „Fixstern" muß sich relativ zu S bewegen, und zwar mit einer periodisch wechselnden Geschwindigkeit (wegen der Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne). Dementsprechend muß sich die auf der Erde beobachtete Richtung seiner Lichtstrahlen oder mit anderen Worten sein (scheinbarer) Ort am Himmel periodisch ändern. Das ist die von *Bradley* entdeckte Erscheinung der *Aberration der Fixsterne.* Man pflegt gewöhnlich nicht von der Lichtstrahlenrichtung, sondern von der dazu entgegengesetzten Beobachtungsrichtung zu sprechen, und nicht die Bewegung des Sternes relativ zur Erde, sondern die Bewegung der Erde relativ zum Stern zu betrachten. Dementsprechend muß man die Vorzeichen von θ' (Beobachtungswinkel) und β (Geschwindigkeit der Erde dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit) umkehren, wobei die obige Formel unverändert bleibt.

Es ist zu beachten, daß man in Wirklichkeit nur die *Änderung* des Winkels θ beobachten kann, die in der Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne ihren Grund hat; es muß dabei im allgemeinen zwischen θ und θ' noch eine *konstante* Differenz übrig bleiben, welche von der relativen Translationsbewegung des Sternes und des Sonnensystems herrührt. Diese Verhältnisse sind schematisch in der vorliegenden Figur (Abb. 39) dargestellt. Dabei bedeutet B die Erde und A' die sog. wahre Lage des Sternes; A ist die „scheinbare" Lage (vom Standpunkte des Systems S), BC die momentane Bewegungsrichtung der Erde (von S' beurteilt). Die Differenz $\alpha = \theta' - \theta$ heißt der *Aberrationswinkel*. Der Tangens dieses Winkels ist nach (18) gleich

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta' \operatorname{tg}\theta} = \sin\theta' \frac{(\gamma - 1)\cos\theta' + \beta}{\gamma\cos\theta'(\cos\theta' + \beta) + \sin^2\theta'}.$$

Die Geschwindigkeit der Erde relativ zu den Sternen (und es handelt sich *nur um die relative* Geschwindigkeit) ist sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Man kann deshalb $\gamma = 1$ setzen und im allgemeinen Glieder zweiter Ordnung in β weglassen. Dabei nimmt die obige Formel die bekannte einfache Gestalt an:

$$\alpha \simeq \beta \sin\theta' \simeq \beta \sin\theta .$$

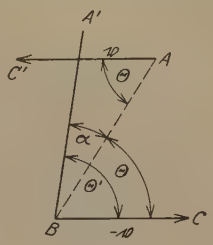

Abb. 39.

Wir haben bisher keine Voraussetzung über die Art der Lichtschwingungen gemacht. Wir wollen nun annehmen, daß diese Schwingungen *harmonisch* sind (monochromatisches Licht). Ihre Frequenz im Ruhsystem S' („wahre" Frequenz) sei ν'. Die Abhängigkeit der Oszillatorschwingungen von der Zeit drückt sich also bezüglich S' durch den Phasenfaktor $\cos 2\pi\nu' t'$ und die entsprechende Abhängigkeit für Lichtschwingungen in dem betrachteten Aufpunkte durch $\cos 2\pi\nu'\tau'$ aus, d. h. vom Standpunkte des Koordinatensystems S (irdischer Astronom) durch

$$\cos 2\pi\nu'\gamma\left(t - \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{v}}{c^2} - \frac{R^*}{c}\right).$$

Für einen in S festen Punkt (Teleskop) bleibt $\mathfrak{r}$ konstant. Dagegen muß sich die Größe R^* langsam ändern. Für ein nicht zu langes Zeitintervall $t - t_0$ kann man ihre Abhängigkeit von der Zeit durch $\left(\frac{dR^*}{dt}\right)_0 (t - t_0)$ darstellen. Nun ist $\frac{dR^*}{dt} = \frac{(x_1^0 - x_1)}{R^*}\frac{dx_1^0}{dt} = -\frac{\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{v}}{R^*}$. Der obige Phasenfaktor nimmt dabei die folgende Gestalt an

$$\cos\left\{2\pi\nu'\gamma\left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{R^*}\cdot\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)(t - t_0 + \text{konst})\right\}.$$

Die in S beobachteten Lichtschwingungen sind also auch harmonisch, haben aber eine von ν' verschiedene Frequenz

$$\nu = \nu'\gamma\left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{R^*}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) \qquad (19)$$

oder näherungsweise für sehr große Abstände

$$\nu = \nu' \gamma \, (1 + \beta \cos \theta) . \tag{19a}$$

Diese Formel drückt das bekannte *Doppler-Fizeau*sche Prinzip aus, aber in einer gegenüber der üblichen verschärften Form: zu dem „linearen" *Doppler*effekt, der in dem Faktor erster Ordnung in β steckt und für $\theta = \frac{\pi}{2}$ (Bewegung senkrecht zur Beobachtungsrichtung) verschwindet, kommt nämlich noch ein „quadratischer" Effekt hinzu, welcher dem durch den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ dargestellten Unterschied des Zeitablaufs in S und S' entspricht. Bei den in der Natur tatsächlich vorkommenden Geschwindigkeiten — sowohl von Sternen wie von einzelnen leuchtenden Atomen — braucht man diesen Faktor nicht zu berücksichtigen.

Die letzten Resultate über die Änderung der *Richtung* und der *Frequenz* des Lichtes durch die relative Bewegung der Lichtquelle und des Beobachters lassen sich ganz einfach ableiten, wenn man sich die Lichtquelle (Oszillator) von vornherein als *unendlich entfernt* denkt und dementsprechend die Wellen als eben behandelt. Die Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes solcher Wellen von Ort und Zeit ist bekanntlich durch einen Phasenfaktor von der Gestalt $\Phi = e^{\pm i\psi}$ bestimmt, wo die Phase ψ sich durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ und die Zeit t *linear* ausdrückt nach der Formel [vgl. (37a) und (37b) § 8, Kap. V]

$$\psi = 2\pi \, (-\nu t + \mathfrak{k}\mathfrak{r}) . \tag{20}$$

Der Vektor $\mathfrak{k}$ ist numerisch gleich der reziproken Wellenlänge $\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$ und ist parallel der Wellennormale $\mathfrak{n}$ gerichtet.

Der Ausdruck (20) bezieht sich auf das Koordinatensystem S. Sein numerischer Wert muß aber von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein. Mit anderen Worten, die Phase ψ ist *gegen die Lorentztransformation invariant*. Da aber $\mathfrak{r}$ und t die räumliche und zeitliche Projektion des Vierervektors $\mathfrak{x}$ bilden, müssen auch $\mathfrak{k}$ und ν — abgesehen von gewissen Koeffizienten — entsprechende Projektionen eines bestimmten Vierervektors $\mathfrak{k}$ sein, so daß die Phase ψ gleich dem inneren Produkte dieser Vierervektoren (mal 2π) ist:

$$\psi = 2\pi \, \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x} = 2\pi \sum_{l=1}^{4} k_l x_l . \tag{21}$$

Andererseits läßt sich ψ nach (20) koordinatenmäßig in der Form

$$\psi = 2\pi \, (+k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \nu t)$$

darstellen. Durch Vergleich mit (21) bekommen wir $-\nu t = k_4 x_4 = k_4 i c t$, d. h.

$$k_4 = \frac{i}{c} \nu = \frac{i}{\lambda} . \tag{21a}$$

Man muß also die (mit $\frac{i}{c}$ multiplizierte) Frequenz als die vierte Kompo-

nente eines Vierervektors $\mathfrak{k}$ — des *Wellenvektors* — betrachten. Das Quadrat dieses Vierervektors ist identisch gleich Null,

$$\mathfrak{k}^2 = \sum_{l=1}^{4} k_l^2 = 0\,, \tag{21b}$$

was der Tatsache entspricht, daß er die Fortpflanzung einer Wirkung mit Lichtgeschwindigkeit darstellt.

Aus den obigen Überlegungen folgt, daß die räumliche und zeitliche Projektion von $\mathfrak{k}$ sich ebenso transformieren wie die entsprechenden Projektionen von $\mathfrak{r}$.

Wir haben also nach (1) und (1a) (wobei $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{k}$ und t durch $\frac{\nu}{c^2}$ zu ersetzen ist):

$$\nu' = \gamma\,(\nu - \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{v}) \tag{22}$$

und

$$\mathfrak{k}' = \gamma\left(\mathfrak{k} - \frac{\mathfrak{v}\nu}{c^2}\right) + (1-\gamma)\,(\mathfrak{v}_0\times\mathfrak{k})\times\mathfrak{v}_0\,. \tag{22a}$$

Es sei erinnert, daß der Vektor $(\mathfrak{v}_0\times\mathfrak{k})\times\mathfrak{v}_0$ nichts anderes als die Projektion von $\mathfrak{k}$ auf eine zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Ebene ist.

Wir führen nun wieder die Koordinatenachsen $(X_1X_2X_3)$, $(X_1'X_2X_3)$ ein und nehmen an, daß der Vektor $\mathfrak{k}$ in der X_1X_2-Ebene liegt und mit $\mathfrak{v}$ den Winkel θ bildet. Dann nimmt (22) die Gestalt an

$$\nu' = \gamma\nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Das ist die zu (19a) reziproke Formel, d. h. die Formel des *Dopplerprinzips*. — Durch Projektion von (22a) auf die erste und zweite Achse bekommen wir

$$k'\cos\theta' = \gamma\left(k\cos\theta - \frac{v\nu}{c^2}\right) = \gamma k\,(\cos\theta - \beta)$$

$$k'\sin\theta' = \gamma k\sin\theta + (1-\gamma)\,k\sin\theta = k\sin\theta\,,$$

woraus sofort folgt

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\,(\cos\theta - \beta)}\,,$$

d. h. die zu (18) reziproke Formel der *Bradley*schen Aberration.

§ 5. Das elektromagnetische Feld eines beliebig bewegten Oszillators.

Mittels der Lorentztransformation kann man aus dem (als bekannt vorausgesetzten) Felde eines ruhenden Oszillators das Feld eines *geradlinig gleichförmig* bewegten Oszillators bestimmen. Wir wollen jetzt die entsprechende Aufgabe für eine ganz *beliebige* Translationsbewegung lösen. Dabei werden wir den Oszillator als punktförmig behandeln. Es sei bemerkt, daß er ebenso gut eine Lichtquelle (von irgendeiner Schwingungsart) wie ein „rotierendes" Elektron mit einem zeitlich variablen magnetischen Moment repräsentieren kann.

Die gesuchte Lösung ergibt sich am einfachsten mittels einer Methode, die wir schon in Kap. VI, § 4 bei der Bestimmung der elektromagneti-

schen Potentiale einer bewegten Punktladung angewandt haben. Wir ersetzen nun diese Ladung durch den betrachteten Oszillator und das Viererpotential $\mathfrak{A}$ durch das Polarisationspotential ${}^2\mathfrak{Z}$. Da letzteres ebenso wie $\mathfrak{A}$ der Differentialgleichung $\Box\, {}^2\mathfrak{Z} = 0$ genügt, wobei der Oszillator bloß als Punktsingularität auftritt, kann man eine Punktlösung, die einem singulären Raumzeitpunkt Q' $(\mathfrak{r}')$ entspricht, sofort hinschreiben, und zwar in der Form

$$ {}^2\mathfrak{Z} = \frac{{}^2\mathfrak{p}}{S^2}. $$

wo $S^2 = |\,\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'\,|^2$ den vierdimensionalen (raumzeitlichen) Abstand zwischen Q' und dem betrachteten Aufpunkt Q $(\mathfrak{r})$ bedeutet. Es entsteht nun die Frage, wie man aus solchen Punktlösungen eine „Linienlösung" schaffen soll, die der wirklichen Translationsbewegung des Oszillators und seinem wirklichen (zeitlich variablen) elektromagnetischen Moment entspricht.

Da zwischen den Komponenten des Polarisationspotentials keine identische Beziehung (wie etwa $\Box\, \mathfrak{A} = 0$) besteht, müssen wir für die Beantwortung der obigen Frage andere Anhaltspunkte suchen.

Es ist zunächst klar, daß im Spezialfall des ruhenden Oszillators die zu bestimmende allgemeine Lösung in die bekannte Lösung $Z_{kl} = \frac{p'_{kl}}{R}$ übergehen muß, wo p'_{kl} die Komponenten des Polarisationstensors für den effektiven Augenblick $t' = t - R/c$ sind. Diese spezielle Lösung läßt sich darstellen in der Form

$$ Z_{kl} = \frac{c}{\pi i} \oint \frac{p'_{kl}}{S^2}\, dt'. $$

Das Integral muß dabei genommen werden längs einer geschlossenen Kurve in der komplexen t'-Ebene um die der retardierten Wirkung entsprechende Wurzel der Gleichung $S^2 = 0$ (vgl. die entsprechende Darstellung des *Coulomb*schen Potentials in § 4, Kap. VI).

Versucht man die vorhergehende Formel auf den allgemeinen Fall zu übertragen, so stößt man vom Standpunkte der Relativitätstheorie auf die folgende Schwierigkeit: die Größen Z_{kl} und p_{kl} sind *kovariant*, S^2 ist ein invarianter Skalar, dt' dagegen ist *kein invarianter Skalar*, sondern die durch ic dividierte vierte Komponente des Vierervektors $d\mathfrak{r}'$, welcher eine infinitesimale raumzeitliche Verschiebung des Oszillators längs seiner vierdimensionalen „Weltlinie" entspricht.

Nun bemerken wir, daß dieser Vierervektor, wegen der Bedingung $v < c$ ($\mathfrak{v}$-Translationsgeschwindigkeit des Oszillators), einen *zeitartigen* Charakter haben muß. Es ist deshalb möglich, das variante Zeitintervall dt' durch ein invariantes Zeitintervall $d\tau'$ zu ersetzen, das sich ergibt, wenn man den Oszillator vom Standpunkte eines solchen Inertialsystems betrachtet, in welchem er *momentan* ruht, d. h. welches

sich in bezug auf das ursprüngliche System mit derselben Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wie der Oszillator in dem betrachteten Raumzeitpunkt bewegt. Dieses *natürliche* kleinstmögliche Zeitintervall drückt sich nach (24a), Kap. VIII, durch die Formel

$$d\tau' = dt' \sqrt{1 - v'^2/c^2} \tag{23}$$

aus. Es sei bemerkt, daß der entsprechende raumzeitliche Abstand zwischen den „Punkten" $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}' + d\mathfrak{r}'$, den wir durch ds bezeichnen wollen, gleich ist

$$ds' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2} = icdt' \sqrt{1 - \left(\frac{dx_1'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dx_2'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dx_3'}{dt'}\right)^2}$$

d. h.
$$ds' = icd\tau . \tag{23a}$$

Man nennt ds' das Bogenelement der vierdimensionalen „Weltlinie".

Die allgemeine kovariante Formel für Z_{kl} lautet also

$$Z_{kl} = \frac{e}{\pi i} \oint \frac{p'_{kl} \sqrt{1 - v'^2/c^2}}{S^2} dt' . \tag{24}$$

Durch Residuumbildung in bezug auf den „Retardierungspol" bekommen wir ebenso wie in § 4, Kap. VI:

$$Z_{kl} = \left[\frac{p'_{kl} \sqrt{1 - v'^2/c^2}}{(1 - v'_R/c)\, R}\right]_{t_0 = t - R/c} \tag{24a}$$

Damit ist die anfangs gestellte Aufgabe gelöst. Die Methode, welche wir dabei benützt haben, kann als Illustration der methodologischen Verwertung der Relativitätstheorie dienen.

Wir wollen noch zeigen, wie sich am einfachsten aus Z_{kl} die gewöhnlichen elektromagnetischen Potentiale $\mathfrak{A}, \varphi$, berechnen lassen. Dies geschieht viel einfacher auf Grund der vierdimensionalen Formel (24) als auf Grund der entsprechenden dreidimensionalen Formel (24a). — Es ist im allgemeinen am zweckmäßigsten, den Übergang zum gewöhnlichen dreidimensionalen Raum beim *Endresultate* zu machen, und alle Zwischenrechnungen vierdimensional auszuführen. — Nach § 1, Kap. VIII, haben wir

$$A_k = \sum_l \frac{\partial Z_{kl}}{\partial x_l} = \frac{e}{\pi i} \oint \sum_l p'_{kl} \sqrt{1 - v'^2/c^2} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{S^2}\right) dt'$$

oder mit der Abkürzung

$$p^*_{kl} = p'_{kl} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{25}$$

und mit Rücksicht auf $\frac{\partial S}{\partial x_l} = \frac{x_l - x'_l}{S}$ und $p_{kl} = -p_{lk}$

$$A_k = \frac{2e}{\pi i} \oint \frac{\sum p^*_{lk} (x_l - x'_l)}{S^4} dt' . \tag{25a}$$

Für $t' \to t_0'$ haben wir ferner $S^4 = a_2 (t' - t'_0)^2 + a_3 (t' - t'_0)^3 + \cdots$

mit $\quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 (S^4)}{dt'^2}\right)_0, \quad a_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 (S^4)}{dt'^3}\right)_0$ usw.

Folglich wird:

$$\frac{1}{S^4} = \frac{1}{a_2 (t' - t_0')^2} \left\{ 1 - \frac{a_3}{a_2} (t' - t_0') + \cdots \right\},$$

und, nach (25a):

$$A_k = \frac{4c}{a_2} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t')}{(t' - t_0')^2} dt' - \frac{4}{a_2^2} \frac{a_3 c}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t')\, dt'}{t' - t_0'},$$

wo zur Abkürzung

$$F_k(t') = \sum_l p_{lk}^* (x_l - x_l')$$

gesetzt ist.

Da die Funktion $F_k(t')$ für $t' = t_0'$ endlich bleibt, so gilt (vgl. Kap. VI, § 5)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t')\, dt'}{t' - t_0'} = F_k(t_0') \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t')}{(t' - t_0')^2} dt' = \left\{ \frac{d}{dt'} F_k(t') \right\}_{t' = t_0'}.$$

Es ergibt sich ferner, nach einer elementaren Rechnung:

$$a_2 = 4R^2 c^2 (1 - v_R'/c)^2$$

und

$$a_3 = -4Rc^3 (1 - v_R'/c) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathfrak{w}' \cdot \mathfrak{R}}{R} \right).$$

Daraus folgt

$$A_k = \frac{1}{(1 - v_R'/c)^2} \sum_{l=1}^{4} \left\{ \frac{x_l - x_l'}{cR^2} \frac{d p_{lk}^*}{dt'} - \frac{p_{lk}^*}{cR^2} \frac{dx_l'}{dt'} + \frac{1 - v'^2/c^2 + w_R'}{1 - v_R'/c} \frac{p_{lk}^* (x_l - x_l')}{R^3} \right\}_{t' = t_0'}. \tag{26}$$

Wir können jetzt den Vierervektor $\mathfrak{A}$ in seinen räumlichen und zeitlichen Anteil spalten. Dabei bemerken wir, daß für $k = 1$

$$\sum_l p_{l1} (x_l - x_l') = p_{21} R_2 + p_{31} R_3 + p_{41} R_4$$
$$= m_2 R_3 - m_3 R_2 - i p_1 ic (t - t_0') = (\mathfrak{m} \times \mathfrak{R})_1 + p_1 R$$

ist. Ebenso wird

$$\frac{1}{c} \sum_l p_{l1}^* \frac{dx_l'}{dt'} = \sqrt{1 - v'^2/c^2} \left\{ \left(\mathfrak{m} \times \frac{\mathfrak{v}'}{c} \right)_1 + \mathfrak{p}_1 \right\}$$

und

$$\sum \frac{d p_{l1}^*}{dt'} (x_l - x_l') = \left[\frac{d}{dt'} (\mathfrak{m} \sqrt{1 - v'^2/c^2}) \times \mathfrak{R} \right]_1 + R \frac{d}{dt'} (p_1 \sqrt{1 - v'^2/c^2}).$$

Analoge Formeln gelten für $k = 2$ und $k = 3$. Für $k = 4$ dagegen bekommen wir

$$\sum_l p_{l4} (x_l - x_l') = i (p_1 R_1 + p_2 R_2 + p_3 R_3) = i \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R} \text{ usw.}$$

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und das skalare Potential $\varphi = \frac{A_4}{i}$ stellen sich also nach (26) folgendermaßen dar

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(1 - v_R'/c)^2} \left\{ \frac{(1 - v'^2/c^2 + w_R')}{\gamma (1 - v_R'/c)} \frac{\mathfrak{m}' \times \mathfrak{R}}{R^3} - \frac{\left(\mathfrak{m}' \times \frac{\mathfrak{v}'}{c} \right) + \mathfrak{p}'}{\gamma R^2} + \frac{1}{cR^2} \left(\frac{d}{dt'} \frac{\mathfrak{m}'}{\gamma} \right) \times \mathfrak{R} + \frac{1}{cR} \frac{d}{dt'} \frac{\mathfrak{p}'}{\gamma} \right\} \tag{26a}$$

$$\varphi = \frac{1}{(1 - v'_R/c^2)} \left\{ \frac{(1 - v'^2/c^2 + w'_R)}{\gamma (1 - v'_R/c)} \frac{\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{R}}{R^3} - \frac{\mathfrak{p}' \cdot \left(\frac{\mathfrak{v}'}{c}\right)}{\gamma R^2} + \frac{1}{c R^2} \mathfrak{R} \cdot \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathfrak{p}'}{\gamma}\right) \right\} \quad (26b)$$

mit der üblichen Bezeichnung

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

In diesen Formeln ist die Translationsgeschwindigkeit des Oszillators als gegebene Funktion der Zeit anzusehen. Was die elektromagnetischen Momente $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ anbetrifft, so dürfen sie als unmittelbar gegebene Funktionen der Zeit nur in dem entsprechenden *Ruhsystem* betrachtet werden. Diese bekannten „Ruhwerte" $\mathfrak{p}^0$ und $\mathfrak{m}^0$ sind mit den auf das gewählte feste Inertialsystem bezogenen Werten $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}^0 &= (1 - \gamma)(\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{v}'_0)\,\mathfrak{v}'_0 + \gamma \left(\mathfrak{m}' + \frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{p}'\right) \\ \mathfrak{p}^0 &= (1 - \gamma)(\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{v}'_0)\,\mathfrak{v}'_0 + \gamma \left(\mathfrak{p}' - \frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{m}'\right) \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

verknüpft [vgl. die Formeln (11), § 2; den dort gestrichenen Größen entsprechen $\mathfrak{p}^0$ und $\mathfrak{m}^0$; der Akzent bedeutet in unseren jetzigen Bezeichnungen, daß nicht die Zeit t, sondern die effektive Zeit $t_0' = t - R_0/c$ als Argument dienen soll]. Man kann selbstverständlich auch $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{m}'$ durch $\mathfrak{p}^0$ und $\mathfrak{m}^0$ mittels der reziproken Formeln ausdrücken.

Für das „rotierende" — oder vorsichtiger und physikalisch zutreffender ausgedrückt — für das *magnetische* Elektron ist das elektrische Moment im Ruhsystem gleich Null. Wir haben also in diesem Falle

$$\mathfrak{p}' = \frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{m}', \quad (27a)$$

so daß das zweite Glied in den Klammern (26a) und (26b) identisch verschwindet. Das magnetische Moment $\mathfrak{m}'$ drückt sich dabei durch das entsprechende Ruhmoment nach der Formel aus:

$$\mathfrak{m}' = (1 - \gamma)(\mathfrak{m}^0 \mathfrak{v}'_0)\mathfrak{v}'_0 + \gamma \mathfrak{m}^0.$$

Nimmt man an, daß der Vektor $\mathfrak{m}^0$ immer senkrecht zur Translationsrichtung, d. h. zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ steht (was nach (63a) Kap. VII dem Verschwinden des inneren Drehmoments entspricht), so erhält man einfach

$$\mathfrak{m}' = \gamma \mathfrak{m}^0. \quad (28)$$

Dabei nehmen die Formeln (26a) und (26b) die folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(1 - v'_R/c)^2} \left\{ \frac{1 - v'^2/c^2 + w'_R}{1 - v'_R/c} \frac{\mathfrak{m}^0 \times \mathfrak{R}_0}{R^2} + \frac{\dot{\mathfrak{m}}^0 \times \left(\mathfrak{R}_0 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right) + \frac{\dot{\mathfrak{v}}}{c} \times \mathfrak{m}^0}{cR} \right\} \quad (28a)$$

$$\varphi = \frac{1}{(1 - v'_R/c)^2} \left\{ \frac{1 - v'^2/c^2 + w'_R}{1 - v'_R/c} \frac{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}^0\right) \mathfrak{R}_0}{R^2} + \frac{\mathfrak{R}_0 \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \dot{\mathfrak{m}}^0 + \frac{\dot{\mathfrak{v}}}{c} \times \mathfrak{m}^0\right)}{cR} \right\}. \quad (28b)$$

Die Punkte über $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{v}$ bedeuten die entsprechenden Differentialquotienten nach der Zeit t' für den Augenblick $t' = t'_0$. — Zu diesen Potentialen muß man selbstverständlich noch diejenigen hinzufügen, welche von der Ladung des Elektrons herrühren.

Zur Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke müssen wir zu den ursprünglichen vierdimensionalen Ausdrücken zurückkehren, denn dabei braucht man die Gleichung $t'_0 = t - R/c$, welche die effektive Zeit bestimmt, nur im Endresultate, nicht aber in den Zwischenrechnungen zu berücksichtigen.

Wir wollen diesen Umstand noch am Beispiel der erwähnten von der Ladung des Elektrons herrührenden Potentiale

$$\varphi = \frac{e}{(1 - v'_R/c)\,R}, \qquad \mathfrak{A} = \varphi \frac{\mathfrak{v}'}{c}$$

erläutern. Die Bestimmung der Feldstärken auf die übliche Weise, d. h. mittels der Formeln $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$, $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ war in § 2 Kap. VI, angeführt.

Wir ersetzen nun diese Formeln durch die vierdimensionalen $H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$ und benützen für A_k die Integraldarstellung (23), Kap. VI:

$$A_k = \frac{e}{\pi i} \oint \frac{d x'_k}{S^2} = \frac{e}{\pi i} \oint \frac{d x'_k}{d t'} \frac{1}{S^2}\, d t' .$$

Dabei wird

$$H_{kl} = \frac{2e}{\pi i} \oint \left\{ \frac{d x'_k}{d t'} (x_l - x'_l) - \frac{d x'_l}{d t'} (x_k - x_k) \right\} \frac{d t'}{S^4} .$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf dieselbe Weise wie (25a) in die Gestalt

$$H_{kl} = \frac{e\,(1 - v'^2/c^2 + w'_R)}{(1 - v'_R/c)^3\, R^3 c}\, \Phi_{kl}(t'_0) + \frac{e}{(1 - v'_R/c)^2\, R^2 c^2} \left\{ \frac{d}{d t'}\, \Phi_{kl}(t') \right\}_{t' = t'_0}$$

bringen mit

$$\Phi_{kl}(t') \equiv \frac{d x'_k}{d t'} (x_l - x'_l) - \frac{d x'_l}{d t'} (x_k - x'_k),$$

woraus sich sofort die schon in § 2, Kap. VI abgeleiteten Formeln für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ergeben.

§ 5. Zurückführung der elektromagnetischen Grundgleichungen auf ein Variationsprinzip.

Wir haben in § 5, Kap. IV, den Satz bewiesen, daß die Differentialgleichung $V^2 \varphi = 0$ für das skalare Potential innerhalb eines begrenzten Raumgebietes die Bedingung des *Minimums* des Integrals

$$J = \int (\nabla \varphi)^2\, d V \tag{29}$$

bei vorgegebenen Randwerten der Funktion φ auf der begrenzenden

Fläche S darstellt. Man kann diesen Satz umkehren und die Differentialgleichung $\nabla^2\varphi = 0$ als eine *Folge* der Variationsgleichung

$$\delta J = 0 \tag{29a}$$

bei gegebenen Randwerten von φ betrachten. Dabei bedeutet die Größe δJ — die sog. *erste Variation* des Integrals J — diejenige Änderung dieses Integrals, welche *linear* in der unendlich kleinen Änderung oder *Variation* $\delta\varphi$ der betrachteten Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ ist. Die Gleichung (29a) ist also nur als erste Näherung für die entsprechende Änderung von J zu betrachten. Wir haben im § 5, Kap. IV, auch die in $\delta\varphi$ quadratischen Glieder berücksichtigt und gezeigt, daß die entsprechende *zweite Variation* von J ($\delta^2 J$) eine wesentlich positive Größe bleibt, wenn $\nabla^2\varphi$ verschwindet.

Die Formel (29a) ist im allgemeinen, d. h. für einen Differentialausdruck beliebiger Gestalt unter dem Integralzeichen in (29) nur als die notwendige nicht aber die hinreichende Bedingung des Minimums von J anzusehen; sie kann ebensogut einem Maximum entsprechen oder sogar weder einem Minimum noch einem Maximum, sondern einem *stationären* Wert des Integrals J, d. h. einem solchen Wert, der in erster Annäherung konstant bleibt bei einer infinitesimalen Änderung der Funktion φ.

Die Differentialgleichung $\nabla^2\varphi = 0$ gilt beim Fehlen der Elektrizität in dem betrachteten Volum V. Es ist aber leicht einzusehen, daß die allgemeinere Gleichung

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\varrho,$$

welche für eine *gegebene, zeitlich konstante* Verteilung der Elektrizität mit endlicher Volumdichte gilt, auch vollständig äquivalent einer Variationsgleichung von der Form $\delta J = 0$ ist, wobei aber das Integral J nicht durch (29) sondern durch die Formel

$$J = \int \left\{ \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi} - \varphi\varrho \right\} dV$$

oder

$$J = \int \left(\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} - \varphi\varrho \right) dV \tag{30}$$

gegeben ist. $\mathfrak{E} = -\nabla\varphi$ bedeutet die elektrische Feldstärke; die erwähnte Grenzbedingung ($\delta\varphi = 0$) muß dabei unverändert beibehalten werden.

In der Tat, die erste Variation von (30) lautet

$$\delta J = \int \left(\frac{\mathfrak{E} \cdot \delta\mathfrak{E}}{4\pi} - \delta\varphi \cdot \varrho \right) dV .$$

Nun haben wir ebenso wie in § 6, Kap. IV:

$$\mathfrak{E} \cdot \delta\mathfrak{E} = -\mathfrak{E} \cdot \nabla\delta\varphi = -\operatorname{div}(\delta\varphi\mathfrak{E}) + \delta\varphi \operatorname{div}\mathfrak{E} = -\operatorname{div}\delta\varphi\mathfrak{E} + 4\pi\varrho\delta\varphi,$$

und folglich

$$\delta J = -\int \operatorname{div}(\delta\varphi\,\mathfrak{E})\, dV = \oint \delta\varphi\, E_n dS = 0 .$$

Es sei erinnert, daß das über den *ganzen* Raum erstreckte Integral $\int \frac{E^2}{8\pi} dV$ gleich der vollständigen elektrischen Energie der betrachteten, das Feld $\mathfrak{E}$ erzeugenden Ladungen ist. Dieselbe Energie läßt sich bekanntlich auch in der Form

$$U = \frac{1}{2}\int \varphi \varrho \, dV$$

darstellen. In unserem Fall haben wir also

$$J = -U.$$

Dabei kann man die Grenzbedingung $\delta\varphi = 0$ auf S für eine *unendlich entfernte* Fläche durch die übliche Bedingung für das skalare Potential $\varphi = 0$ ersetzen.

Auf eine ganz analoge Weise kann man beweisen, daß die Differentialgleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathfrak{j},$$

welche das Vektorpotential einer gegebenen *stationären* Stromverteilung bestimmt, vollständig äquivalent ist mit der Variationsgleichung $\delta K = 0$, wo

$$K = \int \left(\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} - \mathfrak{A}\mathfrak{j} \right) dV$$

bedeutet und $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ die magnetische Feldstärke ist. Die Grenzbedingung lautet, ebenso wie im vorigen Falle, $\delta \mathfrak{A} = 0$ (auf S); bei einer unendlich entfernten Oberfläche kann man sie außer Acht lassen und K mit der negativen magnetischen Energie T gleichsetzen.

Zum Beweis bilden wir die erste Variation von K

$$\delta K = \int \left(\frac{\mathfrak{H} \cdot \delta \mathfrak{H}}{4\pi} - \delta \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{j} \right) dV$$

und bemerken, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} \cdot \delta \mathfrak{H} &= \mathfrak{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \mathfrak{A} = \operatorname{div} (\delta \mathfrak{A} \times \mathfrak{H}) + \delta \mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H} \\ &= \operatorname{div} (\delta \mathfrak{A} \times \mathfrak{H}) + 4\pi \mathfrak{j} \cdot \delta \mathfrak{A} \end{aligned}$$

ist. Folglich wird

$$\delta K = \int \operatorname{div} (\delta \mathfrak{A} \times \mathfrak{H}) \, dV = \oint (\delta \mathfrak{A} \times \mathfrak{H})_n \, dS = 0.$$

Diese nur für zeitlich konstante Felder geltenden Resultate lassen sich[1]) mittels der Relativitätstheorie sofort verallgemeinern auf beliebige Felder, die einer zeitlich variablen Verteilung der Ladungs- und Stromdichte entsprechen. Die allgemeinen Feldgleichungen lauten in vierdimensionaler Schreibweise:

$$\Box^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathfrak{j} \quad \text{und} \quad {}^2\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

[1]) Wie zuerst von *K. Schwarzschild* gezeigt wurde.

Die ihnen äquivalente Variationsgleichung sei

$$\delta S = 0,$$

wo S ein zunächst unbestimmtes Integral bedeutet. Zu seiner Bestimmung haben wir die folgenden Anhaltspunkte. *Erstens* in dem Spezialfall von zeitlich konstanten Feldern muß die Gleichung $\delta S = 0$ sich auf die Gleichungen $\delta J = 0$ und $\delta K = 0$ reduzieren. *Zweitens* muß S eine invariante skalare Größe darstellen.

Nun haben wir in §§ 1 und 2 gesehen, daß die Größen $\mathfrak{A}\mathfrak{j}$ und $\varphi\varrho$ einerseits, H^2 und E^2 andererseits sich tatsächlich in die invarianten Größen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{j} - \varphi\varrho = \mathfrak{A}\mathfrak{j}$$

und

$$H^2 - E^2 = \frac{1}{2}\,{}^2\mathfrak{H}^2$$

vereinigen lassen.

Daraus folgt, daß das gesuchte Integral S die Funktion

$$\mathfrak{A}\mathfrak{j} - \varphi\varrho - \frac{H^2 - E^2}{8\pi} = \mathfrak{A}\mathfrak{j} - \frac{|\operatorname{rot}\mathfrak{A}|^2}{16\pi} \tag{31}$$

als Integrand enthalten muß.

Was das Integrationsgebiet betrifft, so muß es wegen der Gleichberechtigung der räumlichen und zeitlichen Koordinaten vierdimensional sein. Um uns von irgendwelchen raumzeitlichen Grenzbedingungen zu befreien, können wir diese Integration über die ganze Raum- und Zeitmannigfaltigkeit, d. h. über die ganze vierdimensionale „Welt" erstrecken. Bezeichnet man das Volumelement „der Welt" mit $d\Omega$, so wird

$$S = \int \left(\mathfrak{A}\mathfrak{j} - \frac{(\operatorname{rot}\mathfrak{A})^2}{16\pi}\right) d\Omega \tag{32}$$

oder in koordinatenmäßiger Schreibweise

$$S = \iiiint \left[\sum_k A_k j_k - \frac{1}{16\pi}\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)^2\right] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 . \tag{32a}$$

Wir müssen noch die stillschweigend gemachte Annahme prüfen, daß der soeben angeführte Ausdruck für das Volum eines vierdimensionalen „Weltgebiets"

$$\int d\Omega = \iiiint dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \iint i\, c\, dV\, dt \tag{33}$$

tatsächlich invariant gegen die Lorentztransformation ist (sonst hätte die Variationsgleichung $\delta S = 0$ keinen Sinn). Geht man von dem betrachteten Koordinatensystem X zu einem anderen geradlinig gleichförmig bewegten System X' über, so transformiert sich das Integral (33) nach dem bekannten Satz von *Jacobi* über mehrfache Integrale in

$$\iiiint D\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'\, dx_4',$$

wo D die Funktionaldeterminante mit den Elementen $\frac{\partial x_k}{\partial x_l'} = \alpha_{kl}$ be

deutet. Diese Determinante ist aber wegen der Orthogonalität der Lorentztransformation gleich 1.

Die Größe S entspricht der *Lagrange*schen Funktion (oder genauer der *Wirkungsfunktion*) der gewöhnlichen Mechanik, d. h. der Differenz zwischen kinetischer (magnetischer) und potentieller (elektrischer) Energie. Wir werden sie noch später bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen eines Elektrons benützen.

Wir wollen jetzt die Variation δS berechnen und uns überzeugen, daß die Gleichung $\delta S = 0$ den ursprünglichen Feldgleichungen tatsächlich äquivalent ist. Dabei müssen wir selbstverständlich die Komponenten des Viererstromes $\mathbf{j}$ als gegebene, nicht zu variierende Funktionen der vier Koordinaten behandeln. Es wird also $\delta(A_k j_k) = j_k \delta A_k$, und ferner

$$\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \delta A_l}{\partial x_k}\right) = 2H_{lk}\left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \delta A_l}{\partial x_k}\right).$$

Den letzten Ausdruck kann man folgendermaßen umformen:

$$H_{lk}\left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \delta A_l}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_l}(H_{lk}\delta A_k) - \frac{\partial}{\partial x_k}(H_{lk}\delta A_l) - \delta A_k \frac{\partial H_{lk}}{\partial x_l} + \delta A_l \frac{\partial H_{lk}}{\partial x_k}.$$

Bei der Summation dieser Ausdrücke nach den beiden Indizes k und l können letztere offenbar untereinander vertauscht werden

$$\left[\text{es ist z. B. } \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_k}(H_{kl}\delta A_l) = \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}(H_{lk}\delta A_k)\right].$$

Mit Rücksicht auf $H_{kl} = -H_{lk}$ bekommt man somit

$$\delta\left[\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)^2\right] = 4\sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}(H_{lk}\delta A_k) + 4\sum_k \sum_l \delta A_k \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l}$$
$$= 4\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_k \delta A_k H_{kl}\right) + 4\sum_k \delta A_k \sum_l \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l}.$$

Die Summe $\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_k \delta A_k H_{kl}\right)$ kann als vierdimensionale Divergenz eines Vierervektors mit den Komponenten $\sum_k \delta A_k H_{kl}$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ behandelt werden. Bei der Integration über die ganze „Welt" muß sie verschwinden. Wir bekommen also

$$\delta S = \int\int\int\int \sum_k \delta A_k \left(j_k - \frac{1}{4\pi}\sum_l \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l}\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Damit dieses Integral für beliebige (unendlich kleine) Werte von δA_k verschwindet, müssen die Gleichungen

$$\sum_l \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} \equiv -\sum_l \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x_l} = 4\pi j_k$$

erfüllt sein. Dies sind aber gerade die Gleichungen (7) Kap. VIII. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$4\pi \sum \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = -\sum_l \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x_l} \equiv 0 .$$

d. h. das Erhaltungsgesetz der Elektrizität, ferner die Beziehung

$$\sum_{l=1}^{4} \frac{\partial A_l}{\partial x_l} = 0$$

und die üblichen Feldgleichungen: $\square^2 A_k = -4\pi j_k$.

Zehntes Kapitel.

Die relativistische Mechanik.

§ 1. Die elementare Theorie der Translationsbewegung.

Bei der Untersuchung der Bewegung eines materiellen Teilchens pflegt man in der klassischen Mechanik als unabhängige Variable die Zeit zu wählen, d. h. die räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 als Funktionen der Zeit t darzustellen. In Wirklichkeit ist die Zeit wegen ihres varianten Charakters ebenso ungeeignet zur Rolle einer unabhängigen Veränderlichen wie die Koordinaten selbst. Bei der „graphischen" Darstellung der Ereignisse, d. h. der Raum-Zeitpunkte durch Punkte im vierdimensionalen Raum wird die Zeit, multipliziert mit ic, einfach eine mit den drei anderen gleichberechtigte vierte Koordinate. Die *Kinematik*, d. h. die Lehre von der Bewegung im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum wird dadurch auf eine reine *Geometrie* des vierdimensionalen Raumes zurückgeführt. Dabei muß nur die schon im letzten Kapitel (§ 5) angedeutete Bedingung des *zeitartigen Charakters* aller vierdimensionalen Linien, welche die Bewegung eines Teilchens (Elektrons, Oszillators) darstellen, erfüllt sein. Solche zeitartigen vierdimensionalen Linien pflegt man als die *Weltlinien* der entsprechenden Teilchen zu bezeichnen. — Es erscheint deshalb zweckmäßig, die Lage des betrachteten Teilchens auf seiner Weltlinie nicht durch die Zeit, sondern durch die *Länge* s dieser Weltlinie, von einem bestimmten Punkte aus gerechnet, zu definieren. Das Längenelement der Weltlinie ds und das entsprechende kleinstmögliche Zeitintervall $d\tau$ sind, wie wir schon gesehen haben, durch die Formeln

$$ds = icd\tau = icdt\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{1}$$

bestimmt. Ist die Bewegung des Teilchens in irgendeinem Koordinatensystem als Funktion der zugehörigen Zeit bekannt, so kann man daraus die invariante „*Eigenzeit*" $\tau = \int d\tau$ dieses Teilchens, und folglich die Bogenlänge $s = ic\tau$, nach der Formel

$$\tau = \int \sqrt{1-v^2/c^2}\, dt \tag{1a}$$

berechnen.

Durch Division des Vierervektors $d\mathfrak{r}$, der die elementare raumzeitliche Verschiebung bestimmt, durch seinen Betrag $ds = |d\mathfrak{r}|$ ergibt sich ein Einheitsvektor mit den Komponenten $\frac{dx_k}{ds}$. Vom „weltgeometrischen" Standpunkt definiert dieser Vektor die *Tangentialrichtung* der Weltlinie des betreffenden Teilchens, vom kinematischen — die Richtung und den Betrag seiner Geschwindigkeit. Denn es gilt

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{(dx_1/dt)}{(ds/dt)} = \frac{v_1}{ic\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{dx_2}{ds} = \frac{v_2}{ic\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{dx_3}{ds} = \frac{v_3}{ic\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Es ist vielfach bequemer, als unabhängige Variable nicht die Bogenlänge, sondern die Eigenzeit zu benützen.

Die Größen

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{v_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{v_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{v_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

bilden die Komponenten eines Vierervektors $\mathfrak{v}$, den wir als die *Vierergeschwindigkeit* bezeichnen werden. Seine räumliche und zeitliche Projektion sind gleich $\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ bzw. $\frac{ic}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Für $v = 0$ verschwindet die erste, während die zweite den konstanten Wert ic annimmt: dies bedeutet, daß ein in dem gewählten Inertialsystem ruhendes Teilchen sich in der Zeit, d. h. in der Richtung der vierten Achse, mit der konstanten Geschwindigkeit ic verschiebt. Ist das Verhältnis $\frac{v}{c}$ klein gegen 1, so reduziert sich die räumliche Projektion von $\mathfrak{v}$ praktisch auf die gewöhnliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Eine geradlinig-gleichförmige Bewegung im dreidimensionalen Raum wird durch eine „Weltgerade" dargestellt; dabei bleibt der Vierervektor $\mathfrak{v}$ „konstant", d. h. von τ oder s unabhängig. Jeder Ablenkung der Bewegung von der Geradlinigkeit oder der Gleichförmigkeit entspricht eine *Krümmung* der Weltlinie. Diese Krümmung ist durch die Änderungsgeschwindigkeit des Vektors $\frac{dx_k}{ds}$ (Tangentenrichtung) in bezug auf s, d. h. durch die zweiten Ableitungen der Koordinaten nach s bestimmt. Diese zweiten Ableitungen $\frac{d^2x_k}{ds^2}$ bilden die Komponenten des vierdimensionalen *Krümmungsvektors*, welcher vom kinematischen Gesichtspunkte aus die *Beschleunigung* des Teilchens nach Betrag und Richtung bestimmt. Wir definieren diese Viererbeschleunigung $\mathfrak{w}$ als die Ableitung von $\mathfrak{v}$ nach τ (oder die zweite Ableitung von $\mathfrak{r}$ nach τ); seine Komponenten sind folglich gleich

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{v_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{d^2x_2}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{v_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{v_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{d^2x_4}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{ic}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Die räumliche Projektion dieses Vierervektors kann von der gewöhnlichen Beschleunigung $\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ auch dann verschieden sein, wenn das Verhältnis $\frac{v}{c}$ sehr klein ist, falls zugleich der Betrag von $\mathfrak{w}$ sehr groß ist. Durch Differentiation der Gleichung $\sum\left(\frac{dx_k}{ds}\right)^2 = 1$ nach s ergibt sich

$$\sum \frac{dx_k}{ds}\frac{d^2x_k}{ds^2} = 0\,, \tag{2}$$

Dies bedeutet geometrisch, daß die Vektoren $\frac{d\mathfrak{v}}{ds}$ und $\frac{d^2\mathfrak{v}}{ds^2}$ senkrecht zueinander stehen. Ersetzt man hier s durch τ, so bekommt man die Gleichungen: $\mathfrak{v}^2 = -c^2$ und

$$v_1\frac{d}{dt}\frac{v_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + v_2\frac{d}{dt}\frac{v_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + v_3\frac{d}{dt}\frac{v_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = c^2\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

oder mit den gewöhnlichen Vektorbezeichnungen

$$\mathfrak{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d}{dt}\frac{c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{2a}$$

Diese Gleichung drückt also die Tatsache aus, daß der Betrag der Vierergeschwindigkeit immer gleich ic bleibt.

Die obigen Resultate bilden die mathematische Grundlage für den Aufbau der *Mechanik* der materiellen Teilchen, d. h. für die Aufstellung der Gleichung, durch welche ihre Translationsbewegung unter der Wirkung von gegebenen äußeren Kräften bestimmt wird. Wir brauchen dabei von inneren Kräften, mit welchen die *Lorentz*sche Theorie operiert, gar nicht zu sprechen — auch dann nicht, wenn sie tatsächlich vorhanden sind — z. B. die Wechselwirkungskräfte zwischen verschiedenen Elektronen in einem bewegten Atom (falls letzteres als ein einziges Teilchen aufgefaßt wird).

Als Ausgangspunkt wollen wir die klassische *Newtonsche* Bewegungsgleichung

$$m_0\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f}$$

nehmen, die im Grenzfalle sehr kleiner Geschwindigkeiten sicher gültig ist. Dabei bedeutet m_0 die Masse der Teilchen (im gewöhnlichen Sinne) und $\mathfrak{f}$ die äußere Kraft.

Vom Standpunkt der Relativitätstheorie darf man das *Newton*sche Gesetz nur als die angenäherte und unvollständige Form eines Bewegungsgesetzes betrachten, das sich als eine Beziehung zwischen zwei vierdimensionalen Vektoren darstellt. Will man die *Newton*sche Gleichung nicht grundsätzlich verändern, sondern sie durch eine solche vierdimensionale Gleichung ersetzen, welche sich im Grenzfalle $\mathfrak{v} \to 0$ auf $m_0\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f}$ reduziert, so muß man offenbar folgendes machen:

Erstens die dreidimensionale Beschleunigung $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ durch die vierdimensionale $\frac{d\mathfrak{v}}{d\tau}$ ersetzen, und *zweitens* die Kraft $\mathfrak{f}$ durch den Vierervektor von Impuls und Arbeit $\mathfrak{F}$, wobei diese Größen nicht auf die gewöhnliche Zeiteinheit, sondern auf die Einheit der invarianten *Eigenzeit* bezogen werden müssen. Auf diese Weise bekommen wir die folgende relativistische Bewegungsgleichung

$$m_0 \frac{d\mathfrak{v}}{d\tau} = \mathfrak{F}. \tag{3}$$

Die räumliche Projektion des Vektors $\mathfrak{F}$ ist gleich dem Impuls der Kraft $\mathfrak{f}$ pro Einheit der Eigenzeit, d. h.

$$\mathfrak{f} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathfrak{f}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Die entsprechende Projektion des Vektors $\frac{d\mathfrak{v}}{d\tau}$ ist $\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Es wird also

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathfrak{f}. \tag{3a}$$

Die zeitliche Projektion der Gleichung (3) lautet

$$m_0 \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\frac{ic}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dt}{d\tau}\frac{i}{c} l,$$

wo l die Arbeit der Kraft $\mathfrak{f}$ pro gewöhnliche Zeiteinheit bedeutet, d. h.

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = l. \tag{3b}$$

Von der Richtigkeit der obigen Definition von l kann man sich leicht mittels der Gleichung (2a) überzeugen. Multipliziert man nämlich letztere mit m_0, so bekommt man mit Rücksicht auf (3a)

$$l = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v}.$$

Die Gleichung (3a), die sich, nach *Einstein*, durch Anwendung der Relativitätstheorie aus der *Newton*schen ergibt, stimmt vollkommen überein mit der Gleichung (42) Kap. VII, die wir für ein Elektron auf Grund des *Lorentz*schen Prinzips abgeleitet haben. Wir sehen also, daß die *Einstein*sche Gleichung viel allgemeiner ist und nicht nur für ein freies Elektron, sondern für jedes materielle Teilchen (Atom, Molekül, auch Himmelskörper) gelten muß, falls im Grenzfalle $\frac{v}{c} \ll 1$ das *Newton*sche Gesetz sich bewährt — ganz unabhängig von irgendeiner Hypothese über den Ursprung der Masse oder der Trägheitskraft.

Der dreidimensionale Vektor

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\mathfrak{v} \tag{4}$$

stellt die mechanische Bewegungsgröße des Teilchens dar (die wir früher als die elektromagnetische Bewegungsgröße des Elektrons definiert hatten), während

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4a}$$

seine Masse ist. Die Größe

$$W = mc^2 \tag{4b}$$

wird gewöhnlich betrachtet als die *vollständige* innere Energie des Teilchens. Dabei ist aber nicht ganz klar, was damit gemeint ist. Denn ein ruhendes Teilchen muß nach dieser Definition eine Energie $m_0 c^2$ haben. Nun setzt sich die Masse eines Teilchens (oder Körpers) hauptsächlich aus den Massen der es bildenden Elektronen zusammen. Die gegenseitige Masse, welche von ihren Wechselwirkungen herrührt und der Summe ihrer gegenseitigen (elektrischen und magnetischen) Energie entspricht, hat einen verhältnismäßig unbeträchtlichen Wert. Wir stoßen also wieder auf die Frage: Was soll die innere oder Eigenenergie eines ruhenden Elektrons bedeuten?

Auf die Diskussion dieser Frage wollen wir nicht eingehen.

Die Bewegungsgröße (4) und die mit $\frac{i}{c}$ multiplizierte Energie (4b) bilden offenbar die räumliche und zeitliche Projektion des Vierervektors

$$\mathfrak{G} = m_0 \mathfrak{v} \left(G_k = m_0 \frac{dx_k}{d\tau} \right), \tag{5}$$

welcher der gewöhnlichen Bewegungsgröße (oder dem „Impulse") entspricht und als der Impuls-Energievektor bezeichnet wird. Die Bewegungsgleichung (3) läßt sich mittels dieses Vierervektors in der Form

$$\frac{d}{d\tau} \mathfrak{G} = \mathfrak{F} \tag{5a}$$

schreiben.

Bei der Behandlung der Translationsbewegung eines Elektrons auf Grund des *Lorentz*schen Prinzips haben wir neben der „Trägheitskraft" $-\frac{d}{d\tau}(m\mathfrak{v})$ noch eine der zweiten Ableitung von $\mathfrak{v}$ nach t proportionale „Reibungskraft" (Strahlungsdämpfung) gefunden und auf den Umstand hingewiesen, daß in dem genauen Ausdruck der Selbstkraft — und folglich in der exakten Bewegungsgleichung — noch höhere Ableitungen von $\mathfrak{v}$ hinzutreten müssen. Die formale Natur der Relativitätstheorie gibt keinen Anhaltspunkt für die Beurteilung der Frage, ob die einfache Bewegungsgleichung (3) [oder (3a)] durch solche Glieder wirklich ergänzt werden muß oder nicht. Die Relativitätstheorie behauptet nur, daß alle diese Glieder *Vierervektoren* (oder deren räumliche Projektionen) sein müssen. Nehmen wir z. B. im Anschluß an die Gleichung (24b) Kap. VII an, daß bei sehr kleinen Geschwindigkeiten des Elektrons seine Bewegungsgleichung die Gestalt

$$m_0 \frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2} = \mathfrak{f} \tag{6}$$

hat, so kann man nach der Relativitätstheorie sofort schließen, daß die exakte, d. h. auch bei großen Geschwindigkeiten gültige Bewegungsgleichung die folgende Form haben muß:

$$m_0 \frac{d\mathfrak{v}}{d\tau} - \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^2\mathfrak{v}}{d\tau^2} = \mathfrak{F}, \tag{6a}$$

oder wenn man die räumliche Projektion davon nimmt und mit $\sqrt{1-v^2/c^2}$ multipliziert:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \mathfrak{f}. \tag{6b}$$

Diese Gleichung kann aber ganz falsch sein; und es gibt tatsächlich viele Gründe dafür, daß in dem Falle eines einzelnen Elektrons die einfache Bewegungsgleichung (3a) *genau* gültig ist.

§ 2. Variationstheorie der Translationsbewegung eines Elektrons in einem gegebenen elektromagnetischen Feld.

Wir setzen das äußere Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, in welchem das betrachtete Elektron sich bewegt, als bekannt voraus (wobei $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nicht zeitlich konstant zu sein brauchen). Die äußere Kraft

$$\mathfrak{f} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}\right) \tag{7}$$

kann dabei nicht als bekannt behandelt werden, denn sie enthält die Geschwindigkeit des Elektrons *explizite*. Multipliziert man (7) mit $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, so ergibt sich die räumliche Projektion des Vierervektors $\mathfrak{F}$. Seine erste Komponente (in irgendeinem Koordinatensystem) lautet:

$$F_1 = \frac{e}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}(v_2 H_3 - v_3 H_2 + cE) = \frac{e}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}(v_2 H_{12} + v_3 H_{13} + ic H_{14}),$$

d. h.

$$F_1 = \frac{e}{c}\left(H_{12}\frac{dx_2}{d\tau} + H_{13}\frac{dx_3}{d\tau} + H_{14}\frac{dx_4}{d\tau}\right).$$

Analoge Ausdrücke gelten selbstverständlich für die anderen Komponenten. Es wird folglich

$$F_k = \frac{e}{c}\sum_l H_{kl}\frac{dx_l}{d\tau} \tag{7a}$$

oder in koordinatenfreier Schreibweise

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{c}\,{}^2\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau}.$$

Wir bemerken noch den folgenden Ausdruck

$$F_k = \frac{e}{m_0 c}\sum_l H_{kl} G_l, \tag{7b}$$

der sich aus (7a) ergibt, wenn man $\frac{dx_l}{d\tau}$ nach (5) durch $\frac{1}{m_0}G_l$ ersetzt.

Die Formel (7a) entspricht vollkommen der Formel (10a), Kap. VIII für die Komponenten des Impuls-Arbeits-Vierervektors, bezogen auf

die Raum- und Zeiteinheit. Es ist leicht, aus der letzten Formel die erste abzuleiten, wenn man sich das Elektron nicht bloß als einen Punkt, sondern als einen unendlich kleinen Körper vorstellt. Das Volum des Elektrons sei V und die Ladungsdichte ϱ. Die Stromdichte kann man dabei gleich $\varrho \frac{\mathfrak{v}}{c}$ setzen. Die im Volumelement dV des Elektrons während des Zeitintervalles dt geleistete Arbeit und Impuls (erstere multipliziert mit $\frac{i}{c}$) drücken sich durch den Vierervektor mit den Komponenten:

$$\sum_l H_{kl} j_l dV dt = \sum_l H_{kl} \varrho dV \frac{v_l}{c} dt$$

aus (wobei $v_4 = ic$ ist)[1]). Die Integration dieses Ausdruckes über das Volum des Elektrons bietet sehr große prinzipielle Schwierigkeiten wegen des Auftretens der Zeit, die für verschiedene Elemente des Elektrons nicht denselben Wert zu haben braucht. In dem betrachteten Grenzfalle des unendlich kleinen Elektrons fallen diese Schwierigkeiten weg, und für den vollständigen Impuls (bzw. Arbeit) während der Zeit dt bekommen wir einfach

$$\frac{e}{c} \sum_l H_{kl} v_l dt .$$

Durch Division mit $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ergibt sich schließlich

$$\frac{e}{c} \sum_l H_{kl} \frac{v_l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{e}{c} \sum_l H_{kl} \frac{dx_l}{d\tau}$$

d. h. der Ausdruck (7a).

Wir können also die Bewegungsgleichung (3) ausführlich in der Gestalt

$$\frac{d^2 x_k}{d\tau^2} = \varkappa \sum_l H_{kl} \frac{dx_l}{d\tau} \tag{8}$$

oder

$$\frac{dG_k}{d\tau} = \varkappa \sum_l H_{kl} G_l \tag{8a}$$

schreiben, mit der Abkürzung

$$\varkappa = \frac{e}{m_0 c} . \tag{8b}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen[2]), daß die Gleichung (8) eine notwendige Folge der *Schwarzschild*schen Variationsgleichung

$$\delta S \equiv \delta \int \left[\sum_k A_k j_k - \frac{1}{16\pi} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)^2 \right] d\Omega = 0$$

ist, wenn man in der letzteren das Vierervotential (A_k) als eine ge-

[1]) Es sei bemerkt, daß die Produkte $dV dt$ und ϱdV invariante Größen sind; ersteres bedeutet ein Element der Weltausdehnung, letzteres das Element der Elektronenladung de.

[2]) Nach *M. Born*.

gebene, das äußere Feld bestimmende Funktion der Koordinaten (und der Zeit) betrachtet, und die *Stromdichte* (j_k) als die *gesuchte* Funktion, welche der Bewegung des Elektrons entspricht. Dabei ist $\delta A_k = 0$ im ganzen Raum (und für alle Zeiten), so daß die obige Variationsgleichung sich reduziert auf

$$\delta S^* = 0 \tag{9}$$

mit

$$S^* = \int \sum_k A_k j_k d\Omega$$

oder unter Weglassung des belanglosen Faktors ic,

$$S^* = \int\int \sum_k A_k j_k dV dt. \tag{9a}$$

Das Elektron betrachten wir als (räumlich) unendlich klein; deshalb kann man bei der Ausführung der Volumintegration den Faktor $A_k dt$ als konstant behandeln. Das Integral $\int j_k dV$ haben wir schon oben berechnet; es ist gleich $\frac{e}{c} v_k = \frac{e}{c} \frac{dx_k}{dt}$.

Wir bekommen also

$$S^* = \frac{e}{c} \int \sum_k A_k dx_k = \frac{e}{c} \int \sum_k A_k \frac{dx_k}{d\tau} d\tau, \tag{10}$$

wobei die Eigenzeit des Elektrons als unabhängige Veränderliche dienen soll. Die Integration kann man sich erstreckt denken über ein beliebiges Stück der Weltlinie des Elektrons; dabei muß diese Linie derart gewählt werden, daß bei unendlich kleiner Änderung ihrer Gestalt (des Bewegungstypus) das Integral (10) in erster Annäherung konstant bleibt. Mit anderen Worten, die Koordinaten x_k des Elektrons ($k = 1, 2, 3, 4$) müssen als Funktionen des Parameters τ derart bestimmt sein, daß bei einer unendlich kleinen Variation dieser Funktionen die erste Variation von (10) verschwindet. Es ist aber zu beachten, *erstens*, daß die x_k nicht ganz voneinander unabhängig sind, sondern die Relation

$$\sum_k \left(\frac{dx_k}{d\tau}\right)^2 = -c^2 \tag{10a}$$

identisch (für alle τ) erfüllen müssen, und *zweitens*, daß an den Integrationsgrenzen $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ gewisse Bedingungen für die Variationen δx_k aufgestellt werden müssen, — sonst verliert das ganze Problem einen bestimmten Sinn. Wir wollen diese Grenzbedingungen zunächst unbestimmt lassen und uns mit der Lösung des durch (9), (10) und (10a) definierten Variationsproblems beschäftigen.

Die Komponenten des Vierervektorpotentials sind, wie schon erwähnt, als bekannte Funktionen der vier Koordinaten x_k anzusehen. Nun beziehen sich ihre Werte in (10) auf diejenigen Raumzeitpunkte, welche auf der Weltlinie des Elektrons liegen. Bei Variation dieser Linie müssen sie folglich eine Änderung $\delta A_k = \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \delta x_l$ erleiden, ebenso wie bei

der Verschiebung des Elektrons längs einer bestimmten Weltlinie; im letzten Falle haben wir $\frac{dA_k}{d\tau} = \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\tau}$.

Die Variation von (10) lautet

$$\delta S^* = \frac{e}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_k \left(\delta A_k \cdot \frac{dx_k}{d\tau} + A_k \delta \frac{dx_k}{d\tau}\right) d\tau$$

oder wegen der Vertauschbarkeit der Operationen δ und d

$$\delta S^* = \frac{e}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum \left(\delta A_k \cdot \frac{dx_k}{d\tau} + A_k \frac{d\delta x_k}{d\tau}\right) d\tau .$$

Nun ist

$$\sum_k \delta A_k \cdot \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_k \sum_l \delta x_l \cdot \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\frac{dx_k}{d\tau}$$

und

$$\sum_k A_k \frac{d\delta x_k}{d\tau} = \sum_k \frac{d}{d\tau}(A_k \delta x_k) - \sum_k \delta x_k \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\tau} .$$

Durch Vertauschung der Indizes k und l in der Doppelsumme bekommen wir

$$\sum_k A_k \frac{d\delta x_k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_k A_k \delta x_k\right) - \sum_l \sum_k \delta x_l \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\frac{dx_k}{d\tau} .$$

Es wird folglich

$$\delta S^* = \left[\sum_k \frac{e}{c} A_k \delta x_k\right]_{\tau_1}^{\tau_2} + \frac{e}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_l \sum_k \delta x_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)\frac{dx_k}{d\tau} d\tau ,$$

oder wenn man ohne Rücksicht auf die früheren Formeln, sondern bloß der Kürze halber die Bezeichnungen

$$\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right) = H_{lk} , \qquad \frac{e}{c}\sum_k H_{lk}\frac{dx_k}{d\tau} = F_l \tag{11}$$

einführt:

$$\delta S^* = \int \sum_l F_l \delta x_l \, d\tau + \frac{e}{c}\left[\sum_k A_k \delta x_k\right]_{\tau_1}^{\tau_2} \tag{11a}$$

Wären die Variationen der vier Koordinaten δx_k voneinander unabhängig, so würde die Bedingung für das Verschwinden von δS^* einfach lauten

$$F_l = 0 \quad \text{und} \quad \delta x_k^{(1)} = \delta x_k^{(2)} = 0 .$$

In Wirklichkeit aber sind die x_k miteinander durch die Relation (10a) verknüpft. Dieser Umstand läßt sich nach der bekannten *Lagrange*schen Multiplikatormethode folgendermaßen berücksichtigen. Wir bilden zunächst die Variation von (10a). Dabei bekommen wir die Gleichung:

$$\sum_l \frac{dx_l}{d\tau}\delta\frac{dx_l}{d\tau} = \sum_l \frac{dx_l}{d\tau}\frac{d\delta x_l}{d\tau} = 0 .$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit einem zunächst ganz unbestimmten Faktor μ, der eine beliebige Funktion von τ sein kann, und ergänzen den Integranden in dem ursprünglichen Ausdruck für δS^* durch

$$\sum_l \mu \frac{dx_l}{d\tau} \frac{d\delta x_l}{d\tau} = \sum_l \frac{d}{d\tau}\left(\mu \frac{dx_l}{d\tau}\delta x_l\right) - \sum_l \delta x_l \frac{d}{d\tau}\left(\mu \frac{dx_l}{d\tau}\right).$$

Dann bekommen wir statt (11a)

$$\delta S^* = \int \sum_l \delta x_l \left[F_l - \frac{d}{d\tau}\left(\mu \frac{dx_l}{d\tau}\right)\right] d\tau + \left[\sum_l \left(\frac{e}{c} A_l + \mu \frac{dx_l}{d\tau}\delta x_l\right)\right]_{\tau_1}^{\tau_2} \qquad (11b)$$

Die Grenzbedingungen für die x_l, $\frac{dx_l}{d\tau}$ und δx_l kann man immer — und zwar auf verschiedene Weise — so wählen, daß das zweite Glied in (4b) verschwindet. Setzt man also

$$\left[\sum_l \left(\frac{e}{c} A_l + \mu \frac{dx_l}{d\tau}\right)\delta x_l\right]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0, \qquad (12)$$

so reduziert sich die notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden von dS^* auf die vier Differentialgleichungen

$$F_l - \frac{d}{d\tau}\left(\mu \frac{dx_l}{d\tau}\right) = 0. \qquad (12a)$$

Und zwar kann man die Willkürlichkeit der Funktion $\mu(\tau)$ dazu benützen, um trotz der Beziehung (10a) zwischen den vier Variationen δx_l sie alle als unabhängige willkürliche Größen zu behandeln (das ist gerade das Wesen der *Lagrange*schen Methode). Die Funktion μ muß aber schließlich derart bestimmt werden, daß die aus den Differentialgleichungen (12a) folgenden Ausdrücke für die Ableitungen $\frac{dx_l}{d\tau}$ tatsächlich die Bedingung befriedigen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (12a) mit $\frac{dx_l}{d\tau}$ und summieren über l. Dabei wird

$$\sum_l F_l \frac{dx_l}{d\tau} - \mu \sum_l \frac{dx_l}{d\tau}\frac{d^2x_l}{d\tau^2} - \frac{d\mu}{d\tau}\sum_l \left(\frac{dx_\tau}{d\tau}\right)^2 = 0. \qquad (12b)$$

Die erste Summe muß nach der Definition der Größen F_l *identisch* verschwinden. In der Tat, nach (11) gilt $H_{lk} = -H_{kl}$ und

$$\sum_l F_l \frac{dx_l}{d\tau} = \frac{e}{c}\sum_l \sum_k H_{kl}\frac{dx_k}{d\tau}\frac{dx_l}{d\tau} = \frac{e}{c}\sum_{l<k}\sum (H_{kl} + H_{lk})\frac{dx_k}{d\tau}\frac{dx_l}{d\tau} \equiv 0.$$

Die dritte Summe in (12b) ist nach (10a) gleich der konstanten Größe $-c^2$ und infolgedessen die zweite gleich null [vgl. (2)]. Daraus folgt

$$\frac{d\mu}{d\tau} c^2 = 0, \text{ d. h. } \mu = \text{konst.}$$

Die Differentialgleichungen (12a) sind also für $\mu = m_0$ vollständig identisch mit den oben abgeleiteten Bewegungsgleichungen (8). Wir haben dabei zu gleicher Zeit aus dem *Schwarzschild*schen Variations-

prinzip den allgemeinen Ausdruck für die elektromagnetische Viererkraft bekommen. Denn die durch (11) definierten Größen F_l spielen in (12a) die Rolle der Komponenten der Viererkraft, die wir früher auf eine ganz andere Weise aufgestellt haben.

Wir sehen also, daß die beiden Gruppen der elektrodynamischen Grundgesetze, die einerseits das elektromagnetische Feld von bewegten Elektronen bestimmen, andererseits die Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen elektromagnetischen Feld — *in eine einzige Gleichung* zusammengefaßt werden können, nämlich die Variationsgleichung

$$\delta S = 0.$$

Man kann sagen, daß die ganze Elektrodynamik in dieser Gleichung enthalten ist.

Dabei ist noch folgendes zu bemerken. Bei der Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes haben wir die Stromverteilung als kontinuierlich behandelt und für das Erhaltungsgesetz der Elektrizität die Differentialgleichung $\sum_k \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0$ gefunden. Dagegen haben wir bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen das Elektron als Punktladung aufgefaßt und statt der obigen Gleichung die Gleichung $\sum_k \left(\frac{dx_k}{d\tau}\right)^2 = -c^2$ benützt. Es ist leicht einzusehen, daß diese beiden Gleichungen vollkommen äquivalent sind (falls die Ladung des Elektrons als konstant betrachtet wird). Auf den Beweis, der nur ein mathematisches Interesse bietet, wollen wir hier nicht eingehen. Ferner haben wir im ersten Falle das *vollständige* Feld der betreffenden Ladungen berücksichtigt, dagegen im zweiten Falle nur das *äußere* Feld. In diesem Sinne sind die beiden Formen des *Schwarzschild*schen Variationsprinzips physikalisch nicht vollkommen äquivalent. Beim Übergang von dem ursprünglichen Integral S zu dem Integral (9a) haben wir stillschweigend das von dem betrachteten Elektron selbst erzeugte Feld weggelassen — sonst könnten wir die Komponenten des Viererpotentials A_k nicht als bekannte Größen voraussetzen.

§ 3. Dreidimensionale Form des Variationsprinzips.

Die Variationsgleichung $\delta S^* = 0$ mit der Nebenbedingung

$$\sum_k \left(\frac{dx_k}{d\tau}\right)^2 = -c^2$$

kann man *formal* ersetzen durch die von dieser Nebenbedingung freie Variationsgleichung

$$\delta \int \sum_k \left\{\frac{m_0}{2}\left(\frac{dx_k}{d\tau}\right)^2 + \frac{e}{c} A_k \frac{dx_k}{d\tau}\right\} d\tau = 0. \tag{13}$$

In der Tat, nach Ausführung der Variation und Umformung der entsprechenden Ausdrücke reduziert sich die linke Seite von (13) wieder

auf (11b), wobei nur μ durch m_0 zu ersetzen ist. — Um sich aber von der erwähnten Nebenbedingung tatsächlich zu befreien, muß man die vierdimensionale Welt in Raum und Zeit spalten, und statt der Eigenzeit als unabhängige Veränderliche wieder die gewöhnliche Zeit t einführen und dementsprechend *nicht* $\delta\tau = 0$, sondern $\delta t = 0$ setzen. Die Ableitungen der räumlichen Koordinaten nach der Zeit, ebenso wie die Variationen δx_1, δx_2, δx_3 sind offenbar als voneinander ganz unabhängige Größen zu behandeln, so daß man dabei keine Nebenbedingungen in Betracht zu ziehen braucht.

Der Übergang von τ zu t, sofern er das Integral (10) betrifft, geschieht ganz einfach: wir setzen nämlich

$$S^* = \frac{e}{c}\int \sum_k A_k dx_k = \int \sum_k \frac{e}{c} A_k \frac{dx_k}{dt} dt,$$

d. h. in gewöhnlicher dreidimensionaler Schreibweise

$$S^* = \int \left(\frac{e\mathfrak{v}}{c}\cdot\mathfrak{A} - e\varphi\right) dt. \tag{13a}$$

Das Nullsetzen der Variation dieser Funktion führt, wie leicht einzusehen, nicht zur Bewegungsgleichung des Elektrons, sondern zu der Gleichung $\mathfrak{f} = 0$ für die auf dieses wirkende äußere Kraft $\mathfrak{f} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}\right)$. Die erwähnte Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{H}\right). \tag{13b}$$

Wir wollen sofort zeigen, daß diese Gleichung sich ergibt, wenn man nicht von dem Integral (10), sondern von dem Integral

$$V = \int \left(-m_0c^2 + \frac{e}{c}\sum_k A_k \frac{dx_k}{d\tau}\right) d\tau \tag{14}$$

ausgeht[1]). Solange man τ als unabhängige Variable behandelt, d. h. $\delta d\tau = 0$ setzt, ist die Variationsgleichung $\delta V = 0$ vollkommen äquivalent mit $\delta S^* = 0$. Führt man aber statt τ die gewöhnliche Zeit als Argument ein, so wird $\delta t = 0$ und $\delta dt = 0$, dagegen $\delta d\tau = \delta\, dt\, \sqrt{1 - v^2/c^2} \neq 0$ und die Gleichung $\delta V = 0$ von der Gleichung $\delta S^* = 0$ wesentlich verschieden. Das Integral (14) nimmt dabei die Gestalt an

$$V = \int \left(-m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\mathfrak{v}\,\mathfrak{A} - e\varphi\right) dt \tag{14a}$$

und unterscheidet sich von (13a) durch das Glied $-m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$, welches gerade die linke Seite der Bewegungsgleichung (13b) liefert.

---

[1]) Das Zusatzglied $-m_0c^2$ ist zweimal größer als das entprechende Zusatzglied $\frac{m_0}{2}\sum_k \left(\frac{dx_k}{d\tau}\right)^2$ in (13).

Die Grenzbedingungen kann man hier auf die einfachste Weise wählen (wegen der Unabhängigkeit der Variationen δx_1, δx_2, δx_3). Wir wollen annehmen, daß der Anfangs- und Endpunkt der Bahn des Elektrons räumlich und zeitlich festgehalten sind; die Variation seines Radiusvektors $\delta \mathfrak{r}$ muß also für die Grenzen des Integrals (14a) ($t = t_1$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ und $t = t_2$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2$) verschwinden. Zur Berechnung der Variation von (14a) bemerken wir die folgenden Formeln:

$$\delta \varphi = \delta \mathfrak{r} \cdot \nabla \varphi, \quad \delta \mathfrak{A} = (\delta \mathfrak{r} \nabla) \mathfrak{A}, \quad \frac{d}{dt} \mathfrak{A} = \left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \nabla\right) \mathfrak{A} = (\mathfrak{v} \nabla) \mathfrak{A};$$

ferner

$$\delta (\mathfrak{v} \mathfrak{A}) = \delta \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{v} \cdot (\delta \mathfrak{r} \nabla) \mathfrak{A} = \left(\frac{d}{dt} \delta \mathfrak{r}\right) \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{v} \cdot (\delta \mathfrak{r} \nabla) \mathfrak{A} =$$

$$= \frac{d}{dt} (\delta \mathfrak{r} \mathfrak{A}) - \delta \mathfrak{r} \cdot \frac{d}{dt} \mathfrak{A} + \delta \mathfrak{r} \cdot \nabla (\mathfrak{A} \mathfrak{v})$$

und schließlich

$$- m_0 \delta \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0 \mathfrak{v} \delta \mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \mathfrak{v} \cdot \frac{d \delta \mathfrak{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\delta \mathfrak{r} \cdot m \mathfrak{v}) - \delta \mathfrak{r} \cdot \frac{d}{dt} (m \mathfrak{v}).$$

Es wird also

$$\delta V = \left[\delta \mathfrak{r} \cdot \left(m \mathfrak{v} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}\right)\right]_1^2 + \int \delta \mathfrak{r} \cdot \left\{ - \frac{d}{dt} \left(m \mathfrak{v} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}\right) + \nabla \left(\frac{e}{c} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{A} - e \varphi\right)\right\} = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit von $\delta \mathfrak{r}$ innerhalb der Integrationsgrenzen und seines Verschwindens an diesen Grenzen bekommen wir als notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden von δV die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(m \mathfrak{v} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}\right) = \operatorname{grad} \left(e \frac{\mathfrak{v}}{c} \cdot \mathfrak{A} - e \varphi\right). \tag{15}$$

Berücksichtigt man noch die Beziehungen $- \operatorname{grad} \varphi = \mathfrak{E}$ und $\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{H}$, so läßt sich diese Gleichung, nach der bekannten Formel

$$\operatorname{grad} (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{A}) = (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{A} + \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{A}$$

auf die Gestalt (13b) bringen.

Der Vektor

$$\mathfrak{G}^* = m \mathfrak{v} + \frac{e}{c} \mathfrak{A} \tag{15a}$$

spielt in der Gleichung (15) die Rolle der vollständigen Bewegungsgröße. Man kann ihn definieren als die Summe der gewöhnlichen mechanischen Bewegungsgröße und der „gegenseitigen" Bewegungsgröße bezüglich der Elektronen, welche das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ erzeugen. Dementsprechend läßt sich die rechte Seite als Gradient einer gegenseitigen potentiellen Energie deuten, die gleich $e \varphi - e \frac{\mathfrak{v}}{c} \mathfrak{A}$ ist. Durch Multiplikation der Gleichung (15) mit $\frac{dt}{d\tau}$ ergibt sich

$$\frac{d}{d\tau} \mathfrak{G}^* = \operatorname{grad} \sum \frac{e}{c} A_k \frac{dx_k}{d\tau} = \operatorname{grad} \varkappa \mathfrak{A} \mathfrak{G}.$$

Dies ist die räumliche Projektion einer vierdimensionalen Vektorgleichung

$$\frac{d}{d\tau}\mathfrak{G}^* = \varkappa \Box \mathfrak{A}\mathfrak{G},$$

wobei die zeitliche Projektion des Vierervektors $\mathfrak{G}^*$ gleich

$$G_4^* = ic\left(m + \frac{e\varphi}{c}\right) = icm^*. \tag{15b}$$

ist. Die Größe $m^* = m + \frac{e\varphi}{c^2}$ spielt die Rolle der vollständigen Masse, d. h. der Summe von $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (eigene Masse des Elektrons) und einer „gegenseitigen" Masse $\frac{e\varphi}{c^2}$.

Die vorhergehende Gleichung nimmt, wenn man statt $\mathfrak{G}$ die Differenz $\mathfrak{G}^* - \frac{e}{\tau}\mathfrak{A}$ einsetzt, die folgende Gestalt an:

$$\frac{d}{d\tau}\mathfrak{G}^* = \varkappa \Box \left(\mathfrak{G}^* \mathfrak{A} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}^2\right). \tag{16}$$

Diese vierdimensionale Form der Bewegungsgleichungen kann man leicht aus der ursprünglichen (8) ableiten, wenn man dort

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$$

setzt. Es wird nämlich

$$\frac{d^2 x_k}{d\tau^2} = \varkappa \sum_l \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\frac{dx_l}{d\tau} = \varkappa \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_l A_l \frac{dx_l}{d\tau}\right) - \varkappa \frac{dA_k}{d\tau},$$

d. h.

$$\frac{d}{d\tau}\left(m_0 \frac{dx_k}{d\tau} + \frac{e}{c} A_k\right) = \varkappa \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_l A_l m_0 \frac{dx_l}{d\tau}\right) \tag{16a}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung (16).

§ 4. Die Wirkungsfunktion und die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

Die Variationsgleichung $\delta V = 0$ stellt die verfeinerte Form des *Hamilton*schen Prinzips der klassischen Mechanik für den Fall eines einzigen Elektrons dar; das Integral V ist die sogenannte *Wirkungsfunktion*, der Integrand

$$L^* = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\mathfrak{v}\mathfrak{A} - e\varphi \tag{17}$$

die *Lagrange*sche Funktion. Letztere definiert man gewöhnlich als Differenz zwischen der kinetischen und potentiellen Energie. Für den Grenzfall sehr kleiner Geschwindigkeiten bekommen wir

$$-m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \cong -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

und folglich

$$L^* + m_0 c^2 \equiv L \cong \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{e}{c}\mathfrak{v}\mathfrak{A} - e\varphi \tag{17a}$$

Für $\mathfrak{A} = 0$, d. h. bei Fehlen eines äußeren magnetischen Feldes entspricht L vollkommen der üblichen Definition der *Lagrange*schen Funktion. Ist aber ein magnetisches Feld vorhanden, so muß man die Größe $\frac{e}{c}\mathfrak{v}\mathfrak{A}$ entweder zu der kinetischen Energie addieren oder von der potentiellen Energie substrahieren. Mit anderen Worten, wenn man die (gegenseitige) magnetische Energie als potentielle behandelt (wie wir es z. B. im ersten Abschnitt getan haben), so ist sie gleich $-\frac{e}{c}\,\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{A}$; behandelt man sie dagegen als kinetische, so muß man sie gleich $+\frac{e}{c}\,\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{A}$ setzen.

Die Ableitungen der *Lagrange*schen Funktion nach den Komponenten der Geschwindigkeit

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} \quad \left(\mathfrak{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}}\right) \tag{18}$$

heißen bekanntlich die *Momente*. Die durch die Koordinaten und Momente ausgedrückte Funktion

$$H = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial L}{\partial v_k} v_k - L = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{v} - L \tag{18a}$$

wird die *Hamilton*sche Funktion genannt. Für die *Lagrange*sche Funktion (17a) ist sie gleich

$$H = \frac{1}{2} m_0 v^2 + e\varphi\,, \tag{19}$$

d. h. der Summe der kinetischen und elektrischen Energie, wobei die gegenseitige magnetische Energie keinen Beitrag zu H liefert; dies entspricht der Tatsache, daß die magnetischen Kräfte keine Arbeit leisten. Die Funktion, welche auf der rechten Seite von (19) steht, ist noch keine *Hamilton*sche Funktion, denn letztere muß, wie soeben erwähnt, nicht durch die Geschwindigkeit, sondern durch die „Momente" ausgedrückt werden. In dem betrachteten Falle sind diese Momente gleich

$$p_k = m_0 v_k + \frac{e}{c} A_k\,. \tag{19a}$$

Sie fallen also in erster Näherung zusammen mit den Komponenten des durch (15a) definierten Vektors $\mathfrak{G}^*$.

Der Ausdruck der *Hamilton*schen Funktion (19) bei Anwesenheit magnetischer Kräfte ist also gleich

$$H = \frac{1}{2m_0}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + e\varphi\,. \tag{19b}$$

Dieser Ausdruck ist aber nur für kleine Geschwindigkeiten des Elektrons $\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \ll 1\right)$ gültig. Im allgemeinen Falle sind die nach den Formeln (17) und (18) definierten Momente genau gleich den Komponenten des Vektors $\mathfrak{G}^*$, was wir vektoriell folgendermaßen schreiben können

$$\mathfrak{G}^* = \frac{\partial L^*}{\partial \mathfrak{v}} \tag{20}$$

Die *Hamilton*sche Funktion ist

$$H^* = \mathfrak{G}^* \mathfrak{v} - L^*; \tag{20a}$$

ihrem Betrage nach ist sie gleich

$$H^* = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi = mc^2 + e\varphi = -icG_4^*. \tag{20b}$$

Sie unterscheidet sich somit nur durch den Faktor $\frac{i}{c}$ von der vierten Komponente des Vierervektors $\mathfrak{G}^*$. Gewöhnlich subtrahiert man davon die „Ruhenergie" des Elektrons $m_0 c^2$ und definiert als Betrag der *Hamilton*schen Funktion die Größe

$$H^* - m_0 c^2 \equiv H = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) + e\varphi, \tag{20c}$$

d. h., ebenso wie in der klassischen Mechanik die Summe der kinetischen Energie $m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$ (im Grenzfalle $\frac{v}{c} \ll 1$ fällt sie mit $\frac{1}{2} m_0 v^2$ zusammen), und der elektrischen Energie $e\varphi$. — Um H^* als Funktion der Momente $p_k = G_k^*$ auszudrücken, müssen wir die Relation (15a), oder ausführlich geschrieben

$$\mathfrak{G}^* = \frac{m_0 \mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathfrak{A}. \tag{21}$$

benützen.

Aus dieser Relation folgt

$$\frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = \left(\mathfrak{G}^* - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 = \frac{c^2 m_0^2}{1 - v^2/c^2} - c^2 m_0 = c^2 m^2 - c^2 m_0^2,$$

oder

$$m = \sqrt{m_0 + \frac{1}{c^2} \left(\mathfrak{G}^* - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2}. \tag{21a}$$

Es wird also nach (20b)

$$H^* = \sqrt{m_0 c^2 + \left(\mathfrak{G}^* - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2} + e\varphi. \tag{21b}$$

Diese Formel läßt sich, wenn man H^* durch $-icG_4^*$ und φ durch $-iA_4$ ersetzt, in der folgenden symmetrischen vierdimensionalen Form schreiben

$$\left(\mathfrak{G}^* - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(G_k^* - \frac{e}{c} A_k \right)^2 = -m_0^2 c^2, \tag{22}$$

die sich sofort ergibt, wenn man beachtet, daß definitionsgemäß

$$G_k^* - \frac{e}{c} A_k = G_k = m_0 \frac{dx_k}{d\tau} \tag{22a}$$

ist.

Die Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen durch das Viererpotential $\mathfrak{A}$ charakterisierten Felde kann man ohne weiteres durch unmittelbare Integration seiner Bewegungsgleichung — in einer der oben

angeführten Formen — ausführen. Es ist aber möglich und vielfach viel bequemer, zur Lösung dieser Aufgabe eine indirekte Methode zu benützen, welche in die klassische Mechanik durch *Hamilton* und *Jakobi* eingeführt worden ist. Diese Methode läßt sich am einfachsten folgendermaßen fassen: Die Beziehung (20a) zwischen der *Lagrange*schen und der *Hamilton*schen Funktion kann man auch in der Form

$$L^* = \mathfrak{G}^* \cdot \mathfrak{v} + icG_4^* = \sum_{k=1}^{4} G_k^* \frac{dx_k}{dt}$$

schreiben. Dementsprechend bekommen wir nach der Definition der *Lagrange*schen Funktion:

$$V = \int L^* dt = \int \sum_k G_k^* dx_k . \tag{23}$$

Wenn die räumlichen Koordinaten des Elektrons als Funktionen der Zeit tatsächlich bekannt sind, läßt sich V als Funktion des Anfangs- und Endwertes der Zeit t darstellen. Diese Darstellung ist nicht invariant; man kann sie aber durch eine invariante Darstellung ersetzen (oder ersetzt denken), indem V als skalare Funktion des Anfangs- und Endwertes des vierdimensionalen Raumzeitvektors $\mathfrak{x}$ betrachtet wird. Dabei ist zu beachten, daß die Änderung von V bei einer unendlich kleinen Änderung der Integrationslinie *gleich Null ist*, solange die Endpunkte festgehalten werden. Denken wir uns den Anfangswert $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^0$ festgehalten und den Endwert variabel, so kann man folglich die Größe V als eine völlig *bestimmte* Funktion dieses variablen Endwertes $\mathfrak{x}$ behandeln. Die Änderung von V, welche einer unendlich kleinen Änderung von $\mathfrak{x}$ entspricht, drückt sich dabei nach (23) durch die Formel aus

$$dV = \sum_{k=1}^{4} G_k^* \, dx_k = \mathfrak{G}^* \cdot d\mathfrak{x} .$$

Daraus folgt offenbar

$$G_k^* = \frac{\partial V}{\partial x_k} \quad (\mathfrak{G}^* = \square V), \tag{23a}$$

d. h. der Vektor $\mathfrak{G}^*$ (Energie-Bewegungsgröße) kann, wenn man verschiedene Bewegungen mit demselben Anfangspunkt vergleicht, als Gradient einer skalaren Funktion V behandelt werden.

Diese Funktion wird die *Wirkungsfunktion* genannt. Sie ist tatsächlich — solange die Bewegungsgleichung des Elektrons nicht integriert ist — unbekannt. Um sie zu bestimmen, braucht man aber diese Bewegungsgleichung nicht zu integrieren. Zu diesem Zweck kann man die Gleichung (22) benützen. Denn nach (23a) nimmt letztere die folgende Gestalt an:

$$\left(\square V - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} - \frac{e}{c} A_k\right)^2 = -m_0^2 c^2 , \tag{24}$$

d. h. verwandelt sich in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades für die Wirkungsfunktion V.

Das vollständige Integral von (24) enthält 4 willkürliche Konstanten, welche z. B. den unbestimmt gelassenen Anfangswert des Raumzeitvektors $\mathfrak{x}^0$ charakterisieren können. Betrachtet man nun V als Funktion von $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{x}^0$, d. h. von x_k und x_k^0 $(k = 1, \ldots, 4)$, so wird

$$V = \int_{\mathfrak{x}_0}^{\mathfrak{x}} \sum_{k=1}^{4} G_k^* \, dx_k = \int_{\mathfrak{x}_0}^{\mathfrak{x}} \mathfrak{G}^* \cdot d\mathfrak{x} \,. \tag{25}$$

Daraus folgt, daß neben den Gleichungen (23a), welche sich durch Differentiation von V nach der oberen Grenze dieses Integrals ergeben, noch die Gleichungen bestehen müssen

$$\mathfrak{G}_k^{*0} = -\frac{\partial V}{\partial x_k^0} \quad (\mathfrak{G}^{*0} = -\Box^0 V) \,, \tag{25a}$$

welche der Differentiation nach der unteren Grenze entsprechen[1])

Sind neben den Anfangskoordinaten x_k^0 noch die Anfangswerte der „Momente" G_k^*, d. h. der (vollständigen) Bewegungsgröße und der Energie gegeben, so ist durch die Gleichungen (24a) die Weltlinie des Elektrons vollkommen bestimmt. In der Tat, unter den 4 Gleichungen (25a) sind nur drei voneinander unabhängig, die vierte aber muß eine Folge dieser drei sein, denn die vier Größen G_k^{*0} bzw. $\frac{\partial V}{\partial x_k^0}$ müssen ihrem Wesen nach *identisch* die Gleichung (22) bzw. (24) befriedigen. Durch Auflösen der Gleichungen (25a) bekommt man also nur *drei* Relationen zwischen den vier Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, die eine *Linie* im vierdimensionalen Raum bestimmen. Die Gleichung dieser Linie enthält 7 willkürliche Konstanten: die vier Anfangskoordinaten x_k^0 und drei der „Anfangsmomente" G_k^{*0} oder irgendwelche drei willkürliche Konstanten, durch welche die Anfangsmomente im Einklang mit der Gleichung (22) ausgedrückt werden können. Diese Anfangsmomente bestimmen offenbar die *Anfangsrichtung* der Weltlinie. Bei Variation der G_k^{*0} und bei festgehaltenen Werten der Anfangskoordinaten bekommt man also ein Bündel von Weltlinien, die durch denselben Anfangspunkt gehen (und die selbstverständlich in der umgekehrten Richtung verlängert werden können). Jede dieser Linien ist zu der *zugehörigen* Fläche $V =$ konst orthogonal, nicht aber zu den anderen, welche zwar demselben Anfangspunkt, aber einer anderen Anfangsrichtung entsprechen.

Die Flächen, welche zu *allen* Linien des betrachteten Bündels orthogonal sind, bilden offenbar die *Enveloppen* der Flächen $V =$ konst. Die Gleichung solcher Enveloppen kann man folgendermaßen erhalten.

---

[1]) Die Größen $\left(\frac{\partial V}{\partial x_k^0}\right)$ dürfen mit den Größen $\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)_0$, die sich für den Wert $x_k = x_k^0$ der Koordinaten ergeben, nicht verwechselt werden; letztere sind nämlich gleich $+ G_k^{*0}$.

Mittels der Gleichungen (25a) drückt man die Anfangskoordinaten x_k^0 als Funktionen der x_k und der Anfangsmomente G_k^{*0} aus und setzt diese Ausdrücke in die Wirkungsfunktion V ein. Wären die Größen G_k^{*0} voneinander unabhängig, so würde sich die gesuchte Gleichung der Enveloppen durch Elimination der G_k^{*0} aus den Gleichungen $V = \text{konst}$ und $\frac{\partial V}{\partial G_k^{*0}} = 0$ ergeben. Infolge der Relation

$$\sum \left(G_k^{*0} - \frac{e}{c} A_k^0\right)^2 = -m_0^2 c^2 , \tag{25b}$$

müssen aber die obigen Gleichungen, nach der bekannten Multiplikatormethode, durch

$$V = \text{konst}, \quad \frac{\partial V}{\partial G_k^{*0}} - \lambda \left(G_k^{*0} - \frac{e}{c} A_k^0\right) = 0 \tag{26}$$

ersetzt werden, wo λ einen unbestimmten Faktor bedeutet. Führt man nun eine neue Funktion von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{G}^{*0}$ nach der Formel ein

$$V^* = V + \mathfrak{G}^{*0} \cdot \mathfrak{r}^0 , \tag{26a}$$

so lassen sich die Eliminationsgleichungen (26) als *Bestimmungsgleichungen* für die Anfangskoordinaten

$$V^* = \text{konst}, \quad x_k^0 = \frac{\partial V^*}{\partial G_k^{*0}} - \lambda \left(G_k^{*0} - \frac{e}{c} A_k^0\right)$$

auffassen.

Diese Gleichungen kann man auch auf rein analytischem Wege aufstellen. Wir betrachten nämlich eine unendlich kleine Variation der durch (25) definierten Wirkungsfunktion, welche einer infinitesimalen Verschiebung des Anfangs- und Endpunktes entspricht:

$$\delta V = \mathfrak{G}^* \cdot \delta \mathfrak{r} - \mathfrak{G}^{*0} \delta \mathfrak{r}^0$$

und ersetzen $\mathfrak{G}^{*0} \cdot \delta \mathfrak{r}^0$ durch $\delta(\mathfrak{G}^{*0} \cdot \mathfrak{r}^0) - \mathfrak{r}^0 \cdot \delta \mathfrak{G}^{*0}$. Dabei wird

$$\delta(V + \mathfrak{r}^0 \cdot \mathfrak{G}^{*0}) \equiv \delta V^* = \mathfrak{G}^* \delta \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^0 \cdot \delta \mathfrak{G}^{*0} .$$

Daraus folgt, mit Rücksicht auf (25b)

$$V^* = \text{konst}, \quad \mathfrak{G}_k^* = \frac{\partial V^*}{\partial x_k}, \quad x_k^0 = \frac{\partial V^*}{\partial G_k^{*0}} - \lambda \left(G_k^{*0} - \frac{e}{c} A_k^0\right) \tag{26b}$$

Die Funktion V^* kann ebenso wie V *direkt* bestimmt werden als die Lösung der Differentialgleichung (24). Die in dieser Lösung auftretenden Konstanten müssen dabei nicht durch die Komponenten von $\mathfrak{r}^0$, sondern durch die Komponenten von $\mathfrak{G}^{*0}$ ausgedrückt werden.

Zur Erläuterung dieser Begriffe wollen wir den einfachsten Fall der kräftefreien Trägheitsbewegung untersuchen. Da $\mathfrak{A} = 0$ ist, so folgt aus (24):

$$\Box V = \text{konst}, \text{ und } V = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{r} + C ,$$

wo $\mathfrak{B}$ ein konstanter Vierervektor und C eine gewöhnliche Konstante ist. Die Konstante C ist durch die Bedingung bestimmt, daß für $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^0$, $V = 0$ wird. Es ist also $V = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)$ und folglich nach (22) und (25) $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^{*(0)} = \mathfrak{B}$.

Diese Gleichungen bedeuten, daß die Weltlinie eine Gerade ist, die senkrecht zur „Ebene“ $V = \text{konst}$ durch den Punkt $\mathfrak{r}^0$ geht. Die Beziehung zwischen den Koordinaten, die wir im allgemeinen aus den Gleichungen (25) erhalten sollten, ist aber hierin nicht zu finden. Zur Ermittelung dieser Beziehung kann man die Gleichungen (26b) benützen.

Die Funktion V^* läßt sich äußerlich in derselben Form wie V darstellen. Der Anfangspunkt bleibt aber dabei unbestimmt. Die Anfangsmomente bekommt man nach der Formel $\mathfrak{G}_k^{*0} = \left(\frac{\partial V^*}{\partial x_k}\right)_0 = B_k$. Daraus folgt nach (26b)

$$x_k^0 = \frac{\partial V^*}{\partial B_k} - \lambda B_k = x_k - \lambda B_k ,$$

d. h.

$$\frac{x_1 - x_1^0}{B_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{B_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{B_3} = \frac{x_4 - x_4^0}{B_4} = \lambda .$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke $x_k - x_k^0 = \lambda B_k$ in die Funktion V^* bekommen wir: $V^* = \lambda + B_k x_k^0$, oder $\lambda = V$.

Wir wollen noch den am häufigsten auftretenden Fall betrachten, daß das äußere elektromagnetische Feld zeitlich konstant ist. Dabei kann man in der Gleichung (24) $\frac{\partial V}{\partial x_4} = \text{konst} = B_4$ setzen, d. h. die Wirkungsfunktion auf die Gestalt

$$V^* = B_4 x_4 + \Phi(x_1, x_2, x_3) \tag{27}$$

bringen, wo die Funktion Φ nur von den räumlichen Koordinaten abhängt. Wenn es sich um nicht sehr rasche Bewegungen handelt, kann man Φ bestimmen als das Integral der angenäherten dreidimensionalen Gleichung

$$\frac{1}{2m_0}\left(\nabla\Phi - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + e\varphi = H = \text{konst} , \tag{27a}$$

die sich aus (19) mit Rücksicht auf $\mathfrak{G}^* = \nabla\Phi$ und $B_4 x_4 = -Ht$ ergibt.

Bei der Integration dieser Gleichung kann man H als einen ganz willkürlichen Parameter behandeln, ohne seine Beziehung zu den Größen G_1^{*0}, G_2^{*0}, G_3^{*0} zu berücksichtigen. Die Wirkungsfunktion $V^* = -Ht + \Phi$ stellt sich dementsprechend dar als eine Funktion von vier *unabhängigen* Parametern G_1^{*0}, G_2^{*0}, G_3^{*0}, H (wobei letzterer in Φ explizite auftritt). Es ist deshalb in diesem Fall unnötig, das mit λ multiplizierte Zusatzglied einzuführen. Die Bewegungsgleichungen (26b) reduzieren sich dabei auf die bekannten Gleichungen der klassischen Mechanik:

$$G_k^* = \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}, \quad x_k^0 = \frac{\partial\Phi}{\partial G_k^{*0}} \quad (k = 1, 2, 3)$$

und

$$t_0 = t + \frac{\partial\Phi}{\partial H} .$$

§ 5. Einfachste Beispiele der Bewegung eines freien Elektrons.

Wir wollen nun einige konkrete Beispiele der Bewegung eines Elektrons, wie sie durch die relativistische Bewegungsgleichung bestimmt ist, betrachten. Als erstes Beispiel nehmen wir den einfachsten Fall der Bewegung in einem *räumlich und zeitlich* konstanten elektromagnetischen Feld.

Dabei kann man nach (8) setzen

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\mathfrak{r} = \varkappa\, {}^2\mathfrak{H}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\varkappa\, {}^2\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{r}),$$

woraus folgt

$$\frac{d}{d\tau}\mathfrak{r} = \mathfrak{v} = \varkappa\, {}^2\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{a}, \tag{28}$$

wo $\mathfrak{a}$ ein konstanter Vierervektor ist.

Durch innere Multiplikation von (28) mit $\mathfrak{r}$ bekommen wir, da das Produkt $({}^2\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{r}$, infolge des schiefsymmetrischen Charakters des Tensors ${}^2\mathfrak{H}$ verschwindet,

$$\mathfrak{r}\cdot\frac{d}{d\tau}\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r}. \tag{28a}$$

In dem Spezialfall, daß das Produkt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r}$ gleich Null ist, ergibt sich $\mathfrak{r}^2 = \text{konst}$, d. h.

$$r^2 - c^2t^2 = \text{konst} \tag{29}$$

Dabei aber müssen $\mathfrak{r}$ und t noch der Bedingung

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r} = a_t\cdot t \tag{29a}$$

genügen, wo $\mathfrak{a}$ die räumliche und $\frac{i}{c}a_t$ die zeitliche Projektion des Vierervektors $\mathfrak{a}$ sind. Diese Gleichung bedeutet, daß die Projektion der Geschwindigkeit des Elektrons in die $\mathfrak{a}$-Richtung konstant $\left(= \frac{a_t}{|\mathfrak{a}|}\right)$ bleibt.

Die verschiedenen Bewegungstypen lassen sich am einfachsten systematisieren mit Rücksicht auf die Invarianten $H^2 - E^2$ und $\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{E}$. Wir müssen offenbar vier Fälle unterscheiden, nämlich $H^2 - E^2 \gtrless 0$ bei $\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{E} = 0$ oder $\neq 0$ (den Fall $H = E$ für ein konstantes Feld darf man außer acht lassen).

Erster Fall. $E^2 - H^2 > 0$, $\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{E} = 0$. Durch eine passend gewählte Lorentztransformation kann man sich dabei das magnetische Feld aufgehoben denken. Das neue Bezugssystem S' muß sich dabei nach § 2, Kap. IX mit der durch die Formel $\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{E}$ bestimmten Geschwindigkeit bewegen. Da ferner $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{E}$ senkrecht steht, muß diese zusätzliche Geschwindigkeit in der zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ senkrechten Ebene liegen und den Betrag $c\frac{H}{E}$ haben. Es bleibt uns also die Bewegung des Elektrons in einem konstanten elektrischen Feld $\mathfrak{E}'$ zu betrachten.

Der Einfachheit halber werden wir die Akzente, welche auf das „bewegte" Koordinatensystem S' hinweisen, weglassen. Die räumliche Projektion der Gleichung (28) reduziert sich für $H = 0$ auf

$$m\mathfrak{v} = e\mathfrak{E}t + \mathfrak{a} \tag{30}$$

Ist $\mathfrak{a} = 0$, so haben wir nach (29) $\mathfrak{r} \cdot \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - c^2 t = 0$, d. h. $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v} = c^2 t$, und folglich wegen $m\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v} = e\mathfrak{E}\mathfrak{r}t$

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\,\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{r}.$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der Energiegleichung $mc^2 + e\varphi = \text{konst.}$

Setzt man $r = x_1 - x_1{}^0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so bekommt man für x_1 nach (29) die Gleichung

$$(x_1 - x_1^0)^2 - c^2 t^2 = b^2,$$

wo b^2 eine wesentlich positive Konstante ist (denn sonst würde r für genügend kleine t imaginär sein). Die durch die obige Gleichung dargestellte Bewegung heißt *hyperbolisch*, da sie graphisch durch einen Hyperbelast dargestellt werden kann. Sie entspricht der gleichförmig-beschleunigten Bewegung der gewöhnlichen Mechanik, z. B. der Bewegung eines nach oben (negative X_1-Richtung) geworfenen Steines unter der Wirkung der Schwerkraft. Der Unterschied rührt von der Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit her. Bei dem Anwachsen von t von $-\infty$ bis $t = 0$ nimmt x_1 von $+\infty$ bis $x_1^0 + b$ ab, nimmt dann aber wieder zu bis ∞. Bei der Entfernung des Elektrons strebt seine Geschwindigkeit asymptotisch zum Grenzwert c. In der Nähe des Wendepunktes ($x = x_1^0 + b$) nähert sich seine Bewegung der gewöhnlichen, gleichförmig-beschleunigten Bewegung. In der Tat, für $ct \ll b$ wird

$$x_1 - x_1^0 = \sqrt{b^2 + c^2 t^2} \cong b\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{ct}{b}\right)^2\right] = b + \frac{1}{2} wt^2,$$

wo $w = \frac{c^2}{b}$ die Beschleunigung bedeutet. Da offenbar $w = \frac{eE}{m_0}$ ist, so ergibt sich für den Parameter b der Wert $b = \frac{m_0 c^2}{eE}$.

Wenn der Vektor $\mathfrak{a}$ von Null verschieden ist und eine von $\mathfrak{E}$ verschiedene Richtung hat bekommt man eine etwas verwickeltere Bewegung, die wir hier nicht untersuchen werden.

Zweiter Fall. $H^2 - E^2 > 0$, $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H} = 0$. Dabei läßt sich das elektrische Feld durch eine additive konstante Geschwindigkeit von dem Betrage $c\frac{E}{H}$ wegtransformieren. Es bleibt also nur die Bewegung in einem homogenen magnetischen Feld übrig. Die Gleichung (28), welche sich in diesem Fall auf

$$m\mathfrak{v} = \frac{e}{c}\mathfrak{r} \times \mathfrak{H}$$

reduziert, zeigt, daß (für $\mathfrak{a} = 0$) die Geschwindigkeit des Elektrons

immer senkrecht zum Radiusvektor und der magnetischen Feldstärke bleibt. Das Elektron muß sich also in einem Kreis mit dem Mittelpunkt $r = 0$ in einer zu $\mathfrak{H}$ senkrechten Ebene bewegen. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit mit $\mathfrak{o}$, so hat man $\mathfrak{v} = \mathfrak{o} \times \mathfrak{r}$, d. h.

$$\mathfrak{v} = -\frac{e}{cm}\mathfrak{H} = -\varkappa\mathfrak{H}. \tag{31}$$

Diese Geschwindigkeit ist doppelt so groß wie die mittlere Präzessionsgeschwindigkeit, welche durch die Umlaufsbewegung eines Elektrons um ein festes Anziehungszentrum bedingt wird (*Larmor*sche Präzession, Kap. VII, § 9); sie ist aber erfahrungsgemäß identisch mit der Präzessionsgeschwindigkeit der magnetischen oder Rotationsachse eines freien Elektrons.

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ von Null verschieden, so kann man wegen der Konstanz der Masse $\mathfrak{a} = m\mathfrak{v}^0$ setzen, woraus sich ergibt: $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^0 + \mathfrak{o} \times \mathfrak{r}$. Der allgemeine Typus der Bewegung eines Elektrons in einem konstanten magnetischen Felde ist also die Kombination der oben betrachteten Kreisbewegung mit einer geradlinig gleichförmigen Bewegung.

Dritter und vierter Fall. $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E} \neq 0$. Die elektrische und magnetische Feldstärke bleiben in allen Inertialsystemen von Null verschieden. Es gibt aber ein solches „kanonisches" Bezugssystem, wo sie einander parallel sind. Wenn das Elektron sich in dieser ausgezeichneten Richtung bewegt, so „fühlt" es das magnetische Feld gar nicht; wir bekommen also die früher untersuchte Hyperbelbewegung. — Solange die Masse des Elektrons fast konstant bleibt, d. h. bei kleineren Geschwindigkeiten, bewegt sich das Elektron im allgemeinen in einer Schraubenlinie, und zwar mit einer konstanten Umdrehungsgeschwindigkeit um die gemeinsame $\mathfrak{E}$ — $\mathfrak{H}$-Richtung und mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit $\left(\frac{v}{m_0}\mathfrak{E}t\right)$ in dieser Richtung. Bei großen Geschwindigkeiten wird die Bewegung ziemlich kompliziert.

Wir wollen sie nicht analysieren und werden uns mit dem Hinweis auf die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (28) begnügen. Da diese Gleichung bei Benützung von τ als Argument linear ist, so kann man $\mathfrak{r}$ als Funktion der Eigenzeit τ leicht bestimmen. In koordinatenmäßiger Weise geschrieben, liefert (28) das Gleichungssystem

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \varkappa \sum_l H_{kn} x_n + a_k, \tag{32}$$

das bekanntlich durch den Ansatz

$$x_k = \sum_{l=1}^{4} \xi_{kl} e^{\alpha_l \tau} + a_k \tau \tag{32a}$$

gelöst werden kann. Dabei sind die Funktionen $\xi_{kl} e^{\alpha_l \tau}$ verschiedene Lösungen des homogenen Gleichungssystems, welches sich aus (32) für

$\mathfrak{a} = 0$ ergibt. Die Koeffizienten α sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} H_{11}-\alpha, & H_{12}, & H_{13}, & H_{14} \\ H_{21}, & H_{22}-\alpha, & H_{23}, & H_{24} \\ H_{31}, & H_{32}, & H_{33}-\alpha, & H_{34} \\ H_{41}, & H_{42}, & H_{43}, & H_{44}-\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} -\alpha, & H_3, & -H_2, & -iE_1 \\ -H_3, & -\alpha, & H_1, & -iE_2 \\ +H_2, & -H_1, & -\alpha, & -iE_3 \\ iE_1, & iE_2, & iE_3, & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

oder, nach Ausrechnung der Determinante,

$$\alpha^4 + (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2)\alpha^2 - (\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2. \qquad (32\,\mathrm{b})$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind also auf eine einfache Weise durch die beiden Invarianten $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2$ und $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}$ bestimmt. Den reellen Wurzeln entspricht eine „hyperbelartige" asymptotische Bewegung, welche durch das elektrische Feld bedingt ist, der imaginären die periodische Umdrehungsbewegung, die von der magnetischen Kraft herrührt.

Zu jeder Wurzel α_l gehört ein Lösungssystem, das durch die Formeln $x_k = \xi_{kl} e^{\alpha_l \tau}$ gegeben ist. Die Koeffizienten ξ_{kl} lassen sich bis auf einen willkürlichen Faktor aus den Gleichungen

$$\alpha_l \xi_{kl} = \varkappa \sum_{n=1}^{4} H_{kn} \xi_{nl}$$

bestimmen. Will man schließlich die Eigenzeit durch die gewöhnliche Zeit als Argument ersetzen, so muß man eine transzendente Gleichung $[x_4 = f(\tau)]$ lösen, was nur näherungsweise für sehr kleine oder sehr große Geschwindigkeiten möglich ist.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung eines freien Elektrons in dem elektromagnetischen Felde von *ebenen Lichtwellen* — d. h. in der Wellenzone eines beliebigen elektrischen Systems. In diesem Falle sind die beiden Invarianten $H^2 - E^2$ und $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}$ gleich Null, weshalb er vom Standpunkt der Relativitätstheorie besonders einfach erscheint. Wir wollen keine einschränkenden Annahmen über die Art der Schwingungen machen und werden sie durch den Phasenfaktor

$$\Phi(t') = \Phi\left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{c}\right) \qquad (33)$$

charakterisieren; dabei bedeutet $\mathfrak{n}$ die Wellennormale und t' die „Phasenzeit", d. h. die Größe, welche die Schwingungsphase der Wellen an der betrachteten Stelle bestimmt. Für den Spezialfall harmonischer Schwingungen nimmt dieser Phasenfaktor die Gestalt

$$e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{c}\right)}$$

an, wobei der Exponent $\nu\left(t-\frac{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{r}}{c}\right)$ auch in der Form $-\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}=-\sum_{l=1}^{4}k_l\,x_l$ dargestellt werden kann; $\mathfrak{k}$ bedeutet hier den im § 4, Kap. IX betrachteten Phasenvektor.

Die Integration der Bewegungsgleichungen läßt sich ganz elementar ausführen. — Wir haben nämlich wegen

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{n}\times\mathfrak{E}\quad\text{und}\quad\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{n}=0:$$

$$\frac{d}{dt}m\mathfrak{v}=e\mathfrak{E}+e\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}=e\left(1-\frac{v_n}{c}\right)\mathfrak{E}+\frac{e}{c}\mathfrak{n}\,(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v})\,. \tag{33a}$$

Durch innere Multiplikation mit dem konstanten Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ bekommen wir ferner:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{n}\cdot m\mathfrak{v})=\frac{d}{dt}(mv_n)=\frac{e}{c}\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v}.$$

Die Größe $e\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v}$ ist die Arbeit der elektrischen (oder elektromagnetischen) Kraft pro Zeiteinheit. Es ist also $e\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v}=\frac{d}{dt}(c^2m)$, nach der allgemeinen Beziehung zwischen Energie und Masse. Folglich haben wir

$$mv_n=cm+\text{konst.}$$

Rechnet man die Zeit von einem Augenblick $t=0$ in dem das Elektron in Ruhe war, so wird

$$mv_n=c\,(m-m_0)=\frac{T}{c}\,, \tag{34}$$

wo $T=c^2(m-m_0)=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$ die kinetische Energie des Elektrons ist.

Die Projektion der mechanischen Bewegungsgröße des Elektrons $\mathfrak{G}=m\mathfrak{v}$ auf die Wellennormale ergibt sich also als eine wesentlich positive Größe, die proportional zu der (durch die Wellen mitgeteilten) kinetischen Energie ist. Man kann also sagen, daß das Elektron eine Art von *Lichtdruck* erfährt und infolgedessen eine den Lichtstrahlen parallele Geschwindigkeit von der Größe

$$v_n=\frac{c\,(m-m_0)}{m}=c\,(1-\sqrt{1-\beta^2})\quad\left(\beta=\frac{v}{c}\right)$$

bekommt. Diese Beziehung zwischen der Normal- und Gesamtgeschwindigkeit kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sqrt{1-\beta^2}=1-\frac{v_n}{c}. \tag{34a}$$

Nach der Definition der Eigenzeit τ haben wir $\sqrt{1-\beta^2}=\frac{d\tau}{dt}$; andererseits gilt nach der Definition der „Phasenzeit" t'

$$\frac{dt'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t-\frac{\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{n}}{c}\right)=1-\frac{v_n}{c}.$$

Es folgt also aus (34a), daß t' und τ in dem betrachteten Falle *identisch sind*:

$$t' = t - \frac{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}}{c} = \tau = \int_0^t \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt\,. \tag{35}$$

Mittels dieser Formeln läßt sich die Gleichung (33a) auf die Gestalt bringen

$$\frac{d}{dt}\left(m_0 \frac{d\mathfrak{r}}{dt'}\right) = e\,\mathfrak{E}\frac{dt'}{dt} + \mathfrak{n}\frac{e}{c}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v})$$

oder

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt'^2} = \frac{e}{m_0}\mathfrak{E} + \mathfrak{n}\frac{e}{m_0 c}\left(\mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathfrak{r}'}{dt'}\right). \tag{36}$$

Durch Projektion dieser Gleichung auf die Wellenebene und die Wellennormale ergibt sich mit der Abkürzung $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{n}\, r_n$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}'}{dt'^2} = \frac{e}{m_0}\mathfrak{E}(t') \tag{36a}$$

und wegen $\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{n} = 0$ und $\mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{dt'} = \mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathfrak{r}'}{dt'}$

$$\frac{d^2 r_n}{dt'^2} = \frac{e}{m_0 c}\left(\mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{dt'}\right) = \frac{e}{m_0 c}\mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathfrak{r}'}{dt'}. \tag{36b}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{E}^{(-1)} = \int_0^{t'} \mathfrak{E}(t')\, dt' \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}^{(-2)} = \int_0^{t'} \mathfrak{E}^{(-1)}(t')\, dt', \tag{37}$$

so wird nach (36a)

$$\frac{d\mathfrak{r}'}{dt'} = \frac{e}{m_0}\mathfrak{E}^{(-1)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}' = \frac{e}{m_0}\mathfrak{E}^{(-2)}. \tag{38}$$

Ferner haben wir

$$\mathfrak{E}\cdot\frac{d\mathfrak{r}'}{dt'} = \frac{e}{m_0}\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}^{(-1)} = \frac{e}{m_0}\mathfrak{E}^{(-1)}\cdot\frac{d\mathfrak{E}^{(-1)}}{dt'} = \frac{e}{2m_0}\frac{d}{dt'}(E^{(-1)})^2$$

und folglich nach (36b)

$$r_n = \frac{e^2}{2m_0 c}\int_0^{t'} E^{(-1)2}\, dt'. \tag{38a}$$

Schließlich bekommen wir den folgenden Ausdruck für den Radiusvektor des Elektrons

$$\mathfrak{r} = \frac{e}{m_0}\left[\mathfrak{E}^{(-2)} + \mathfrak{n}\frac{e}{2m_0 c}\int_0^{t'} E^{(-1)2}\, dt'\right]. \tag{38b}$$

Das erste Glied stellt die Wirkung der elektrischen Querkraft dar, das zweite ihre kombinierte Wirkung mit der magnetischen Kraft, die als Lichtdruck aufgefaßt werden kann.

Durch die Formel (38b) wird die Abhängigkeit des Radiusvektors von der Eigen- oder Phasenzeit bestimmt. Um $\mathfrak{r}$ als Funktion der gewöhnlichen Zeit darzustellen, muß man t' aus (38b) und der Gleichung

$$t' = t' + \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{c} = t' + \frac{e^2}{2m_0^2 c^2}\int_0^{t'} E^{(-1)2}\, dt$$

eliminieren.

§ 6. Systeme von Elektronen; Virialsatz und Massendefekt.

Das allgemeine Problem der Bewegung eines Systems von materiellen Teilchen bietet schon in der klassischen Mechanik sehr große Schwierigkeiten. Man kann sagen, daß in der klassischen Mechanik nur das Problem der Bewegung von zwei Massenpunkten sich einfach und vollständig lösen läßt. Das berühmte „Dreikörperproblem" besitzt aber bisher noch keine vollständige Lösung. — In der Mechanik der Relativitätstheorie ist die Sachlage noch schlimmer, denn hier kann schon das Problem von „zwei Körpern" nicht vollständig gelöst werden. Zu den Komplikationen, welche von der Veränderlichkeit der Masse herrühren, tritt in diesem Falle noch die viel wesentlichere Komplikation, welche durch den *retardierten Charakter* der elektromagnetischen Fernwirkungen bedingt wird. Eine eingehende Diskussion dieser Fragen müssen wir auf den III. Band dieses Buches verschieben, da sie den wesentlichen Inhalt der Atommechanik und Elektrodynamik bilden. An dieser Stelle werden wir uns beschränken auf die Aufstellung eines wichtigen allgemeinen Satzes, der sich auf die Bewegung einer beliebigen Anzahl von Elektronen bezieht, und die Betrachtung eines Spezialfalls des Zweikörperproblems, der sich an die oben behandelten einfachen Probleme anschließt.

Wir denken uns eine Anzahl von Elektronen — teilweise positiven, teilweise negativen —, die ein *geschlossenes* System bilden, d. h. sich unter der Wirkung ihrer wechselseitigen Kräfte (bei Fehlen irgendwelcher „äußerer" Kräfte) bewegen, und zwar in der Weise, daß sie immer in einem endlichen Abstand voneinander bleiben. Dabei müssen selbstverständlich die Anziehungskräfte, zwischen entgegengesetzten Elektronen die Abstoßungskräfte, welche zwischen Elektronen derselben Art wirken, überwiegen.

Von den erwähnten Komplikationen der relativistischen Mechanik sehen wir zunächst ganz ab. Der dabei gemachte Fehler kann nicht zu groß sein, solange die Geschwindigkeit der Elektronen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit und ihre Abstände klein gegen die Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes sind. — Dementsprechend werden wir nur die elektrostatischen Kräfte berücksichtigen.

Die gegenseitige potentielle Energie unseres Systems drückt sich nach § 1, Kap. VII, durch

$$U = \sum_{\alpha < \beta} \sum' \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}.$$

Die Bewegungsgleichungen eines Elektrons lauten dabei (in der von uns betrachteten Annäherung)

$$m^{(\alpha)} \frac{d^2 x_k^{(\alpha)}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_k^{(\alpha)}} \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{39}$$

Der Einfachheit halber werden wir die Indizes α und k weglassen und

die Summation über sie einfach mit Σ bezeichnen. — Aus der Gleichung (39) folgt durch Multiplikation mit x (d. h. $x_k^{(\alpha)}$)

$$m x \frac{d^2 x}{dt^2} = -x \frac{\partial U}{\partial x}$$

oder nach Umformung der linken Seite und Summation

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m x \frac{dx}{dt}\right) - \sum m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\sum x \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{39a}$$

Die Summe $\sum m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ist offenbar gleich der doppelten kinetischen Energie des ganzen Systems ($2\,T$). Man kann ferner leicht zeigen, daß die Summe $\sum \frac{\partial U}{\partial x} x$ einfach gleich der negativen potentiellen Energie ist. In der Tat, vereinigt man paarweise die Glieder, welche die Wechselwirkung zweier Elektronen (α) und (β) ausdrücken, und beachtet, daß

$$R_{\alpha\beta}^2 = \sum_{k=1}^{3} (x_k^{\alpha} - x_k^{\beta})^2$$

ist, so wird:

$$e_\alpha e_\beta \sum_{k=1}^{3} \left(x_k^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\alpha)}} \frac{1}{R_{\alpha\beta}} + x_k^{(\beta)} \frac{\partial}{\partial x_k^{\beta}} \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \right)$$

$$= -e_\alpha e_\beta \frac{\Sigma [x_k^{(\alpha)} (x_k^{(\alpha)} - x_k^{(\beta)}) + x_k^{(\beta)} (x_k^{(\beta)} - x_k^{(\alpha)})]}{R_{\alpha\beta}^3} = -e_\alpha e_\beta \frac{\Sigma (x_k^{(\alpha)} - x_k^{(\beta)})^2}{R_{\alpha\beta}^3}$$

$$= -\frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}.$$

Daraus folgt

$$-\sum \frac{\partial U}{\partial x} x = +U.$$

Die Gleichung (39a) läßt sich also folgendermaßen schreiben

$$2T = -U + \frac{d}{dt} Q,$$

wo Q die Summe $\sum m x \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \frac{m x^2}{2}$ bedeutet. Da nach unserer Voraussetzung die Elektronen immer in endlichen Abständen voneinander bleiben, können die Koordinaten x nur in gewissen Grenzen schwanken (nicht aber sich monoton ändern). Der Mittelwert von $\frac{d}{dt} Q$ für eine gegenüber der Dauer solcher Schwankungen genügend lange Zeit (die doch sehr klein ist, wenn es sich z. B. um die Bewegung der Elektronen in einem Atom oder Molekül handelt) muß folglich verschwinden. Die entsprechenden Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie müssen also miteinander durch die Formel

$$2\,\overline{T} = -\overline{U} \tag{40}$$

verknüpft sein (*Virialsatz*)[1]).

[1]) Der Virialsatz für den allgemeinen Fall beliebiger konservativer Kräfte ist zuerst von *Clausius* abgeleitet worden.

Damit das betrachtete System tatsächlich existieren kann, muß seine potentielle Energie *negativ* sein, d. h. die Wirkung der Anziehungskräfte muß die Wirkung der Abstoßungskräfte überwiegen. Bei einer Zusammenziehung des Systems, d. h. einer Verkleinerung aller Abstände (unter Beibehaltung der Konfiguration) muß die potentielle Energie (algebraisch) abnehmen und die kinetische um halb so viel zunehmen (infolge des Anwachsens der Wechselwirkungskräfte). Die vollständige Energie des Systems

$$W = T + U = \overline{T} + \overline{U} \tag{40a}$$

ist nach (40) entgegengesetzt gleich der mittleren kinetischen Energie

$$W = -\overline{T}\,. \tag{40b}$$

Diese merkwürdige Beziehung möchten wir durch das folgende Beispiel illustrieren. Wenn ein materieller Körper aus dem gasförmigen Zustand in den flüssigen oder festen (bei derselben Temperatur) übergeht, so verliert er eine gewisse Menge seiner inneren Energie (latente Wärme). Wir können nun auf Grund der Formel (40b) behaupten, daß die kinetische Energie der Elektronen in den Atomen oder Molekülen dieses Körpers sich dabei um genau denselben Betrag vermehren muß. — Wird die mechanische Energie in einem Atom oder einem Himmelskörper durch Strahlung verloren [vgl. VII, § 3], so muß die kinetische Energie der Elektronen sich um denselben Betrag vergrößern.

Wir haben gesehen, daß die Masse irgendeines materiellen Körpers nach der Relativitätstheorie seiner Energie proportional ist. Die Frage nach dem Wesen der Energie eines einzelnen ruhenden Elektrons wollen wir beiseite lassen und sie einfach als Produkt $m_0 c^2$ definieren. Man kann aber behaupten, daß der gegenseitigen potentiellen Energie aller dieser Elektronen U eine zusätzliche *gegenseitige „elektromagnetische" Masse* $\frac{U}{c^2}$ entspricht, und ebenso der kinetischen Energie eine zusätzliche Masse von der Größe $\frac{T}{c^2}$. Die Gesamtmasse eines materiellen Körpers, Molekül oder Atoms, ist also gleich der Summe der „Ruhmassen" aller Elektronen, aus welchen dieser Körper, Molekül oder Atom, besteht, vermehrt um die Größe $\frac{T+U}{c^2} = \frac{W}{c^2}$, welche das *Massenäquivalent der mechanischen Energie dieses Körpers* darstellt. *Diese zusätzliche Masse ist immer negativ,* denn W ist nach (40b) gleich $-T$. Die entgegengesetzte Größe

$$\mu = \frac{\overline{T}}{c^2} = -\frac{W}{c^2} \tag{41}$$

wird deshalb als *Massendefekt* des betrachteten materiellen Systems bezeichnet. Dieser Massendefekt mit c^2 multipliziert, ist gleich der Arbeit, welche aufgewandt werden muß, um das System vollständig zu zer-

gliedern, d. h. alle Elektronen voneinander zu trennen und in Ruhe zu bringen. Denn die mechanische Energie eines solchen zergliederten Systems ist gleich Null, also die Zunahme der Energie bei der Zergliederung (= aufgewandte Arbeit) gleich $0 - W = -W = \overline{T}$.

Sofern die Elektronen unzerstörbar sind und eine Verwandlung ihrer Eigenenergie $c^2 m_0$ in eine andere „utilisierbare" Energieform daher unmöglich erscheint, muß man die materiellen Körper nicht als Energiereservoire betrachten (wie dies vielfach getan wird), sondern als energieleere Gebäude, die nur dann als Energiequellen dienen könnten, wenn sie noch tiefer unter das Nullniveau sänken.

Die angeführte Überlegung über den Massendefekt kann zunächst etwas unkonsequent erscheinen, denn wir haben mit der kinetischen Energie eine Massenvermehrung verknüpft, während wir bei der Ableitung der Gleichung (40) diese Massenvermehrung außer acht gelassen haben.

Man kann aber leicht zeigen, daß in erster Annäherung diese Überlegung richtig bleibt. Ersetzt man nämlich die klassischen Bewegungsgleichungen (39) durch die relativistischen (oder eher semi-relativistischen, denn wir verzichten dabei auf den exakten Ausdruck der Kraft und berücksichtigen nur die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse)

$$\frac{d}{dt}(m^\alpha \mathfrak{v}^\alpha) = -\nabla^{(\alpha)} U \qquad \left(m^\alpha = \frac{m_0^\alpha}{\sqrt{1 - v^{(\alpha)2}/c^2}}\right), \tag{42}$$

so ergibt sich auf dieselbe Weise wie früher:

$$\sum \mathfrak{r} \cdot \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \frac{d}{dt}(\sum m \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v}) - \sum m v^2 = -\sum \mathfrak{r} \cdot \nabla U = +\overline{U},$$

oder wenn man zu den Mittelwerten übergeht

$$\sum \overline{m v^2} = -\overline{U}\,. \tag{42a}$$

In dem betrachteten Fall ist die Größe $\frac{1}{2} m v^2$ etwas verschieden von der kinetischen Energie eines Elektrons, aber nur, wie leicht einzusehen, um Glieder von der Größenordnung $\left(\frac{v}{c}\right)^2$. In der Form

$$m v^2 = m_0 \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) \tag{42b}$$

geschrieben, kann die Größe $m v^2$ definiert werden als die Summe der Energie des Elektrons $\frac{c^2 m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ und des entsprechenden Anteiles seiner *Lagrange*schen Funktion $[L^* = -c^2 m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, vgl. (17), § 3].

Die exakten und vollständigen Bewegungsgleichungen der Elektronen unseres Systems lauten nach (15), § 3:

$$\frac{d}{dt}\left(m^\alpha \mathfrak{v}^\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \mathfrak{A}^\alpha\right) = -\nabla^{(\alpha)}\left(e_\alpha \varphi^\alpha - \frac{e_\alpha}{c} \mathfrak{A}^\alpha \mathfrak{v}^\alpha\right),$$

wo die $\mathfrak{A}^\alpha$ und φ^α die Potentiale sind, welche von allen anderen Elek-

tronen im betreffenden Raumzeitpunkt erzeugt werden[1]). Falls man die *Retardierung der elektrischen Fernwirkungen vernachlässigt*, kann man diese Potentiale durch die einfachen Formeln

$$\varphi^\alpha = \sum_\beta \frac{e_\beta}{R_{\alpha\beta}}, \quad \mathfrak{A}^\alpha = \sum_\beta \frac{e_\beta \mathfrak{v}^\beta}{c R_{\alpha\beta}} \tag{43}$$

ausdrücken und, entsprechend der gegenseitigen elektrischen oder potentiellen Energie $U = \frac{1}{2}\sum_\alpha e_\alpha \varphi^\alpha = \sum_{\alpha<\beta}\sum \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}$, die gegenseitige *magnetische* oder kinetische Energie (vgl. Kap. VII, § 2)

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{c} \mathfrak{v}^\alpha \mathfrak{A}^\alpha \tag{43a}$$

einführen. Dabei gilt offenbar

$$\nabla^{(\alpha)}\left(e_\alpha \varphi^\alpha - \frac{e_\alpha}{c}\mathfrak{v}^\alpha \cdot \mathfrak{A}^\alpha\right) = \nabla^{(\alpha)}(U - T^*)$$

und

$$\sum_\alpha \mathfrak{r}^\alpha \cdot \nabla^{(\alpha)}(U - T^*) = -(U - T^*). \tag{43b}$$

Wir können also die Bewegungsgleichungen, welche nicht nur die elektrischen, sondern auch die magnetischen Wechselwirkungen der Elektronen und zugleich die Veränderlichkeit ihrer Masse berücksichtigen, in der folgenden zu (42) ganz analogen Form schreiben (unter Weglassen der Indizes α):

$$\frac{d}{dt}\left(m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right) = -\nabla(U - T^*). \tag{44}$$

Daraus ergibt sich wie früher nach (43b)

$$\sum \mathfrak{r}\frac{d}{dt}\left(m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right) = \sum \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\left(m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)\right] - \sum\left(m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)\mathfrak{v}$$
$$= +(U - T^*),$$

d. h. nach (43a)

$$\frac{d}{dt}\sum\left[\mathfrak{r}\cdot\left(m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)\right] - \sum m v^2 = U + T^*$$

oder für die Mittelwerte

$$\sum \overline{m v^2} = -\overline{U} - \overline{T}^*. \tag{44a}$$

In dem Grenzfalle kleiner Geschwindigkeiten kann man hier wieder $\sum \overline{m v^2} = \overline{T}$ setzen, und folglich, wenn man die totale mechanische Energie W als Summe $T + T^* + U$ definiert,

$$\overline{W} = -\overline{T}.$$

Es sei erinnert, daß die *Hamilton*sche Funktion H von den magnetischen

[1]) Es sei bemerkt, daß die Differentiation nach der Zeit sich auch auf die Lagen und Geschwindigkeiten dieser Elektronen, insofern das Vektorpotential $\mathfrak{A}^\alpha$ davon abhängt, beziehen muß.

Kräften unabhängig ist und sich einfach durch die Summe von T und U ausdrückt. Führt man diese *Hamilton*sche Funktion an Stelle von W ein, so wird

$$\overline{T} + \overline{T^*} = -H. \tag{44b}$$

Diese Formel ist die Verallgemeinerung des Virialsatzes (40). Bei Anwesenheit von magnetischen Kräften bleibt die *Hamilton*sche Funktion konstant, die Größe $W = H + T^*$ aber nicht.

§ 7. Umlaufsbewegung eines Elektrons.

Wir wollen jetzt das Zweikörperproblem behandeln unter der vereinfachenden Annahme, daß die Masse des einen Teilchens viel größer als die Masse des zweiten ist. Dies entspricht den tatsächlichen Verhältnissen in den materiellen Atomen, die bekanntlich aus einem schweren, positiv geladenen Kerne und einer Anzahl von leichten herumkreisenden negativen Elektronen bestehen. Wir betrachten den Fall eines einzigen Elektrons und sehen von der Mitbewegung des Kernes ganz ab. Damit reduziert sich das Zweikörperproblem tatsächlich auf ein gewöhnliches Einkörperproblem, besonders einfach darum, weil der ruhende Kern ein konstantes elektrostatisches Feld erzeugt. Die Ladung des Kernes sei $-Ze$, dann ist das skalare Potential dieses Feldes

$$\varphi = -\frac{Ze}{r}$$

($+e$ = Elektronenladung).

Die Bewegungsgleichung des Elektrons lautet:

$$\frac{d}{dt} m\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}(e\varphi) = -\frac{Ze^2}{r^2}\mathfrak{r}_0 \left(\mathfrak{r}_0 = \frac{\mathfrak{r}}{r}\right). \tag{45}$$

Daraus folgt sofort, daß sein Impulsmoment

$$\mathfrak{J} = m\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$$

zeitlich konstant bleibt (dieser Satz gilt bekanntlich für alle Zentralkraftbewegungen; vgl. Kap. VII, §9). — Führt man Polarkoordinaten r, θ in der Bewegungsebene ein (θ = Winkel zwischen $\mathfrak{r}$ und einer festen OX-Achse), so läßt sich der Betrag von $\mathfrak{J}$ in der Form $mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ schreiben. Es gilt also

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = J = \text{konst}. \tag{45a}$$

Ferner haben wir den Energiesatz:

$$c^2 m - \frac{Ze^2}{r} = H = \text{konst} \tag{45b}$$

mit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Durch innere Multiplikation von (45) mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{r}_0$ bekommen wir mit Rücksicht auf $\left|\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt}$, $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}_0 = \frac{dr}{dt}$ und

$\mathfrak{v} \cdot \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ (der Vektor $\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}$ ist senkrecht zu $\mathfrak{r}$; $r\frac{d\theta}{dt}$ ist die entsprechende azimutale Komponente der Geschwindigkeit):

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}\mathfrak{r}_0) - m\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt}\right) - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{Ze^2}{r^2}.$$

Setzt man hier nach (45a) $\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{J}{mr^2}\frac{d(\cdot)}{d\theta}$ ein, so wird

$$\frac{J}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\frac{J}{r^2}\frac{dr}{d\theta} - \frac{J^2}{mr^3} = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

d. h. mit der Bezeichnung $\frac{1}{r} = \sigma$

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \sigma = \frac{Ze^2}{J^2}m,$$

oder schließlich, da nach (45b) $m = \frac{1}{c^2}(H + Ze^2\sigma)$ ist:

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{Z^2e^4}{J^2c^2}\right)\sigma = \frac{Ze^2H}{J^2c^2} = \frac{1}{p}. \tag{46}$$

Diese Gleichung läßt sich sofort integrieren. Nach der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten können wir nämlich setzen

$$\sigma = \frac{1}{p}\left(1 + \varepsilon\cos\sqrt{1 - \frac{Z^2e^4}{J^2c^2}}\,\theta\right), \tag{46a}$$

wo ε eine zunächst unbestimmte Integrationskonstante bedeutet. Ist der Parameter

$$\alpha = \frac{Ze^2}{Jc} \tag{46b}$$

sehr klein gegen 1, so reduziert sich die obige Formel praktisch auf die bekannte Gleichung eines Kegelschnittes

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

wobei ε die Exzentrizität bedeutet.

Die durch (46a) dargestellte Bahn unterscheidet sich also — wenn $\alpha < 1$ ist — von den gewöhnlichen elliptischen oder hyperbolischen Bahnen der Himmelsmechanik dadurch, daß statt des gewöhnlichen Polarwinkels θ das Produkt $\theta\sqrt{1-\alpha^2}$ auftritt. — Für $\varepsilon < 1$ beschreibt das Elektron eine ellipsenartige Bahn, die sich aus einer gewöhnlichen Ellipse durch eine zusätzliche Rotation (Präzession in der Bahnebene) ergibt. Eine volle Schwankung von r (von dem Minimumwert $\frac{p}{1+\varepsilon}$ bis zum Maximum $\frac{p}{1-\varepsilon}$ und dann wieder bis zum Minimum) geschieht also hier bei einem Zuwachs von θ nicht um 2π, sondern um $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$. Die

große Achse der Ellipse verschiebt sich demnach bei jeder Umdrehung um den Winkel $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}-1\right)$ oder näherungsweise für $\alpha \ll 1$ um $\pi\alpha^2$. Die Exzentrizität der Bahn kann man leicht aus den Gleichungen $J = mr_{\min}v$ und $H = c^2m - \frac{Ze^2}{r_{\min}}$ berechnen, die dem Durchgang durch das Perihel entsprechen (dabei wird $\mathfrak{v}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$ und folglich $|\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}| = rv$). Eliminiert man nämlich daraus die Masse m und die Geschwindigkeit $\left(\text{mittels der Beziehung } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$, und berücksichtigt, daß $r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ ist, so ergibt sich

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2J^2(H-m_0c^2)}{m_0Z^4e^4}}, \tag{46c}$$

Man bekommt also die betrachtete ellipsenartige Bewegung nur für $H - m_0c^2 < 0$, d. h. bei negativer mechanischer Energie des Elektrons, was von vornherein klar ist. Dagegen muß für $H - m_0c^2 > 0$ das Elektron sich auf einer hyperbelartigen, vom Unendlichen ins Unendliche gehenden Bahn bewegen (diese Bewegung soll mit der geradlinigen Hyperbelbewegung des § 5 nicht verwechselt werden!).

Diese zwei Bahntypen ergeben sich aber nur dann, wenn der Parameter $\alpha < 1$ ist. Es sei bemerkt, daß in dem einfachsten Fall einer Kreisbewegung ($\varepsilon = 0$) dieser Parameter gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeit des Elektrons v zur Lichtgeschwindigkeit ist. Wird also $\alpha > 1$, so muß der Bewegungstypus sich vollständig ändern. In der Tat, statt der trigonometrischen Funktion bekommen wir in (46a) eine exponentielle Funktion nach der Formel

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left(1+\varepsilon e^{\sqrt{\alpha^2-1}\,\theta}\right). \tag{47}$$

Dies ist die Gleichung einer Spirale, die sich immer näher um den Nullpunkt windet. Die Geschwindigkeit des Elektrons nimmt stetig zu und strebt zum Grenzwert $v = c$.

Eine nähere Diskussion der obigen Resultate vom physikalischen Standpunkte aus ist hier nicht am Platze. Wir wollen aber an diesem Beispiel der Umlaufsbewegung eines Elektrons die relativistische Umgestaltung der klassisch-mechanischen Begriffe des Impulsmomentes ($\mathfrak{J}$) und des Drehmomentes ($\mathfrak{M}$) illustrieren.

Wir haben bisher den Kern als ruhend vorausgesetzt. Wir können aber von dem ursprünglichen Koordinatensystem S zu einem anderen S' übergehen, das sich gegen S mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ bewegt. Wie gestaltet sich die Umlaufsbewegung des Elektrons, wenn man sie vom Standpunkte des Systems S', wo das ganze „Atom" (Kern + Elektron) eine konstante Translationsgeschwindigkeit $-\mathfrak{v}'$ hat, betrachtet?

Zur Beantwortung dieser Frage führen wir die Koordinaten des Kernes und Elektrons ein und bezeichnen sie mit x_k^0 bzw. x_k für das

System S und mit $x_k'^0$, x_k' für S'. In dem ursprünglichen System haben wir zwischen den vierten Koordinaten x_4^0 und x_4 keinen Unterschied gemacht, d. h. mit der „gleichzeitigen" Lage des Elektrons und des Kernes operiert. Wir müssen uns nun erinnern, daß der Begriff der Gleichzeitigkeit keinen absoluten Sinn hat. Denn nach der Lorentztransformation, die den Übergang von S nach S' bestimmt, bekommen wir für $x_4^0 = x_4$ im allgemeinen verschiedene Werte für $x_4'^0$ und x_4. Mit dieser Verschiebung der Zeitpunkte, welche dem Kern und dem Elektron zugeschrieben werden, hängt eine Änderung des Vektors $\mathfrak{J}$ beim Übergang von S nach S' eng zusammen. In der klassischen Mechanik wird dieser Vektor, ebenso wie jeder andere dreidimensionale Vektor, als eine invariante Größe betrachtet. In der relativistischen Mechanik muß man ihn — ebenso wie jeden anderen dreidimensionalen Vektor — als eine variante Größe behandeln, und zwar, wie leicht einzusehen ist, als den *räumlichen Anteil eines Sechservektors*. In der Tat, die Komponenten von $\mathfrak{J}$ sind in S durch die Formeln

$$J_1 = m\left[(x_2 - x_2^0)v_3 - (x_3 - x_3^0)v_2\right] = m\left[(x_2 - x_2^0)\frac{dx_3}{dt} - (x_3 - x_3^0)\frac{dx_2}{dt}\right]$$

usw. ausgedrückt. Führt man hier statt der gewöhnlichen Zeit t die Eigenzeit *des Elektrons* $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt = \frac{m_0}{m}\,dt$ ein, so bekommt man für die drei Komponenten von $\mathfrak{J}$

$$J_{kl} = m_0\left\{x_k - x_k^0)\frac{dx_l}{d\tau} - (x_l - x_l^0)\frac{dx_k}{d\tau}\right\} \qquad (k, l = 1, 2, 3). \tag{48}$$

Diese drei Größen bilden aber offenbar die drei räumlichen Komponenten eines vierdimensionalen schiefsymmetrischen Tensors $J_{kl} = -J_{lk}$; die anderen Komponenten ergeben sich, wenn man neben den ersten drei Indizes noch den vierten einführt. Wir können also setzen

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= J_{23}, & J_2 &= J_{31}, & J_3 &= J_{12} \\ iJ_1^* &= J_{14}, & iJ_2^* &= J_{24}, & iJ_3^* &= J_{34} \end{aligned}\right\}, \tag{48a}$$

wo $\mathfrak{J}^*$ den zu $\mathfrak{J}$ gehörigen zeitlichen Anteil von ${}^2\mathfrak{J}$ darstellt. Nach (48) haben wir *wegen der Bedingung* $x_4^0 = x_4$

$$J_{k4} = m_0(x_k - x_k^0)\frac{icdt}{d\tau} = icm(x_k - x_k^0), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

d. h. mit der Abkürzung $x_k - x_k^0 = R_k$

$$\mathfrak{J}^* = cm\mathfrak{R}. \tag{48b}$$

Beim Übergang zum System S' müssen sich die Vektoren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^*$ offenbar nach denselben Formeln transformieren wie die magnetische und die elektrische Polarisation, d. h. nach den Formeln (11), Kap. IX. Für kleine Geschwindigkeiten gelten die angenäherten Formeln

$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{J}^*, \quad \mathfrak{J}^{*\prime} = \mathfrak{J}^* - \frac{\mathfrak{v}'}{c} \times \mathfrak{J}. \tag{49}$$

Es sei bemerkt, daß man unter der erwähnten Einschränkung $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ die Masse des Elektrons als konstant ansehen und sein magnetisches Moment (d. h. das magnetische Moment, welches von der Umlaufsbewegung herrührt) $\mathfrak{m} = \frac{e}{2c}\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}$ durch die Formel

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{J}}{\varkappa'}\left(\varkappa' = \frac{e}{2m_0 c}\right) \tag{49a}$$

bestimmen kann. Dabei bekommen wir für das zugehörige elektrische Moment $\mathfrak{p}$ den Ausdruck

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{2} e\mathfrak{R}, \tag{49b}$$

Hat der Kern die Ladung $-e$ $(Z = 1)$, so wird er mit dem Elektron ein Dipol bilden mit dem Moment $e\mathfrak{R}$, d. h. zweimal größer als (49b). Ist aber Z von 1 verschieden, so ist es auf Grund der üblichen Definition des Dipolmoments unmöglich, ein *bestimmtes* elektrisches Moment dem System Kern—Elektron zuzuschreiben. Denn man kann sich dieses System ebensogut denken als eine Kombination eines Dipols mit dem Moment $e\mathfrak{R}$ und einer resultierenden Kernladung $-(Z-1)e$ oder eines Dipols mit dem Moment $Ze\mathfrak{R}$ und einer resultierenden Elektronenladung $+(Z-1)e$.

Diese Unbestimmheit des elektrischen Momentes ist offenbar eng verknüpft mit der Willkür, welche in der obigen Normierung der Gleichzeitigkeit für den Kern und das Elektron steckt. Denn es ist von vornherein nicht klar — und tatsächlich unmöglich zu begründen — warum in dem System S die Gleichung $x_4 = x_4^0$ gelten soll und nicht in dem System S'. Die durch (49) bestimmte Änderung von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^*$ — dieselben Formeln gelten selbstverständlich für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ — rührt gerade her von der durch die Lorentztransformation definierten Änderung des räumlichen und zeitlichen Abstandes zwischen denjenigen „Ereignissen", welche das Vorhandensein des Kernes und des Elektrons in den betrachteten Raumzeitpunkten bildet. Man kann leicht zeigen, daß die Änderung von $\mathfrak{J}$ (oder $\mathfrak{m}$) hauptsächlich durch die Änderung des räumlichen Abstandes bedingt ist, dagegen die Änderung von $\mathfrak{J}^*$ (bzw. $\mathfrak{p}$) — durch die Änderung des zeitlichen Abstandes.

Dieselben Schwierigkeiten erheben sich, wenn man den Begriff des *Drehmomentes* für ein aus zwei oder mehreren Elektronen bestehendes System auf eine vierdimensionale Weise, unter Berücksichtigung der Relativität der Zeit, zu formulieren sucht. Ist das Elektron einer äußeren Kraft $\mathfrak{f}$ unterworfen, der Kern dagegen nicht (wie es z. B. in einem äußeren magnetischen Felde geschieht), so kann man das Moment dieser Kraft bezüglich des Kernes

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{f}$$

als den räumlichen Anteil eines Sechservektors mit den Komponenten

$$M_{ik} = R_i F_k - R_k F_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

auffassen, wo $\mathfrak{F}$ den dieser Kraft entsprechenden *Viererimpuls* (pro Einheit der Eigenzeit des Elektrons) bedeutet. Aber es steckt in der Definition des zeitlichen Anteiles des Tensors M_{ik} dieselbe Willkür wie bei dem Tensor ${}^2\mathfrak{F}$.

Bei einer strengen und konsequenten Behandlung des zwei- oder Mehrkörperproblems nach der Relativitätstheorie, muß man also die Bewegung jedes Elektrons einzeln betrachten und die anderen nur insofern berücksichtigen, als sie die Quellen des auf das betreffende Elektron wirkenden äußeren Feldes sind. Die Relativität der Gleichzeitigkeit bleibt dabei wegen der Invarianz der elektrodynamischen Gleichungen unschädlich.

§ 8. Rotationsbewegung; Bewegungsgleichungen eines magnetischen Elektrons.

Die im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Schwierigkeiten betreffs der Definition des Impulsmomentes und Drehmomentes eines Systems von zwei oder mehreren Elektronen fallen weg, wenn man diese Größen auf ein einzelnes Elektron bezieht. Dabei ist es nicht notwendig und sogar nicht zweckmäßig, das Elektron in Elemente einzuteilen und seine „Rotationsbewegung" auf eine Umlaufbewegung der letzteren um eine bestimmte durch den Mittelpunkt des Elektrons gehende Achse zurückzuführen. Man kann — und das ist der Weg den wir einschlagen wollen — das Elektron einfach als einen *Punkt* behandeln, dessen Eigenschaften durch gewisse Skalar-, Vektor- und Tensorgrößen charakterisiert werden. Nimmt man für den Grenzfall verschwindender Translationsgeschwindigkeit die Gültigkeit der üblichen mechanischen Beziehungen zwischen den räumlichen Projektionen dieser Größen an, so gestattet die Relativitätstheorie sofort, die entsprechenden exakten für beliebige Translationsgeschwindigkeiten geltenden Beziehungen zu ermitteln, ohne daß man auf irgendwelche Betrachtungen über die „Struktur" des Elektrons einzugehen braucht. Dabei verschwinden auch, wie wir sehen werden, die Schwierigkeiten, welche aus der üblichen in dem § 8, Kap. VII, dargelegten Theorie eines ausgedehnten rotierenden Elektrons bezüglich seiner Masse folgen.

Das magnetische Moment des Elektrons $\mathfrak{m}$ definieren wir als den räumlichen Anteil eines schiefsymmetrischen Tensors $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$

$$\begin{pmatrix} \mu_{23} & \mu_{31} & \mu_{12} & \mu_{14} & \mu_{24} & \mu_{34} \\ m_1 & m_2 & m_3 & ip_1 & ip_2 & ip_3 \end{pmatrix},$$

wobei p_1, p_2, p_3 die räumlichen Komponenten des zugehörigen elektrischen Momentes sind.

Dieses Dipolmoment wollen wir aus der Bedingung bestimmen, daß es in dem Koordinatensystem S', wo das Elektron momentan ruht, *verschwinden soll* ($\mathfrak{p}' = 0$). Dann folgt (vgl. Kap. IX, § 2) für ein

beliebiges Koordinatensystem S, in bezug auf welches das Elektron die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}. \tag{50}$$

Dieses Resultat kann man auch auf die folgende Weise ableiten. Es seien x_α die Koordinaten des Elektrons und die mit ic multiplizierte Zeit ($ict = x_4$) in bezug auf das System S. Wir bilden aus $\mu_{\alpha\beta}$ und $\dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau}$, wo $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ die Eigenzeit des Elektrons bedeutet, den vierdimensionalen Vektor $\sum_{\beta=1}^{4} \mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta$ oder, einfacher geschrieben, $\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta$ (die Summationszeichen für *gleiche Indexpaare* werden im folgenden immer weggelassen). Im „Ruhsystem" S' müssen die Komponenten dieses Vektors $\mu'_{\alpha\beta}\dot{x}'_\beta$ verschwinden, denn es ist $\dot{x}'_1 = \dot{x}'_2 = \dot{x}'_3 = 0$ und, nach unserer Voraussetzung, $\mu'_{14} = \mu'_{24} = \mu'_{34} = 0$. Daraus aber folgt, daß für jedes andere Koordinatensystem S die Gleichungen

$$\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta = 0, \tag{50a}$$

welche das Verschwinden des obigen Vektors aussprechen, erfüllt sind. Setzt man für $\mu_{\alpha\beta}$ und $\dot{x}_\beta$ die entsprechenden dreidimensionalen Ausdrücke ein, so bekommt man für $\alpha = 1, 2, 3$ die räumlichen Komponenten des Vektors:

$$\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m} - \mathfrak{p}\right),$$

während für $\alpha = 4$

$$\mu_{4\beta}\dot{x}_\beta = -\frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{p})$$

wird. Aus dem Verschwinden des ersten Ausdrucks — d. h. aus der Gleichung (50) — folgt unmittelbar das Verschwinden des zweiten.

Mittels der Tensorkomponenten $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\alpha\beta}$ lassen sich bekanntlich die folgenden zwei invarianten Größen bilden

$$m^2 - p^2 = \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}$$

und

$$\mathfrak{m}\mathfrak{p} = i\,(\mu_{23}\mu_{14} + \mu_{31}\mu_{24} + \mu_{12}\mu_{34}).$$

Dabei gilt wegen (50) (d. h. wegen $\mathfrak{p}' = 0$)

$$\mathfrak{m}\mathfrak{p} = \mathfrak{m}'\mathfrak{p}' = 0$$

und

$$m^2 - p^2 = m^2 - \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{m}\right)^2 = m'^2. \tag{51}$$

Die letzte Gleichung bestimmt die Abhängigkeit des magnetischen Moments des Elektrons von seiner Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Man kann sie in die Form

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \tag{51a}$$

umschreiben, wo $v_\perp$ die zu $\mathfrak{m}$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{v}$ bedeutet; $m' = \mu$ ist der Betrag des magnetischen Moments im „Ruhsystem".

Wir führen nun die vierdimensionalen Größen ein, die der magnetischen Energie $-\mathfrak{m}\mathfrak{H} = -m_\alpha H_\alpha$ und dem magnetischen Drehmoment $\mathfrak{m}\times\mathfrak{H}$, d. h. dem schiefsymmetrischen dreidimensionalen Tensor mit den Komponenten $m_\alpha H_\beta - m_\beta H_\alpha$, entsprechen. Die vierdimensionale „Erweiterung" der Energiefunktion ist offenbar der Skalar

$$U = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = -(\mathfrak{m}\mathfrak{H}) - (\mathfrak{p}\mathfrak{E}). \tag{52}$$

Die entsprechende „Erweiterung" für das Drehmoment ist gegeben, wie leicht einzusehen ist, durch den schiefsymmetrischen vierdimensionalen Tensor (Sechservektor)

$$M_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} \tag{53}$$

mit dem räumlichen Anteil

$$(M_{23}, M_{31}, M_{12}) = \mathfrak{m}\times\mathfrak{H} + \mathfrak{p}\times\mathfrak{E}$$

und dem zeitlichen Anteil

$$-i\,(M_{14}, M_{24}, M_{34}) = -\mathfrak{m}\times\mathfrak{E} + \mathfrak{p}\times\mathfrak{H}.$$

Das Impulsmoment des Elektrons definieren wir als den räumlichen Anteil des Tensors

$$\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta}$$

mit $\varkappa = \frac{e}{c m_0}$.

Die einfachste vierdimensionale „Erweiterung" der üblichen Differentialgleichung für die zeitliche Änderung von $\mu_{\alpha\beta}$ würde dann lauten

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = M_{\alpha\beta}, \tag{54}$$

d. h.

$$\frac{\dot{\mathfrak{m}}}{\varkappa} = \mathfrak{m}\times\mathfrak{H} + \mathfrak{p}\times\mathfrak{E} \tag{54a}$$

und

$$\frac{\dot{\mathfrak{p}}}{\varkappa} = \mathfrak{p}\times\mathfrak{H} - \mathfrak{m}\times\mathfrak{E}, \tag{54b}$$

wobei der Punkt die Differentiation nach der Eigenzeit bedeutet.

Die Gleichungen (54a) und (54b) könnten jedoch nur in dem Falle simultan erfüllt sein, daß die Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ voneinander unabhängig (a priori) wären. Tatsächlich aber muß zwischen ihnen die Beziehung (50) bestehen, mit welcher die Gleichungen (54a), (54b) unvereinbar sind. Es ist nun leicht die sie zusammenfassende Gleichung (11) so zu modifizieren, daß die Bedingung (7a) erfüllt ist. Zu diesem Zwecke führen wir einen zunächst unbestimmten vierdimensionalen Vektor a_α ein und bilden den invarianten Skalar

$$-\mu_{\alpha\beta} a_\alpha \dot{x}_\beta = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}(a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha), \tag{55}$$

der nach (50a) identisch verschwindet. Diesen Skalar fügen wir zu der „Energiefunktion" U hinzu, d. h. wir ersetzen die letztere durch

$$U' = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}(H_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}H'_{\alpha\beta}. \tag{55a}$$

Dementsprechend ersetzen wir den Tensor $M_{\alpha\beta}$ durch

$$M'_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma}H'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}H'_{\alpha\gamma}, \tag{55b}$$

d. h.

$$M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}) \tag{55c}$$

und die „Bewegungsgleichung" (54) durch

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = M'_{\alpha\beta} \tag{56}$$

oder, vollständig ausgeschrieben,

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = \mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}H_{\alpha\gamma} + a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}). \tag{56a}$$

Wir bestimmen nun den Vektor a_α auf die Weise, daß diese Gleichung in Einklang mit der Beziehung (50a) kommt. Und zwar folgt aus (56a), unter Berücksichtigung von (50a) und der identischen Beziehung

$$\dot{x}_\alpha\ddot{x}_\alpha = -c^2,$$

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa}\dot{x}_\beta = -\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta = \mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta - a_\gamma\mu_{\alpha\gamma}\dot{x}_\beta\dot{x}_\beta = \mu_{\alpha\gamma}(H_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta + a_\gamma c^2)$$

oder

$$\mu_{\alpha\gamma}\left(\frac{\ddot{x}_\gamma}{\varkappa} + H_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta + a_\gamma c^2\right) = 0.$$

Es ergibt sich also

$$a_\gamma = \frac{1}{\varkappa c^2}(\varkappa H_{\gamma\beta}\dot{x}_\beta - \ddot{x}_\gamma). \tag{57}$$

Unabhängig von diesem Ausdruck für a_γ bekommt man aus (56a) unter Berücksichtigung von (50a):

$$\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta}\dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma} - \mu_{\alpha\beta}\mu_{\ \gamma}H_{\alpha\gamma} = 2\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma} = 0,$$

(wegen des schiefsymmetrischen Charakters von $H_{\beta\gamma}$), d. h.

$$\frac{d}{d\tau}\mu^2_{\alpha\beta} = 0$$

oder

$$\frac{1}{2}\mu^2_{\alpha\beta} = m^2 - p^2 = \mu^2 = \text{konst.} \tag{58}$$

Die Bewegungsgleichungen eines nicht magnetischen Elektrons lauten bekanntlich [vgl. (8) § 2]

$$m_0\ddot{x}_\alpha = \frac{e}{c}H_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta,$$

oder mit $\frac{e}{m_0 c} = \varkappa$

$$\ddot{x} = \varkappa H_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta. \tag{58a}$$

Vernachlässigt man die von dem magnetischen Moment herrührende

Kraft im Vergleich mit der Kraft $e\left(\mathfrak{E}+\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{H}\right)$, die dem Vierervektor $\frac{e}{c}F_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta$ entspricht, so wird nach (58) und (58a)

$$a_\gamma \cong 0. \tag{58b}$$

In dieser Näherung, d. h. bei Vernachlässigung der durch die magnetische Kraft bedingten Störung in der Translationsbewegung des Elektrons, kann man also seine „Rotationsbewegung", d. h. die zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{m}$, durch die einfachen Gleichungen (54) oder (54a) bestimmen.

Setzt man in (54a) nach (50) $\mathfrak{p}=\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{m}$ ein, so wird

$$\frac{\dot{\mathfrak{m}}}{\varkappa}\cong\mathfrak{m}\times\mathfrak{H}+\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{m}\right)\times\mathfrak{E}. \tag{59}$$

Wir betrachten nun den Fall, daß das Elektron sich um den Kern in einem schwachen äußeren Magnetfeld $\mathfrak{H}$ bewegt. Dann kann man in einer noch gröberen Näherung (unter Weglassung der in v/c quadratischen Glieder)

$$\mathfrak{E}\cong\frac{m_0}{e}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \tag{59a}$$

setzen. Dabei nimmt das zweite Glied auf der rechten Seite von (59) die Form

$$\frac{m_0}{ec}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{m})\times\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

an. Wir wollen nun den Mittelwert dieses Ausdrucks für die ungestörte Bewegung berechnen.

Es ist (für die ungestörte Bewegung; vgl. § 9, Kap. VII)

$$\overline{\frac{d}{dt}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{m})\times\mathfrak{v}}=\overline{(\mathfrak{v}\times\mathfrak{m})\times\frac{d\mathfrak{v}}{dt}}+\overline{\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\times\mathfrak{m}\right)\times\mathfrak{v}}=0.$$

Ferner gilt die Identität

$$(\mathfrak{v}\times\mathfrak{m})\times\frac{d\mathfrak{v}}{dt}+\left(\mathfrak{m}\times\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\times\mathfrak{v}+\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\times\mathfrak{v}\right)\times\mathfrak{m}=0.$$

Daraus folgt

$$\overline{(\mathfrak{v}\times\mathfrak{m})\times\frac{d\mathfrak{v}}{dt}}=\frac{1}{2}\overline{\mathfrak{m}\times\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\times\mathfrak{v}\right)},$$

oder nach (59a)

$$\overline{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\times\mathfrak{m}\right)\times\mathfrak{E}}\cong\frac{1}{2c}\mathfrak{m}\times\overline{(\mathfrak{E}\times\mathfrak{v})}=\frac{1}{2}\mathfrak{m}\times\overline{\mathfrak{H}'}. \tag{59b}$$

Die mittlere Änderung des Vektors $\mathfrak{m}$ bestimmt sich folglich in der obigen Näherung durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varkappa}\overline{\frac{d\mathfrak{m}}{dt}}\cong\mathfrak{m}\times\mathfrak{H}+\frac{1}{2}\mathfrak{m}\times\overline{\mathfrak{H}'}. \tag{60}$$

wo $\mathfrak{H}'=-\frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\mathfrak{E}'\cong-\frac{1}{c}\mathfrak{v}\times\mathfrak{E}$ die magnetische Feldstärke in dem

Koordinatensystem S', wo das Elektron momentan ruht, bedeutet; $\overline{\mathfrak{H}'}$ ist der Mittelwert dieser Feldstärke

Wir werden nun eine strengere Ableitung der Differentialgleichung (56) für die „Rotationsbewegung" des Elektrons auf Grund des *Hamilton-Schwarzschild*schen Prinzips anführen; dabei werden sich zu gleicher Zeit die genauen Differentialgleichungen für die Translationsbewegung ergeben.

Wir setzen also wie üblich (vgl. § 3)

$$\delta \int L d\tau = 0 \tag{61}$$

mit den Zusatzbedingungen

$$\dot{x}_\alpha^2 = -c^2, \tag{61a}$$

$$\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta = 0. \tag{61b}$$

Dabei schreiben wir die *Lagrange*sche Funktion in der Form

$$L = \frac{e}{c} A_\alpha \dot{x}_\alpha + T^* + \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

wo T^* die „kinetische Energie" der Rotationsbewegung bedeutet.

Diese Energie betrachten wir, im Anschluß an die gewöhnliche dreidimensionale Mechanik, als eine Funktion der „Drehgeschwindigkeit", die wir durch den schiefsymmetrischen Tensor $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ charakterisieren werden. Dabei setzen wir definitionsweise

$$\delta T^* = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\omega_{\alpha\beta}. \tag{62a}$$

Zur Bestimmung der Variation von $\mu_{\alpha\beta}$ beachten wir zunächst die entsprechende Operation der gewöhnlichen Mechanik. Die bei einer virtuellen infinitesimalen Rotation $\delta\mathfrak{o}$ von der magnetischen Drehkraft $\mathfrak{m}\times\mathfrak{H}$ geleistete Arbeit ist gleich dem inneren Produkt $\delta\mathfrak{o}\cdot(\mathfrak{m}\times\mathfrak{H})$. Andererseits muß sie gleich der Abnahme der magnetischen Energie $-\delta(-\mathfrak{m}\mathfrak{H}) = \delta\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{H}$ sein. Es ist also $\delta\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{H} = \delta\mathfrak{o}\cdot(\mathfrak{m}\times\mathfrak{H})$ oder $(\delta\mathfrak{m}\,\mathfrak{H}) = (\delta\mathfrak{o}\times\mathfrak{m})\cdot\mathfrak{H}$, und folglich

$$\delta\mathfrak{m} = \delta\mathfrak{o}\times\mathfrak{m}.$$

Die entsprechende vierdimensionale Variationsformel muß sich daraus auf dieselbe Art ergeben, wie die Formel (53) aus dem dreidimensionalen Ausdruck für das Drehmoment $\mathfrak{m}\times\mathfrak{H}$. Führt man also den vierdimensionalen schiefsymmetrischen „Rotationstensor" $\delta\Omega_{\alpha\beta}$, dessen räumlicher Anteil dem Vektor $\delta\mathfrak{o}$ gleich ist, ein, so wird

$$\delta\mu_{\alpha\beta} = \delta\Omega_{\alpha\gamma}\cdot\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\cdot\mu_{\alpha\gamma}. \tag{62b}$$

Die Größen $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ (ebenso wie $\delta\mathfrak{o}$) stellen selbstverständlich keine vollständigen Differentiale dar, d. h. es gibt keine der Koordinaten x_α entsprechende „Winkelkoordinate" $\Omega_{\alpha\beta}$ (nichtholonomes System). Trotzdem nehmen wir an, daß neben den Beziehungen

$$\delta\dot{x}_\alpha = \frac{d}{d\tau}\delta x_\alpha \tag{63}$$

auch die entsprechenden Vertauschungsbeziehungen für $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ und $d\Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}\,d\tau$ gelten, d. h.

$$\delta\omega_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau}\delta\Omega_{\alpha\beta}. \tag{63a}$$

Mittels der obigen Formeln und der schon teilweise benützten Relationen

$$\delta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}\,\delta x_\gamma, \qquad \dot{A}_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}\,\dot{x}_\gamma,$$

$$\delta H_{\alpha\beta} = \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\,\delta x_\gamma, \qquad \dot{H}_{\alpha\beta} = \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\,\dot{x}_\gamma$$

bekommen wir

$$\delta L = \frac{e}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}\,\dot{x}_\alpha\delta x_\gamma - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma}\,\dot{x}_\gamma\delta x_\alpha + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c}A_\alpha\,\delta x_\alpha\right) - \frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\Omega_{\alpha\beta}$$
$$+ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\Omega_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\delta x_\gamma + \frac{1}{2}H_{\alpha\beta}(\delta\Omega_{\alpha\gamma}\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\mu_{\alpha\gamma})$$

oder wegen

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} = H_{\beta\alpha},$$

$$\delta L = \left(\frac{e}{c}H_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta + \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\right)\delta x_\alpha$$
$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} + \mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}H_{\alpha\gamma}\right)\delta\Omega_{\alpha\beta} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c}A_\alpha\,\delta x_\alpha + \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\Omega_{\alpha\beta}\right).$$

Ebenso wird, nach (61a) und (61b), bei Hinzufügung unbestimmter *Lagrange*scher Multiplikatoren λ und a_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$)

$$\lambda\dot{x}_\alpha\,\delta\dot{x}_\alpha = -\delta x_\alpha\frac{d}{d\tau}(\lambda\dot{x}_\alpha) + \frac{d}{d\tau}(\lambda\dot{x}_\alpha\,\delta x_\alpha) = 0$$

und

$$a_\alpha\delta(\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta) = \frac{1}{2}\left[a_\alpha\delta(\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta) - a_\beta\delta(\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha)\right] = \frac{d}{d\tau}(a_\alpha\mu_{\alpha\beta}\,\delta x_\beta)$$
$$- \delta x_\alpha\frac{d}{d\tau}(\mu_{\alpha\beta}a_\beta) + \frac{1}{2}(a_\alpha\dot{x}_\beta - a_\beta\dot{x}_\alpha)(\delta\Omega_{\alpha\gamma}\cdot\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\cdot\mu_{\alpha\gamma}) = 0$$

oder, wegen

$$\dot{x}_\beta\mu_{\beta\gamma} = \dot{x}_\alpha\mu_{\alpha\gamma} = 0,$$

$$a_\alpha\delta(\mu_{\alpha\beta}\dot{x}) = \frac{d}{d\tau}(a_\alpha\mu_{\alpha\beta}\,\delta x_\beta) - \delta x_\alpha\frac{d}{d\tau}(\mu_{\beta\alpha}a_\beta)$$
$$+ \frac{1}{2}\delta\Omega_\alpha\cdot a'_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}) = 0.$$

Es folgt also aus (61), (61a) und (61b) unter der üblichen Voraussetzung, daß die Variationen δx_α, $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ an den Grenzen des Integrals (61) verschwinden (durch Addition der obigen Ausdrücke und Nullsetzen der Koeffizienten von δx_α und $\delta\Omega_{\alpha\beta}$):

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda\dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha}a_\beta) = \frac{e}{c}H_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta + \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \tag{64}$$

und

$$\frac{1}{\varkappa}\,\dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}H_{\alpha\gamma} + a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}).$$

Die letzte Gleichung fällt mit (56a) zusammen; die erste ist die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Bewegungsgleichung (58a) für ein nicht magnetisches Elektron.

Dementsprechend setzen wir

$$\lambda = m_0 + \lambda', \tag{64a}$$

wo λ' ein von dem magnetischen Moment des Elektrons abhängiges Zusatzglied bedeutet. Nach der Ausführung der Differentiation auf der linken Seite von (64) bekommen wir, nach (57)

$$\lambda' \ddot{x}_\alpha + \dot{\lambda}' \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} \dot{a}_\alpha + \dot{\mu}_{\beta\alpha} a_\beta = \varkappa m_0 c^2 a_\alpha + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $\dot{x}_\alpha$, wegen der Beziehungen $\dot{x}_\alpha^2 = -c^2$, $\dot{x}_\alpha \ddot{x}_\alpha = 0$ und $a_\alpha \dot{x}_\alpha = 0$:

$$-c^2 \dot{\lambda}' + \dot{\mu}_{\beta\alpha} a_\beta \dot{x}_\alpha = \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha = \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{dH_{\beta\gamma}}{d\tau}$$

oder

$$-c^2 \dot{\lambda}' = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2} \left(\dot{\mu}_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha\right).$$

Nach (55a), (55b) und (56) haben wir

$$\frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta}(H_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) = \frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} H'_{\alpha\beta} = \frac{\varkappa}{2} (\mu_{\alpha\gamma} H'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H'_{\alpha\gamma}) H'_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\varkappa}{2} (\mu_{\alpha\beta} H'_{\gamma\beta} H'_{\alpha\gamma} - \mu_{\beta\alpha} H'_{\gamma\alpha} H'_{\gamma\beta}) = \varkappa \mu_{\alpha\beta} H'_{\alpha\gamma} H'_{\beta\gamma} = 0$$

wegen des schiefsymmetrischen Charakters des Tensors μ_α. Es wird folglich

$$\lambda' = -\frac{1}{2c^2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}. \tag{64b}$$

Die Vermehrung der Masse m_0 ist also gleich der *„relativen* magnetischen Energie" des Elektrons (in bezug auf den Kern und andere das Feld $H_{\alpha\beta}$ erzeugende Teilchen), dividiert durch das Lichtgeschwindigkeitsquadrat.

Den Ausdruck $\mu_{\alpha\beta} a_\alpha$ in (64) kann man als die α-Komponente des zusätzlichen Impulses deuten, der von der *absoluten* Energie des Elektrons, d. h. der kinetischen Energie seiner Rotation, herrührt.

Durch Einsetzen von (64a) in (64) ergibt sich wegen (57)

$$\frac{d}{d\tau} (\lambda' \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} a_\alpha) = c^2 m_0 \varkappa a_\alpha + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \tag{65}$$

Diese Gleichung kann man zur näherungsweisen Bestimmung von a_α benutzen. Und zwar wird in erster Annäherung, wenn man die linke Seite von (65) vernachlässigt,

$$a_\alpha = -\frac{1}{2ec^2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \tag{65a}$$

Aus der Gleichung (64) folgt

$$x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\beta + \mu_{\gamma\beta} a_\gamma) - x_\beta \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha + \mu_{\gamma\alpha} a_\gamma)$$

$$= \frac{e}{c} \left(H_{\beta\gamma} x_\alpha \dot{x}_\gamma - H_{\alpha\gamma} x_\beta \dot{x}_\gamma\right) + \frac{1}{2} \mu_{\varrho\sigma} \left(x_\alpha \frac{\partial H_{\varrho\sigma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial H_{\varrho\sigma}}{\partial x_\alpha}\right)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\left\{\lambda(x_\alpha\dot{x}_\beta - x_\beta\dot{x}_\alpha) + a_\gamma(x_\alpha\mu_{\gamma\beta} - x_\beta\mu_{\gamma\alpha})\right\}\\&\qquad = \frac{e}{c}\left(H_{\beta\gamma}x_\alpha\dot{x}_\gamma - H_{\alpha\gamma}x_\beta\dot{x}_\gamma\right)\\&+\frac{1}{2}\mu_{\varrho\sigma}\left(x_\alpha\frac{\partial H_{\varrho\sigma}}{\partial x_\beta} - x_\beta\frac{\partial H_{\varrho\sigma}}{\partial x_\alpha}\right) - a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}).\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Diese Gleichung kann als die Verallgemeinerung des „Flächensatzes", d. h. der üblichen Formel für die Änderungsgeschwindigkeit des gewöhnlichen Impulsmoments der Translationsbewegung $m_0\,\mathfrak{r}\times\frac{d\mathfrak{r}}{d\tau}$ gelten. Dabei wird dieses Impulsmoment durch den schiefsymmetrischen Tensor

$$I_{\alpha\beta} = \lambda(x_\alpha\dot{x}_\beta - x_\beta\dot{x}_\alpha) + a_\gamma(x_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}) \quad (66\,a)$$

ersetzt, dessen räumlicher Anteil *in erster Näherung* mit $m_0\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}$ zusammenfällt. Es sei ferner bemerkt, daß das zweite Glied auf der rechten Seite von (66) entgegengesetzt gleich ist dem entsprechenden Zusatzgliede in der Formel (56a) für die Änderungsgeschwindigkeit des Impulsmoments der Rotationsbewegung. Setzt man

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{\varkappa} = i_{\alpha\beta},$$

so wird für die Summe beider Momente nach (56a) und (70)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(i_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta}) &= \mu_{\alpha\gamma}H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}H_{\alpha\gamma} + \frac{e}{c}\left(H_{\beta\gamma}x_\alpha\dot{x}_\gamma - H_{\alpha\gamma}x_\beta\dot{x}_\gamma\right)\\&+ x_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha\frac{\partial U}{\partial x_\beta},\end{aligned}\right\} \quad (66\,b)$$

wo U die „relative Energie"

$$U = -\frac{1}{2}\mu_{\sigma\varrho}H_{\varrho\sigma}$$

bedeutet.

Wir betrachten nun den Fall, daß das Elektron sich in einem radialsymmetrischen elektrischen Felde $\mathfrak{E} = f(r)\,\mathfrak{r}$, bei Fehlen eines (äußeren) Magnetfeldes, bewegt. In diesem Falle hat man $U = -\mathfrak{p}\mathfrak{E} = -f\mathfrak{p}\mathfrak{r}$ und folglich für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$x_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha\frac{\partial U}{\partial x_\beta} = f(x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = E_\alpha p_\beta - E_\beta p_\alpha.$$

Das resultierende Drehmoment, welches dem räumlichen Anteil des Tensors auf der rechten Seite von (66a) entspricht, wird also gleich Null (vgl. § 9, Kap. VII und § 2, Kap. IX).

Daraus folgt, daß *das resultierende Impulsmoment des Elektrons*, im betrachteten Falle, nach Größe und Richtung *konstant bleiben* muß.

Wie wir schon oben gesehen haben [Gleichung (15)] ist der Betrag des Tensors $\mu_{\alpha\beta}$ und folglich auch $i_{\alpha\beta}$ zeitlich konstant. In erster Näherung $\left(\text{bei Weglassen der in } \frac{1}{c} \text{ quadratischen Glieder}\right)$ kann man folglich das Impulsmoment der Rotationsbewegung $\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{m}}{\varkappa}$ seinem Be-

trage nach als zeitlich konstant betrachten. Bezeichnet man das Impulsmoment der Translationsbewegung (d. h. den räumlichen Anteil des Tensors $I_{\alpha\beta}$) durch $\mathfrak{J}$, so folgt, wegen der Bedingung $\mathfrak{i} + \mathfrak{J} = \text{konst}$, daß der Betrag von $\mathfrak{J}$ auch konstant bleibt, und daß beide Vektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{J}$ um ihre Resultierende mit derselben Winkelgeschwindigkeit präzessieren.

Führen wir statt der Impulsmomente $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{J}$ die entsprechenden *magnetischen* Momente $\mathfrak{m} = \varkappa \mathfrak{i}$ und $\mathfrak{M} = \frac{\varkappa}{2} \mathfrak{J}$ ein, so sieht man, daß die Summe $\mathfrak{m} + \mathfrak{M} = \frac{\varkappa}{2} (\mathfrak{i} + \mathfrak{J}) + \frac{\varkappa}{2} \mathfrak{i}$ keinen konstanten Vektor darstellt. Der Betrag dieses Vektors bleibt zwar konstant, seine Richtung aber muß um die Atomachse mit der obenerwähnten Winkelgeschwindigkeit präzessieren. Diese Winkelgeschwindigkeit läßt sich nicht einfach bestimmen; die Formel (64) zeigt aber, daß ihr *Mittelwert* mit der gewöhnlichen *Larmor*geschwindigkeit der Elektronenbahn in einem äußeren Magnetfelde $\overline{\mathfrak{H}}'$ übereinstimmt.

In den vorhergehenden Ausführungen haben wir das in § 8, Kap. VII gefundene *innere* Drehmoment ganz außer acht gelassen. Dieses Drehmoment, falls es tatsächlich vorhanden wäre, würde den räumlichen Anteil eines Sechservektors darstellen und sollte sich im Grenzfalle kleiner Translationsgeschwindigkeiten auf die Form (63a) Kap. VII reduzieren. -- Es ist nun leicht, sich zu überzeugen, daß ein solcher Sechservektor, mit den in $\mu_{\alpha\beta}$ und $\dot{x}_\gamma$ quadratischen Komponenten, zwar aufgebaut werden kann, aber wegen der Bedingung $\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta = 0$ identisch verschwinden muß.

Die Existenz eines inneren Drehmomentes scheint deshalb mit der Relativitätstheorie unverträglich zu sein.

Namen- und Sachverzeichnis[1]).

Aberration (des Lichtes) 304.
Abraham, M., 192, 220, 230, 241.
Achsen eines Tensors 32.
— eines Multipols 95.
Achsenvektoren 96.
affine Transformation 275.
*D'Alembert*sche Gleichung 135.
*Ampère*sche Ströme 62.
Äquipotentialflächen 82.
Äquivalenzprinzip.
— zwischen Dipolen und Strömen 62.
— elektrischen und magnetischen Systemen 164.
— Energie und Masse 228.
Äther 267.

Bewegung eines Elektrons.
— in einem raum-zeitlich konstanten Felde 337.
— im Felde ebener Lichtwellen 341.
— um einen ruhenden Kern 348.
Bewegungsgleichung.
— *Lorentz*sche 226.
— *Newton*sche 202, 319.
— *Einstein*sche 320ff.
— *Hamilton-Jacobi*sche 331ff.
Bewegungsgröße (elektromagnetische) 216.
Born, M., 323.
Bradley 304.

*Coulomb*sches Gesetz 73ff.

Dielektrische Körper 48.
Dipol.
— elektrischer 38ff.
— elementarer 39, 84.
— magnetischer 61, 165.
— mathematischer 94.
*Dirichlet*sches Prinzip 111.
Divergenz 9ff.
Doppelschicht 68, 89, 117.
*Doppler*sches Prinzip 306.
Drehimpuls (elektrischer) 55.
Drehmoment 43.

Effektive Zeit 140.
Eigenzeit 317.
Einheiten.
— elektrostatische und elektrokinetische 52.
— rationelle 74.
Einstein, A. 269, 272.
Elektromagnetische Lichttheorie 148.
Elektromagnetische Masse 201.
Elektromotorische Kraft 125.
Elektronen 38.
— Größe und Masse 203.
Energie.
— elektrische (potentielle) 43.
— magnetische (potentielle) 56.
— magnetische (kinetische) 128.
— eigene und gegenseitige 191, 199.
— mechanische und strahlende 209.
Energiedichte 190.
Energiegleichung 205.
Energieprinzip 42, 55.
Energieströmungsvektor 206.

Feld.
— quellenfreies 50.
— wirbelfreies 46.
Feldstärke.
— elektrische 44.
— magnetische 56.
Flächendichte 68.
Flächengeschwindigkeit 88.
Flächenströme 69, 116.
Fluß 11.
Frequenz 149.

[1]) Worte, welche im Text sehr oft gebraucht werden, sind im Sachverzeichnis nur einmal erwähnt; und zwar ist die Seite angegeben, wo sie zum erstenmal erscheinen und definiert werden.

*Gauß*scher Satz 15.
Geschwindigkeit.
— kritische 80.
— *Einstein*sches Additionsgesetz der 277.
Gleichstrom 49.
Gradient 9, 10.
*Green*sche Funktion 114.

*Hamilton*sche Funktion 331 ff.
*Hamilton-Jacobi*sche Gleichung 332.
Harmonische Funktionen (s. Kugelfunktionen).
Harmonisch konjugierte Punkte 105.
Hauptachsentransformation 32.
Herglotz 177.
*Hertz*sche Vektor 91, 135.

Impuls.
— elektrischer 48.
— einer Kraft 212.
Impulsmoment.
— elektrisches 55.
— elektromagnetisches 232.
Induktion.
— elektrische 119.
— elektromagnetische 125.
Induktionskoeffizient 195, 198.
Inertialsysteme 269 ff.
Invarianz.
— der physikalischen Gesetze 259.
— der Lichtgeschwindigkeit 269.
Isotropie (des Raumes, der Welt) 263.

Kausalitätsprinzip 138, 278.
Komplexe Integraldarstellung der Feldgrößen 180, 309, 312.
Konjugierte Ladungen 105.
Konservative Kräfte 42.
Konvektives Potential 175.
Kovarianz 25, 260.
Kraftlinien 80.
Kraftschwingungen 147.
Kugelfunktionen 98 ff.

Ladungsdichte 50.
*Lagrange*sche Funktion 330 ff., 358.
— Reihe (für die Potentiale) 184.
*Laplace*scher Operator 17.
— Gleichung 64, 178.
Larmorpräzession 244.
*Legendre*sche Polynome 98.
Lichtgeschwindigkeit 80.
Lichtdruck 219.
*Liénard-Wiechert*sche Potentiale 168.
Lineare Ströme 50.
Lorentz, H. A. 74, 192.
*Lorentz*sches Bewegungsprinzip 202.
— Gleichgewichtsprinzip 223.
— Kontraktionshypothese 224.
*Lorentz*transformation 263.

Magnetonen 62, 87, 242.
Maße.
— elektromagnetische 201.
— longitudinale und transversale 226.
— relativistische 321.
Massendefekt 345.
Maxwell, J. C. 131.
*Maxwell-Lorentz*sche Gleichungen 132.
Maxwellsche Spannungen 214.
Minkowski 256.
*Minkowski*sche „Welt" 282.
Molekularströme und Molekularmagnete 62.
Moment.
— geometrisches (einer Kurve) 4.
— elektrisches (eines Dipols) 40.
— magnetisches (eines Stroms) 52.
— höherer Ordnung 99.
— induziertes 119.
Multipole 94.
— strahlung von 158.

*Newton*sches Relativitätsprinzip.
Niveauflächen 82.

Oktupol 94.
Orthogonalität (der Kugelfunktion) 110.
Orthogonalitätsbedingung (bei den linearen Transformationen) 261, 271.
Oszillator.
— elektrischer 142.
— magnetischer 165.
— geradlinig-gleichförmig bewegter 301.
— willkürlich bewegter 307 ff.

Phasenvektor 153.
Planck, M., 210.
Polarisation.
— elektrische 48, 90.
— magnetische 91.
— relativistische (des Elektrons) 237, 296.
— des Lichtes 147.
Polarisationskoeffizient (bzw. -tensor) 120.

Polarisationspotentiale 91, 92, 135.
Pondermotorische Kraft 125.
Potential.
— skalares (elektrisches) 46.
— vektorielles (elektrokinetisches) 57.
— retardiertes 138.
— konvektives 174.
*Poynting*scher Vektor 206.
Präzession (des Elektrons) 234, 244.
Punkte.
— singuläre 63.
— mehrfache 94.
Punktladung 166.

Quadrupol 94.
Quelle 12.

Rang (eines Tensors) 26.
Raumartig 289.
Raumzeitpunkt 177.
Relativität.
— der Geschwindigkeit 126.
— der Richtungen 259.
Rotation 9, 11.
…tierendes Elektron 229, 235, 296, 353.
…hdichte (der Elektrizität) 290.
*…hwarzschild*sches Variationsprinzip 314, 333.
…bstkraft 202.
…lbstdrehkraft 235, 240.
Sechservektoren 257.
Singuläre Punkte 63.
— Linien 178.
Solenoid 96.
Spannungstensor 214ff.
*Stokes*scher Satz 15.
Strahlungsdämpfung 209.
Strahlungsvektor 208.
Ströme.
— elektrische 47.
— lineare 51.
— solenoidale 69.
— stationäre 50.
Stromdichte 48.
Stromstärke 49.

Tensor.
— höheren Ranges 35.
— transponierte 28.
Tensorprodukt 30.
Thompson, J. J. 202.
Translation (gleichförmige) eines Elektrons 172, 300.

Uhlenbeck, G. und *Goudsmit, S.* 241.

Verschiebungsstrom 131.
Vierervektoren 256.

Weber 62.
Weiß, P., 242.
Wellen.
— Kugelwellen 138.
— elektromagnetische 146.
Wellenlänge 146, 149.
Wellenvektor 307.
Wellenzone 151.
Weltlinien 317.
Wirkungsfunktion 330, 333.

Zeitartig 289.

B. WESTERMANN CO., INC. GENERAL SCIENTIFIC BOOKS 13 W. 46th ST. NEW YORK

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.